

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СУММЫ ГАУССИАН, ИСКАЖЕННЫХ ИМПУЛЬСНЫМ ШУМОМ

Актуальность. Применение традиционных методов декомпозиции суммы гауссовых функций для случая, когда исходные данные искажены шумом импульсного типа, приводит к значительным ошибкам. Объектом данного исследования является процесс декомпозиции суммы гауссовых функций в импульсной шумовой обстановке.

Цель работы – разработка метода декомпозиции суммы гауссовых функций для случая, когда данные искажены шумом импульсного типа.

Метод. Предложенный метод основан на решении задачи безусловной минимизации заданной целевой функции по неизвестным параметрам. Постановка задачи выполнена на основе критерия минимума протяженности, который применяется к невязке решения. Процесс декомпозиции реализуется итерационно путем последовательного выделения гауссовых функций из их суммы, где вначале выделяется самая протяженная гауссова функция, затем выделяется менее протяженная и т. д. Для определения значений параметров гауссовой функции описано два подхода. Первый подход основан на методе итераций, который применяется для решения системы нелинейных уравнений, получаемой из необходимого условия минимума целевой функции. Второй подход основан на методе прямого пассивного поиска минимума целевой функции, в котором пробные точки выбираются из условия равенства нулю невязки решения в этих точках. Отмечено, что второй подход имеет более широкую область применимости, чем первый. На основе второго подхода построен итерационный алгоритм, для которого описан способ выбора начальных значений параметров гауссовой функции в условиях наличия импульсного шума, сформулированы правила выбора наилучших значений ее параметров на каждой итерации и приведено правило остановки вычислений.

Результаты. Моделирование задач подгонки одиночной гауссовой кривой к данным и декомпозиции суммы пяти гауссовых функций для случая, когда соответствующие исходные данные искажены шумом импульсного типа с законом распределения Коши, подтвердили эффективность предложенного метода.

Выводы. Предложенный метод является эффективным инструментом декомпозиции суммы гауссовых функций, искаженных шумом импульсного типа с законом распределения Коши. Он может быть распространен на случай суммы функций другой формы и других неизвестных параметров.

Ключевые слова: гауссова декомпозиция, обработка данных, протяженность.

НОМЕНКЛАТУРА

A – амплитуда гауссианы;

f_i – i -ый элемент последовательности, которая отвечает модели;

g_i – i -ый элемент последовательности известных данных;

i – номер отсчета;

m – положение максимума гауссианы;

N – количество отсчетов;

q – свободный параметр, который отвечает за степень сглаживания значений;

x – независимая переменная;

x_i – i -ый отсчет независимой переменной x ;

α – свободный параметр, который отвечает за величину сглаживания значений;

β – свободный параметр, который отвечает за форму закона распределения;

Δx – шаг дискретизации независимой переменной x ;

ν – параметр масштаба шума с законом распределения Коши

σ – полуширина гауссианы.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих случаях преимущество модели в виде суммы гауссовых функций обусловлено набором тех математических свойств, которые делают удобным ее применение для аналитических расчетов. В первую очередь, такие свойства связаны с «бесконечной» гладкостью га-

уссовой функции из-за наличия ее производной любого конечного порядка, а также с простотой определения значений ее нелинейных параметров – местоположения и полуширины – на основе второй производной. Кроме этого, быстрого затухания «хвостов» гауссовой функции обеспечивает квазиортогональность набора гауссовых функций при отсутствии их существенного перекрытия, а ее интегрируемость и дифференцируемость позволяют проводить теоретические исследования. Недостатком применения модели в виде суммы гауссовых функций является необходимость решения проблемы их декомпозиции, которая заключается в разложении этой суммы на отдельные составляющие.

Успешное решение проблемы гауссовой декомпозиции зависит от двух основных факторов, а именно от близости расположения гауссовых функций и от шума. Эти факторы взаимосвязаны. Так, чем меньше уровень шума, тем ближе друг к другу могут быть расположены гауссовы функции, для которых декомпозиция выполняется верно. Более того, при отсутствии шума декомпозиция теоретически возможна для сколь угодно близко расположенных гауссовых функций. С другой стороны, при наличии достаточно большого шума декомпозиция становится невозможной. Однако не только уровень, но и природа шума влияет на возможность и качество декомпозиции. Так, даже в случае слабого шума импульсного типа (например, шума с законом распределения Коши) качество декомпозиции может оказаться низким.

В данной работе рассмотрен подход к решению проблемы гауссовой декомпозиции в условиях наличия импульсного шума. Постановка задачи гауссовой декомпозиции основана на критерии минимума протяженности. Результаты числового моделирования задачи подгонки гауссовой кривой под данные и задачи декомпозиции суммы гауссовых функций показывают возможность предложенного подхода.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изложение постановки задачи и последующего материала выполняется для дискретного случая, а непрерывный случай может быть записан по аналогии. При этом применяются следующие обозначения. Запись x_i обозначает i -ый дискретный отсчет независимой переменной x , причем $i = 1, \dots, N$, где N обозначает количество отсчетов. Далее считается, что $x_i = i \cdot \Delta x$, где $\Delta x = 1$ есть шаг дискретизации независимой переменной x , т.е. фактически $x_i = i$. Запись независимой переменной x без нижнего индекса используется тогда, когда нет разницы, к какому из отсчетов относится записываемое соотношение, т.е. когда оно заведомо справедливо для любого $i = 1, \dots, N$. Запись g_i обозначает i -ый элемент исходной последовательности известных данных. Модель одиночного объекта, который описывается гауссовой функцией

$$f(x) = A e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}; |x| < \infty, \quad (1)$$

сокращенно именуется «гауссиана», где A обозначает ее амплитуду, m задает положение ее максимума, а σ есть ее полуширина, определяемая примерно на уровне $0,606 \cdot A$. Запись f_i обозначает i -ый элемент дискретной последовательности, которая отвечает модели (1).

Математическая постановка рассматриваемой задачи основана на требовании минимизировать протяженность (extent) результирующей последовательности данных. Укажем, что применительно к абстрактной функциональной зависимости допустима строгая и нестрогая формулировка понятия ее протяженности [2]. Строгая формулировка основана на определении Титчмарша [1], которое трудно использовать конструктивно. Нестрогая формулировка основана на использовании стоимостной функции [2]

$$\psi_S^{(\alpha, \beta, q)}(x) = k_S^{(\alpha, \beta, q)} [(1 + |x|^q / \alpha^q)^{\beta/q} - 1]; |x| < \infty, \quad (2)$$

где $\alpha > 0$; $-\infty < \beta \leq 1$; $0 < q < \infty$; $\beta < q$; $k_S^{(\alpha, \beta, q)} = 1 / [(1 + |x_1|^q / \alpha^q)^{\beta/q} - 1]$; $\psi_S^{(\alpha, \beta, q)}(x_1) = 1$ и где α , β и q являются свободными параметрами, которые предназначены для настройки процесса обработки на текущую шумовую обстановку. Путем изменения значений свободных параметров функция (2) может трансформироваться в степенную от модуля, квадратичную, модульную, псевдо-Хьюберовскую, корневую и логарифмическую стоимостные функции, в обобщенные стоимостные функции Демиденко и Мешалкина, а также в идеальную стоимостную функцию Титчмарша, формируя различные способы обработки данных [2].

Учитывая (1), (2) и принятые обозначения, для дискретного случая постановка задачи декомпозиции суммы гауссиан на основе указанного выше требования минимума протяженности имеет вид

$$\arg \min_{A_1, \dots, A_P, m_1, \dots, m_P, \sigma_1, \dots, \sigma_P} \left\{ k_S^{(\alpha, \beta, q)} \sum_{i=1}^N \left[1 + \left| g_i - \sum_{p=1}^P A_p e^{-\frac{(x_i - m_p)^2}{2\sigma_p^2}} \right|^q / \alpha^q \right]^{\beta/q} - 1 \right\}, \quad (3)$$

где P обозначает количество гауссиан, A_p, m_p, σ_p обозначают амплитуду, положение максимума и полуширину p -ой гауссианы, а параметры α, β и q удовлетворяют указанным выше неравенствам. Подчеркнем, что для $0 < \beta \leq 1$ имеем $k_S^{(\alpha, \beta, q)} > 0$, а для $-\infty < \beta < 0$ имеем $k_S^{(\alpha, \beta, q)} < 0$. Однако для $\beta = 0$ (точнее, для $\beta \rightarrow 0$) запись задачи (3) и коэффициента $k_S^{(\alpha, \beta, q)}$ трансформируется в запись на основе логарифмов [3]. Поэтому для практического использования задачу (3) необходимо переписать в виде двух задач оптимизации. Так, отбрасывая несущественные коэффициенты, для $\beta \neq 0$ из (3) имеем

$$\arg \min_{A_1, \dots, A_P, m_1, \dots, m_P, \sigma_1, \dots, \sigma_P} \left\{ \operatorname{sgn}(\beta) \sum_{i=1}^N \left[1 + \left| g_i - \sum_{p=1}^P A_p e^{-\frac{(x_i - m_p)^2}{2\sigma_p^2}} \right|^q / \alpha^q \right]^{\beta/q} \right\}, \quad (4)$$

где $\operatorname{sgn}(\beta) = 1$ для $0 < \beta \leq 1$ и $\operatorname{sgn}(\beta) = -1$ для $-\infty < \beta < 0$, а для $\beta = 0$ из (3) путем предельного перехода по $\beta \rightarrow 0$ получаем

$$\arg \min_{A_1, \dots, A_P, m_1, \dots, m_P, \sigma_1, \dots, \sigma_P} \left\{ \sum_{i=1}^N \ln \left[1 + \left| g_i - \sum_{p=1}^P A_p e^{-\frac{(x_i - m_p)^2}{2\sigma_p^2}} \right|^q / \alpha^q \right] \right\}. \quad (5)$$

Таким образом, (4) и (5) есть частные случаи (3).

2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Традиционный подход к гауссовой декомпозиции основан на методе наименьших квадратов в предположении, что шум имеет нормальный закон распределения и умеренную дисперсию. В рамках этого подхода гауссова декомпозиция рассматривается как задача квадратичной оптимизации, где основное внимание уделяется выбору хороших начальных приближений для неизвестных параметров и применению эффективных методов оптимизации. Так, в [4] выбор хороших начальных приближений для неизвестных нелинейных параметров (в том числе, для количества гауссовых функций) достигался путем построения и последующего анализа «пространственно-масштабного изображения» (scale-space image) для заданной одномерной последовательности данных, а в качестве эффективного метода оптимизации использовался метод Марквардта. Устойчивость такого решения фактически обеспечивалась за счет ограничения количества функций в неортогональном гауссовом базисе. Современный вариант [5] гауссовой декомпозиции на базе метода наименьших квадратов использует аддитивный нелинейный регуляризирующий член – регуляризатор, который формально описывает обобщенную длину контура кривой получаемого решения и который имеет один свободно настраиваемый параметр. Применение свободного параметра позволяет менять свойства регуляризатора, настраивая процесс обработки данных. Так, если значение свободного параметра равно нулю, то этот регуляризатор становится L_1 -нормой первой производной искомого решения, реализуя принцип ограничения полной вариации решения («minimal total variation principle» [6]) в рамках метода LASSO Тибширани. Однако если значение свободного параметра является достаточно большим, то регуляризатор становится близким к L_2 -норме первой производной искомого решения, реализуя указанный принцип в рамках метода регуляризации Тихонова. Результаты [5] показывают хорошие возможности предложенного подхода по автоматической (автономной) декомпозиции суммы гауссиан, которые не уступают возможностям человека. Однако область его применимости ограничена теми случаями, когда отсутствуют выбросы или пропуски значений в исходных данных.

Пакет MATLAB [7] содержит встроенную функцию $\text{fit}()$, которая позволяет выполнять подгонку (fitting) различных кривых под последовательность данных и, в частности, подгонку от одной гауссовой кривой до суммы из восьми гауссовых кривых. Функция $\text{fit}()$ показывает хорошие результаты в тех случаях, когда исходная последовательность данных отвечает хорошо различимым объектам и когда она искажена умеренным шумом гауссовского типа. Нарушение одного из этих условий может привести к неверным результатам или даже к сбою в ее работе. В частности, функция $\text{fit}()$ терпит крах для шума с законом распределения Коши. Так, простой тест (длина последовательности данных $N = 256$; шаг $\Delta x = 1$; одна гауссиана с параметрами: $A = 1$, $m = 100 \Delta x$, $\sigma = 8 \Delta x$; параметры шума Коши: сдвиг равен нулю, мас-

штаб равен $0,1 \Delta x$; начальное состояние генератора псевдослучайных чисел равно нулю) дал положительный результат только для одной из 10 случайных реализаций. Более того, при продолжении этого теста функция $\text{fit}()$ дала программный сбой для 15-й реализации шума, формируя нечисло (Not-a-Number) и аварийно завершаясь.

Существуют различные модели импульсного шума. Одной из них является шум с законом распределения Коши [8], для подавления которого разработан метод «мириадной фильтрации» [9]. Другой моделью импульсного шума с более тяжелыми хвостами является шум с «меридианным» законом распределения, для подавления которого предложен метод «меридианной фильтрации» [10]. В [11] на базе принципа максимального правдоподобия выполнено обобщение этих двух методов на случай шума с законом обобщенного распределения Коши, где параметр тяжести хвостов закона распределения меняется в диапазоне от 0 до 2, причем «меридианному» шуму отвечает значение 1, а шуму Коши отвечает значение 2. Однако в [9] отмечено, что использование принципа максимального правдоподобия не позволяет получить аналитическое описание методов оптимальной обработки для всех типов шума. Это обусловлено тем, что не всегда есть возможность получить аналитическое выражение для закона распределения шума, причем даже тогда, когда известна соответствующая характеристическая функция [8].

В [3] описан другой принцип обработки, который основан на требовании минимизировать протяженность данных. Учитывая физический смысл независимой переменной, понятие «протяженность» интерпретируется поразному: как длительность временных сигналов [12], как пространственная протяженность [13] или просто протяженность [14] одномерных пространственных сигналов и их спектров, как площадь, объем и т.д. многомерных сигналов и изображений [3]. Для решения практических задач понятие «протяженность» задано нестрогой формулировкой, которую для общего случая отражает стоимостная функция (2). Ниже данный принцип применяется к решению задачи гауссовой декомпозиции.

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Далее рассмотрим только задачу (5) по следующим причинам: 1) простота записи из-за отсутствия свободного параметра β ; 2) возможность указать на некорректность алгоритма, построенного в [11]; 3) рассмотрение задачи (4) выполняется аналогично.

Так как в общем случае количество гауссиан неизвестно, то для решения задачи (5) в качестве прототипа используем подход Гольцмана Ф. М. [15]. Он заключается в последовательном наращивании порядка используемой модели (в данном случае, количества гауссиан) с проверкой качества получаемых результатов и принятием решения о продолжении или об останове процесса наращивания. Здесь этот подход модифицируется относительно критерия обработки данных, методов определения неизвестных параметров с выбором их начальных значений, а также правила останова.

Фактически, подход в [15] основан на критерии наименьших квадратов и предположении, что шум имеет

нормальный закон распределения с известной дисперсией. Поэтому этот подход невозможно применить, например, к шуму Коши, так как дисперсия шума Коши равна бесконечности в силу расходимости соответствующего интеграла (не путать дисперсию с параметром масштаба шума Коши!). Для устранения этого недостатка далее используем критерий минимума протяженности, согласно которому требуется минимизировать не энергию, а *протяженность* результирующей последовательности данных. Тогда можно предположить, что «декомпозиция» (decomposer) суммы гауссиан, который будет работать по алгоритму наращивания порядка модели, вначале будет выделять самую протяженную гауссиану (точнее, самый протяженный кусок одной из гауссиан), затем гауссиану с меньшей протяженностью и т.д. Поскольку импульсы (выбросы) шума можно считать крайним случаем гауссианы с нулевой протяженностью, то правило останова процесса наращивания порядка модели можно связать с параметром полуширины гауссианы, которая была построена последней. Это правило для дискретного случая можно сформулировать так: останов процесса наращивания порядка модели выполняется тогда, когда после исключения из рассмотрения всех гауссиан с малой полушириной невозможно построить ни одной гауссианы с большей полушириной. Таким образом, правило останова состоит в сравнении полуширины последней построенной гауссианы с заданным порогом полуширины, который для случая наличия одиночных выбросов можно выбрать равным $\Delta x / 2$. Для существенного уменьшения вероятности построения ложной гауссианы из-за появления двух выбросов подряд в одну сторону, правило останова можно усилить, полагая порог полуширины равным не $\Delta x / 2$, а Δx или еще большей величине. Отметим, что указанное правило оказалось результативным не только для шума Коши, но и для шума Гаусса. Однако для случая отсутствия шума оно является пассивным.

Рассмотрим два возможных подхода к определению значений неизвестных параметров одиночной гауссианы на основе задачи (5). Полагая $p = 1$, из (5) имеем

$$\arg \min_{A, m, \sigma} \left\{ \sum_{i=1}^N \ln \left(1 + |g_i - A e^{-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}}|^q / \alpha^q \right) \right\}. \quad (6)$$

Для удобства обозначим $\gamma = 1/(2\sigma^2)$ и перепишем (6) в виде

$$\arg \min_{A, m, \gamma} \left\{ \sum_{i=1}^N \ln \left(1 + |g_i - A e^{-\gamma(x_i - m)^2}|^q / \alpha^q \right) \right\}. \quad (7)$$

Первый подход к решению задачи (7) основан на методе итераций, который применяется к системе нелинейных уравнений, получаемой из необходимого условия минимума целевой функции в (7). Вычисляя первые производные и формально учитывая $\partial / \partial x(|x|^q) = q|x|^{q-1} \operatorname{sgn}(x)$, из (7) получаем систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \theta(x_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^N \theta(x_i)(x_i - m) &= 0; \\ \sum_{i=1}^N \theta(x_i)(x_i - m)^2 &= 0; \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\theta(x) = \left(1 + |r(x)|^q / \alpha^q \right)^{-1} |r(x)|^{q-1} \operatorname{sgn}[r(x)] e^{-\gamma(x-m)^2}$$

и $r(x) = g(x) - A e^{-\gamma(x-m)^2}$. Если далее использовать соотношение $|x|^{q-1} \operatorname{sgn}(x) = x|x|^{q-2}$ и метод неподвижной точки (fixed-point algorithm), то можно построить такие рекурсии для неизвестных параметров:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^N \phi(x_i) g(x_i) / \sum_{i=1}^N \phi(x_i) e^{-\gamma(x_i - m)^2}; \\ m &= \sum_{i=1}^N x_i \phi(x_i) r(x_i) / \sum_{i=1}^N \phi(x_i) r(x_i); \\ \gamma &= -\frac{1}{m^2} \ln \left[\sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 \phi(x_i) g(x_i) / \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 \phi(x_i) A e^{-\gamma(x_i^2 - 2x_i m)} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где $\phi(x) = \left(1 + |r(x)|^q / \alpha^q \right)^{-1} |r(x)|^{q-2} e^{-\gamma(x-m)^2}$ и где правая часть равенств вычисляется для предыдущих значений параметров A , m и γ , а слева записаны вычисляемые текущие значения параметров. Рекурсии (9) продолжают до стабилизации получаемых значений A , m и γ . Отметим, что по такой же схеме в [11] построен алгоритм совместного оценивания параметров сдвига, масштаба и тяжести хвостов импульсного шума с законом обобщенного распределения Коши.

К сожалению, применение описанного подхода является ограниченным по двум причинам. Во-первых, необходимое условие минимума не является достаточным. Например, непрерывная функция $|x|$ имеет минимум в точке $x = 0$, однако ее первая производная в точке $x = 0$ не только не равна нулю, а просто не существует, так как она терпит разрыв со значения -1 на $+1$. Непрерывная функция $|x|^q$; $0 < q < 1$ также достигает минимум в точке $x = 0$, однако и ее первая производная в точке $x = 0$ не существует, так как терпит «бесконечный» разрыв, меняясь скачком со значения $-\infty$ на $+\infty$. Поэтому описанный подход не будет работать в случае, когда локальный (глобальный) минимум не является строго выпуклым, т.е. когда $0 < q \leq 1$. Во-вторых, из-за способа организации рекурсии (9) данный подход не будет работать и

в случае $1 < q < 2$, так как каждая из формул (9) содержит дробь, в которой и числитель, и знаменатель могут одновременно обращаться в бесконечность, формируя при вычислениях неопределенность вида ∞/∞ и приводя к сбою. Такой сбой обязательно произойдет в том случае, если хотя бы в одной точке x_i значение функции $r(x)$, которая задает невязку модели и данных, будет равно нулю. Здесь возникает парадоксальная ситуация, когда алгоритм подгонки модельной кривой к данным работает тем нестабильнее, чем точнее модельная кривая соответствует данным. В частности, если данные искажены шумом Коши с параметром масштаба ν , а ε есть граница точности по представлению самого малого числа, то вероятность того, что шум примет «нулевое» значение (т.е. значение внутри интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$, которое равносильно нулю), равна $(2/\pi)\arctg(\varepsilon/\nu)$. Отсюда видно, что при уменьшении масштаба ν шума Коши вероятность сбоя действительно повышается, т.е. чем меньше шум, тем вероятнее сбой. Однако эта проблема не возникает тогда, когда $q \geq 2$. Таким образом, неравенство $q \geq 2$ определяет область применимости первого подхода и, в частности, алгоритма в [11].

Второй подход основан на минимизации функционала протяженности с помощью метода прямого пассивного поиска, в котором пробные точки выбираются из условия равенства нулю невязки в этих точках, а именно из условия

$$g_i - Ae^{-\gamma(x_i-m)^2} = 0; \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Таким способом можно построить не больше N пробных точек для каждого параметра, среди которых необходимо выбрать ту точку, которая дает наименьшее значение целевой функции в (7). Далее рассмотрим построение пробных точек более детально.

Из (10) непосредственно следует набор пробных точек для определения значения амплитуды гауссианы, а именно

$$A_i = g_i e^{\gamma(x_i-m)^2}; \quad i = 1, \dots, N, \quad (11)$$

где параметры m и γ считаются фиксированными. Набор пробных точек, получаемый из (10) для определения значения положения гауссианы, имеет вид

$$m_i = x_i - \sqrt{|\ln(g_i/A)|/\gamma} = x_i - \sigma\sqrt{2|\ln(g_i/A)|}; \quad i = 1, \dots, N, \quad (12)$$

где $0 < g_i/A \leq 1$, а фиксированными считаются параметры A и γ . Подчеркнем, что указанное здесь неравенство позволяет отсеять выбросы, знак которых совпадает со знаком амплитуды, а также те элементы данных, знак которых противоположен знаку амплитуды. Наконец, набор пробных точек, получаемый из (10) для определения значения полуширины гауссианы, имеет вид

$$\sigma_i = 1/\sqrt{2\gamma_i} = |x_i - m|/\sqrt{2|\ln(g_i/A)|}; \quad x_i \neq m; \quad i = 1, \dots, N, \quad (13)$$

где $0 < g_i/A < 1$, а фиксированными считаются параметры A и m . В отличие от (12), здесь используется неравен-

ство со строгой правой частью. Это обусловлено: 1) требованием $x_i \neq m$; 2) предположением, что случай $\sigma = \infty$, когда гауссиана превращается в константу, исследуется отдельно, например, на самом первом этапе вычислений. С целью уменьшения количества требуемых вычислений каждый из наборов пробных точек (11)–(13) можно уменьшить путем отбрасывания заведомо непригодных значений. Алгоритмически использование любого набора пробных точек должно быть таким: сначала в качестве наилучшего значения текущего параметра фиксируется предыдущее значение этого параметра, а затем выполняется его сравнение с другими возможными значениями, получаемыми из соответствующего набора (11), (12) или (13). На самом первом шаге вычислений предыдущими значениями параметров должны быть их начальные значения.

Удачный выбор начальных значений параметров гауссианы является предпосылкой успешного решения задачи (7). Предлагаемый способ выбора начальных значений параметров гауссианы заключается в том, чтобы поочередно испытать все возможные элементы исходных данных в качестве таких, которые задают положение и амплитуду гауссианы, а третий параметр – полуширину – рассчитать путем решения задачи минимизации для набора (13). Эти вычисления для каждого элемента данных необходимо предварить установкой значения полуширины в бесконечность и вычислением соответствующего значения целевой функции в (7), а завершить сравнением всех полученных значений целевой функции с целью выбора той тройки значений параметров A , m и σ , для которых целевая функция принимает наименьшее значение.

Алгоритм наращивания порядка модели имеет следующий вид. Вначале полагаем $P=1$, вычисляем A_1, m_1, σ_1 и проверяем условие останова вычислений. Если оно выполняется, то делаем вывод: « $P=0$ » и завершаем вычисления. Иначе наращиваем порядок модели, полагая $P=2$. Далее фиксируем A_1, m_1, σ_1 , вычисляем A_2, m_2, σ_2 и проверяем условие останова. Если оно выполняется, то делаем вывод: « $P=1$ » и завершаем вычисления. Иначе, фиксируя A_2, m_2, σ_2 , уточняем A_1, m_1, σ_1 . Затем фиксируем A_1, m_1, σ_1 и уточняем A_2, m_2, σ_2 . Далее фиксируем A_2, m_2, σ_2 и уточняем A_1, m_1, σ_1 и т.д. до стабилизации значения целевой функции в (5). После этого опять наращиваем порядок модели на единицу, вычисляем значения новой тройки параметров, проверяем условие останова и, в случае продолжения вычислений, уточняем полученные значения параметров. И так далее. Процесс наращивания P прекращается по выполнению условия останова.

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для демонстрации возможностей предложенного подхода было выполнено числовое моделирование задач подгонки одиночной гауссовой кривой и декомпозиции суммы пяти гауссиан. Результаты этого моделирования сравнивались с результатами работы MATLAB-функции *fit()* при задании типовой модели ‘gauss1’ (для задачи подгонки) и ‘gauss5’ (для задачи декомпозиции) и

опцій 'Method'='NonlinearLeastSquares' и 'Robust'='LAR'. Генерация шума Коши выполнялась по формуле: $\zeta = v \cdot \text{tg}[\pi(\xi - 0,5)]$, где ζ – случайная величина, которая распределена по закону Коши, ξ – случайная величина, которая распределена по равномерному закону в открытом интервале (0, 1) и которая генерировалась MATLAB-функцией *rand()*, v – параметр масштаба шума Коши. Для генерации шума Гаусса использовалась функция *randn()*. Моделирование выполнялось для $N = 500$ и $\Delta x = 1$.

Для задачи подгонки исходная последовательность данных была образована одиночной гауссовой кривой (1) с параметрами $A = 1$, $m = 200\Delta x$, $\sigma = 16\Delta x$. Эта последовательность искажалась шумом Коши с нулевым параметром сдвига и параметром масштаба $v = 0,1$. Для набора статистики была выполнена генерация 100 различных реализаций шума Коши. При числовом решении этой задачи априорно считалось, что $P = 1$.

Для задачи декомпозиции исходная последовательность данных была образована суммой пяти гауссовых функций с параметрами $A_1 = 1$, $m_1 = 140\Delta x$, $\sigma_1 = 16\Delta x$; $A_2 = 0,5$, $m_2 = 180\Delta x$, $\sigma_2 = 64\Delta x$; $A_3 = 1,25$, $m_3 = 200\Delta x$,

$\sigma_3 = 10\Delta x$; $A_4 = 0,5$, $m_4 = 300\Delta x$, $\sigma_4 = 16\Delta x$; $A_5 = 1$, $m_5 = 320\Delta x$, $\sigma_5 = 5\Delta x$. Моделировались три случая, когда эта последовательность данных не искажалась шумом, искажалась шумом Гаусса (математическое ожидание равно нулю; стандартное отклонение равно 0,1) и искажалась шумом Коши (параметр сдвига равен нулю; параметр масштаба равен 0,1). При числовом решении задачи декомпозиции для случая отсутствия шума априорно полагалось $P = 5$, а для случаев наличия шума Гаусса и шума Коши считалось, что значение P априорно неизвестно, но будет определено после останова процесса наращивания порядка модели. При моделировании этот останов выполнялся тогда, когда полуширина последней построенной гауссианы оказывалась меньше величины Δx , что для случаев наличия шума практически происходило при увеличении значения $P = 5$ на единицу. При использовании MATLAB-функции *fit()* для всех трех случаев априорно считалось, что $P = 5$.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты числового моделирования задачи подгонки одиночной гауссовой кривой и ее решения на основе критерия минимума протяженности для случая, когда данные искажены шумом Коши, представлены на рис. 1 и рис. 2.

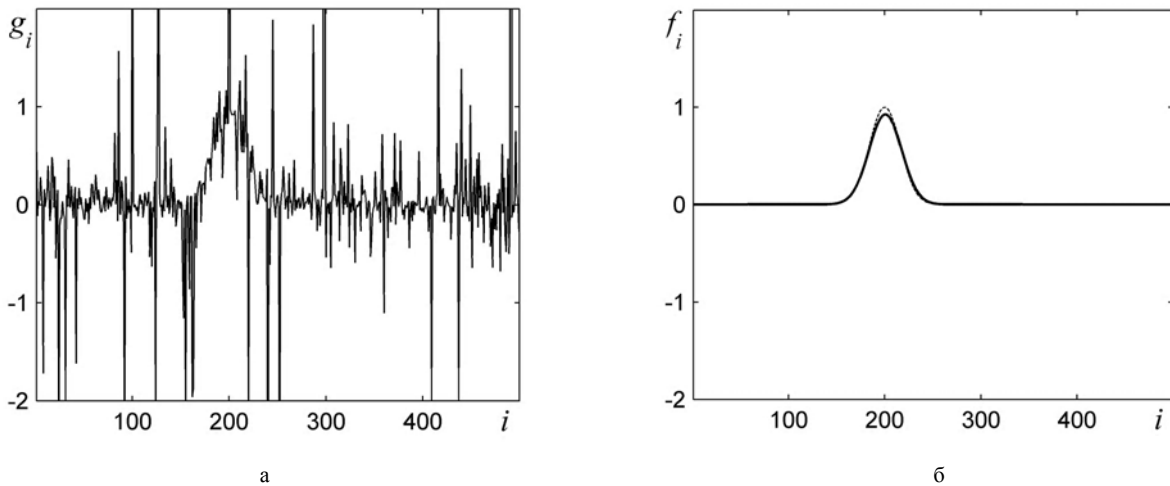


Рисунок 1 – Подгонка одиночной гауссовой кривой под данные, искаженные шумом Коши: а – исходные данные; б – результат подгонки на основе критерия минимума протяженности

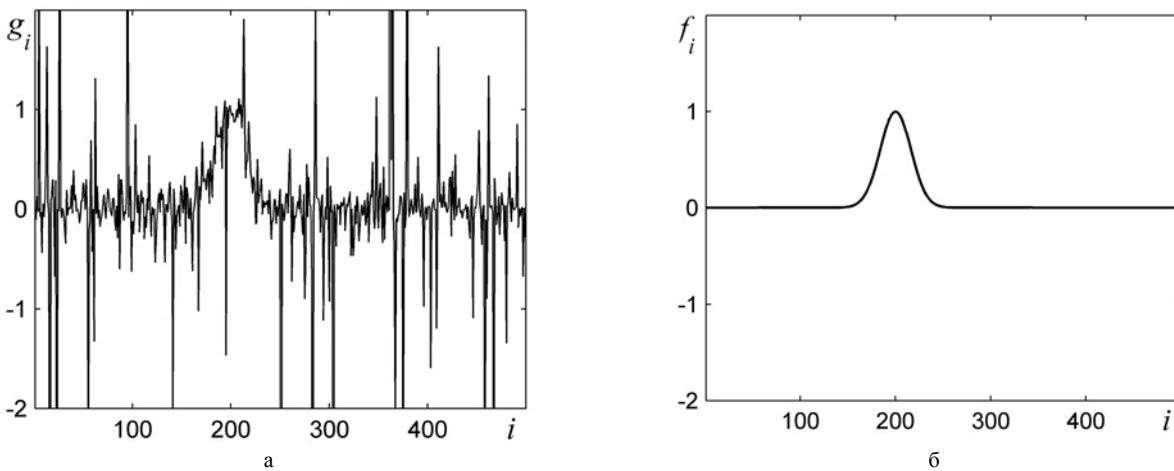


Рисунок 2 – Арифметическое усреднение по 100 случайным реализациям: а – исходных данных, искаженных шумом Коши; б – результатов подгонки

На рис. 1а приведена исходная последовательность данных, а на рис. 1б – модель гауссианы (пунктирная линия) и результат обработки (сплошная линия), который получен путем решения задачи (7) для $q = 2$ и $\alpha = v$. Видно, что сплошная линия почти полностью накрыла пунктирную линию, за исключением окрестности точки $i = 200$. На рис. 2а приведен результат арифметического усреднения исходных данных по 100 реализациям шума Коши, который демонстрирует бесполезность такого усреднения (теоретически, арифметическое усреднение не меняет ни природу, ни параметры шума Коши). На рис. 2б приведен график арифметического усреднения результатов подгонки, который визуально полностью совпал с графиком модели.

Результаты работы MATLAB-функции `fit()` для решения этой задачи здесь не иллюстрируются, но они показали следующее. Только малое число (около 10) из 100 реализаций зашумленной последовательности данных обрабатывалось визуально верно. Обработка остальных реализаций приводила к существенным ошибкам, так как за полезную гауссиану принимался выброс импульсного шума большой амплитуды. Однако в отличие от упомянутого выше примера, при этих вычислениях программный сбой не происходил.

Результаты числового моделирования задачи декомпозиции приведены на рис. 3.

На рис. 3а, рис. 3г и рис. 3ж отображена исходная последовательность данных при отсутствии шума, при наличии шума Гаусса и при наличии шума Коши, соот-

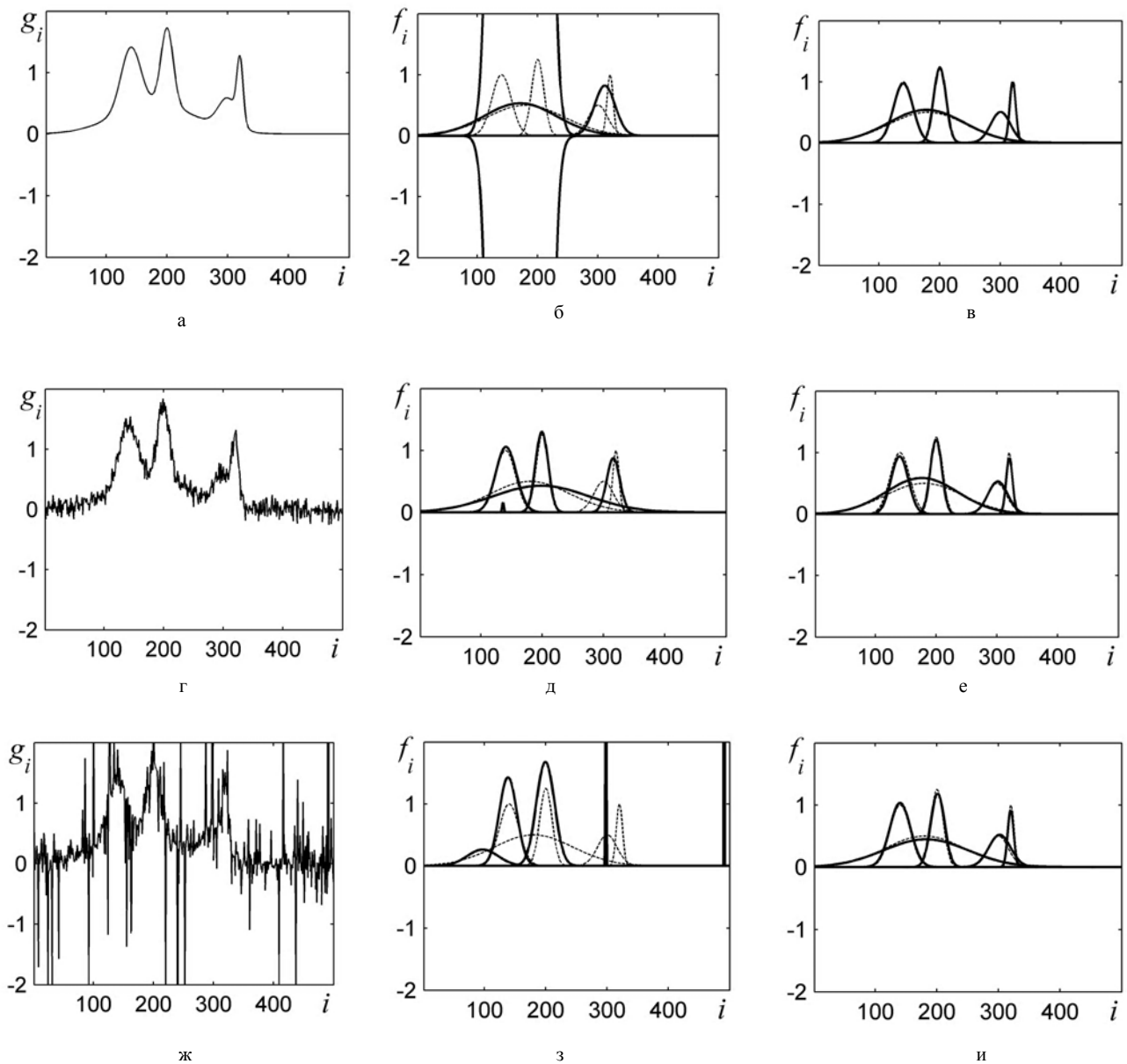


Рисунок 3 – Декомпозиция суммы пяти гауссовых кривых. Исходная последовательность при: а – отсутствии шума, г – наличии шума Гаусса, ж – наличии шума Коши. Результаты декомпозиции на основе функции `fit()`: б – а, д – г, з – ж. Результаты декомпозиции на основе критерия минимума протяженности: в – а, е – г, и – ж

ветственно. На рис. 3б, рис. 3д и рис. 3з отобраны истинные гауссианы (пунктирные линии) и результат декомпозиции (сплошные линии), который получен с помощью функции $\text{fit}()$ при использовании типовой модели 'gauss5'. Видно, что графики функций, которые описывают результат декомпозиции, редко совпадают с графиками функций, которые описывают истинные гауссианы. На рис. 3в, рис. 3е и рис. 3 и также отобраны истинные гауссианы (пунктирные линии) и результат декомпозиции (сплошные линии), который получен с помощью числового решения задачи (5) на основе алгоритма наращивания порядка модели при $q = 2$ для $\alpha = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-1}$ и $\alpha = 10^{-1}$, соответственно. Здесь налицо практически полное совпадение всех графиков результата декомпозиции с графиками истинных гауссиан.

6 ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты числового моделирования задачи подгонки одиночной гауссовой кривой для случая, когда данные искажены импульсным шумом Коши, демонстрируют высокое качество и устойчивость работы предложенного подхода.

Результаты числового моделирования задачи декомпозиции для суммы пяти гауссовых функций демонстрируют плохое качество работы стандартной функции $\text{fit}()$ не только для случаев наличия шума, но и для случая его отсутствия. Последнее обусловлено тем, что в заданной сумме не все гауссовы функции являются хорошо различимыми. С другой стороны, предложенный подход, который построен на основе критерия минимума протяженности, уверенно решает задачу декомпозиции для всех трех случаев.

Недостатком предложенного подхода является большой объем вычислений. Однако его можно уменьшить за счет привлечения априорных сведений об ожидаемых диапазонах и сетке значений параметров гауссовых функций.

ВЫВОДЫ

На основе критерия минимума протяженности предложен новый подход к решению задачи декомпозиции суммы гауссиан. Данный подход основан на решении задачи минимизации соответствующего функционала и реализуется с помощью метода прямого пассивного поиска, в котором пробные точки выбираются из условия равенства нулю невязки в этих точках. Результаты числового моделирования показали, что предложенный подход является эффективным инструментом декомпозиции суммы гауссовых функций как для случая отсутствия шума и их плохой различимости (отделимости друг от друга), так и при наличии обычного шума с законом распределения Гаусса и импульсного шума с законом распределения Коши.

Представленные результаты могут быть обобщены на случай суммы функций другой формы и/или с другим числом неизвестных параметров. В частности, исходной моделью для обработки может выступать сумма функций Лоренца.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках государственной научно-исследовательской темы Днепропетровского национального университета «Методы и информационные технологии цифровой обработки многоканальных данных» (номер государственной регистрации 0116U001297).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Titchmarsh E. C. The theory of functions / E. C. Titchmarsh. – New York : Oxford University Press, 1939. – 454 p.
2. Borulko V. F. Minimum-duration filtering / V. F. Borulko, S. M. Vovk // Радиоэлектроника, информатика, управління. – 2016. – № 1. – С. 7–14. DOI: 10.15588/1607-3274-2016-1-1.
3. Vovk S. M. Statement of a problem of definition of linear signals parameters in quasinormed space / S. M. Vovk, V. F. Borul'ko // Radioelectronics and Communications Systems. – 2010. – Vol. 53. – P. 367–375.
4. Goshtasby A. Curve fitting by a sum of Gaussians / A. Goshtasby, W. D. O'Neill // Graphical Models and Image Processing. – 1994. – Vol. 56, No. 4. – P. 281–288.
5. Lindner R. R. Autonomous Gaussian decomposition / [R. R. Lindner, C. Vera-Ciro, C. E. Murray, S. Stanimirovic, B. L. Babler, C. Heiles, P. Hennebelle, W. M. Goss, J. Dickey // The Astronomical Journal. – 2015. – Vol. 149, No. 4. – P. 138–149. DOI: 10.1088/0004-6256/149/4/138.
6. Little M. A. Generalized methods and solvers for noise removal from piecewise constant signals. I. Background theory / M. A. Little, N. S. Jones // Proceedings of the Royal Society A. – 2011. – Vol. 467. – P. 3088–3114. DOI: 10.1098/rspa.2010.0671.
7. Гилат А. MATLAB. Теория и практика / А. Гилат. – М.: ДМК ПРЕСС, 2016. – 416 с.
8. Speyer J. Stochastic Estimation and Control for Linear Systems with Cauchy Noise / J. Speyer, M. Idan, J. Fernández // Advances in Estimation, Navigation, and Spacecraft Control. – 2015. – Chapter 6. – P. 95–118. DOI: 10.1007/978-3-662-44785-7_6.
9. Gonzalez J. G. Optimality of the myriad filter in practical impulsive-noise environments / J. G. Gonzalez, G. R. Arce // IEEE Trans. on Signal Processing. – 2001. – Vol. 49, No. 2. – P. 438–441. DOI: 10.1109/78.902126.
10. Aysal T. C. Meridian filtering for robust signal processing / T. C. Aysal, K. E. Barner // IEEE Trans. on Signal Processing. – 2007. – Vol. 55, No. 8. – P. 3949–3962. DOI: 10.1109/TSP.2007.894383.
11. Carrillo R. E. Generalized Cauchy distribution based robust estimation / R. E. Carrillo, T. C. Aysal, K. E. Barner // Proc. of Int. Conf. Acoustic, Speech and Signal Processing, ICASSP 2008, Las Vegas, 2008. – P. 3389–3392. DOI: 10.1109/ICASSP.2008.4518378.
12. Vovk S. M. A minimum-duration method for recovering finite signals / S. M. Vovk, V. F. Borul'ko // Radioelectronics and Communications Systems. – 1991. – Vol. 34. – P. 67–69.
13. Борулько В. Ф. Определение источников в одномерной решетке электрических диполей на основе принципа минимальной пространственной протяженности решения / В. Ф. Борулько, С. М. Вовк // Радиофизика и электроника. – 2011. – Т. 2(16), № 2. – С. 14–20.
14. Borulko V. F. Principle of minimum extent in spatial spectrum extrapolation problems of complex-valued sources / V. F. Borulko, S. M. Vovk // Telecommunications and Radio Engineering. – 2013. – Vol. 72, No. 7. – P. 581–592. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v72.i7.30.
15. Гольцман Ф. М. Физический эксперимент и статистические выводы / Ф. М. Гольцман. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. – 192 с.

Статья поступила в редакцию 09.08.2016.

После доработки 08.10.2016.

Вовк С. М.

Канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри автоматизованих систем обробки інформації Дніпропетровського національного університету, Дніпро, Україна

ДЕКОМПОЗИЦІЯ СУМИ ГАУССІАН, СПОТВОРЕНИХ ІМПУЛЬСНИМ ШУМОМ

Актуальність. Застосування традиційних методів декомпозиції суми гауссових функцій для випадку, коли початкові дані спотворені шумом імпульсного типу, приводить до значних помилок. Об'єктом даного дослідження є процес декомпозиції суми гауссових функцій в імпульсному шумовому середовищі.

Мета роботи – розробка методу декомпозиції суми гауссових функцій для випадку, коли дані спотворені шумом імпульсного типу.

Метод. Запропонований метод ґрунтується на решенні задачі безумовної мінімізації заданої цільової функції за невідомими параметрами. Постановка задачі виконана на основі критерія мінімуму протяжності, який вживається до відхилення рішення. Процес декомпозиції реалізується ітераційно шляхом послідовного виокремлення гауссових функцій з їх суми, де спочатку виокремлюється найбільш протяжна гауссова функція, потім виокремлюється менш протяжна і т.д. Для визначення значень параметрів гауссової функції описано два підходи. Перший підхід заснований на методі ітерацій, який використовується для рішення системи нелінійних рівнянь, що отримується з необхідної умови мінімуму цільової функції. Другий підхід заснований на методі прямого пасивного пошуку мінімуму цільової функції, в якому спробні точки обираються за умови, що відхил в цих точках дорівнює нулю. Зазначено, що другий підхід має більш широку область застосувань, ніж перший. На основі другого підходу побудовано ітераційний алгоритм, для якого описано спосіб вибору початкових значень параметрів гауссової функції в умовах наявності імпульсного шуму, сформульовані правила вибору найкращих значень її параметрів на кожній ітерації та приведено правило зупинки обчислень.

Результати. Моделювання задач припасування поодинокі гауссової кривої до даних та декомпозиції суми п'яти гауссових функцій для випадку, коли відповідні початкові дані спотворені шумом імпульсного типу з законом розподілу Коші, підтвердили ефективність запропонованого методу.

Висновки. Запропонований метод є ефективним інструментом декомпозиції суми гауссових функцій, спотворених шумом імпульсного типу з законом розподілу Коші. Він може бути поширений на випадок суми функцій іншої форми та інших невідомих параметрів.

Ключові слова: гауссова декомпозиція, обробка даних, протяжність.

Vovk S. M.

PhD, Associate Professor, Associate Professor of Department of Automated Systems of Information Processing, Dnipropetrovsk National University, Dnipro, Ukraine

DECOMPOSITION OF SUM OF GAUSSIANS DISTORTED BY IMPULSIVE NOISE

Context. Using of the conventional methods of Gaussian decomposition in the case, when the original data are distorted by impulsive noise, leads to considerable errors. The object of this study is the process of Gaussian decomposition in an impulsive noise environment.

Objective. The goal of this work is the development of a method of Gaussian decomposition for the case when the data are distorted by impulsive noise.

Method. The proposed method of Gaussian decomposition is based on solving the problem of unconstrained minimization the objective function by unknown parameters. The problem statement is built on the criterion of a minimum extent which is used to the solution residual. Process of Gaussian decomposition is implemented iteratively by successive selecting from the sum of Gaussian functions such a Gaussian function, which initially is the most extended, and then the one which is less extended, etc. To determine the parameter values of Gaussian function the two approaches are described. The first approach is based on the iterative method, which is used for solving the set of nonlinear equations, derived from the necessary conditions for the minimum of objective function. The second approach is based on the method of passive searching of objective function minimum, where the test points are chosen from the condition that in these points the discrepancy is zero. It is indicated that the second approach has a wider range of applicability than the first one. On the basis of the second approach, an iterative algorithm is built. The way of selecting the initial parameter values of Gaussian function under impulsive noise environment is presented. Also, the rule for choosing the best values of Gaussian parameters and the rule to stop of computing are formulated.

Results. Simulations for the problems of the single Gaussian curve fitting to data and of the Gaussian decomposition for the sum of five Gaussians in the case, when the data are distorted by Cauchy noise, confirmed the performance of the proposed method.

Conclusions. The proposed method is the efficient tool of Gaussian decomposition for the sum of Gaussians distorted by the impulsive noise with Cauchy distribution. It can be expanded to the case when the functions have other shape and other unknown parameters.

Keywords: Gaussian decomposition, data processing, extent.

REFERENCES

1. Titchmarsh E. C. The theory of functions. New York, Oxford University Press, 1939, 454 p.
2. Borulko V. F., Vovk S. M. Minimum-duration filtering, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2016, No. 1, pp. 7–14. DOI: 10.15588/1607-3274-2016-1-1.
3. Vovk S. M., Borul'ko V. F. Statement of a problem of definition of linear signals parameters in quasinormed space, *Radioelectronics and Communications Systems*, 2010, Vol. 53, pp. 367–375.
4. Goshtasby A., O'Neill W. D. Curve fitting by a sum of Gaussians, *Graphical Models and Image Processing*, 1994, Vol. 56, No. 4, pp. 281–288.
5. Lindner R. R., Vera-Ciro C., Murray C. E., Stanimirovic S., Babler B. L., Heiles C., Hennebel P., Goss W. M., Dickey J. Autonomous Gaussian decomposition, *The Astronomical Journal*, 2015, Vol. 149, No. 4, pp. 138–149. DOI: 10.1088/0004-6256/149/4/138.
6. Little M. A., Jones N. S. Generalized methods and solvers for noise removal from piecewise constant signals. I. Background theory, *Proceedings of the Royal Society A*, 2011, Vol. 467, pp. 3088–3114. DOI: 10.1098/rspa.2010.0671.
7. Gilat A. MATLAB. Teoriya i praktika. Moskva, DMK PRESS, 2016, 416 p.
8. Speyer J., Idan M., Ferrández J. Stochastic Estimation and Control for Linear Systems with Cauchy Noise, *Advances in Estimation, Navigation, and Spacecraft Control*, 2015, Chapter 6, pp. 95–118. DOI: 10.1007/978-3-662-44785-7_6.
9. Gonzalez J. G., Arce G. R. Optimality of the myriad filter in practical impulsive-noise environments, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2001, Vol. 49, No. 2, pp. 438–441. DOI: 10.1109/78.902126.
10. Aysal T. C., Barner K. E. Meridian filtering for robust signal processing, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2007, Vol. 55, No. 8, pp. 3949–3962. DOI: 10.1109/TSP.2007.894383.
11. Carrillo R. E., Aysal T. C., Barner K. E. Generalized Cauchy distribution based robust estimation, *Acoustic, Speech and Signal Processing : IEEE International Conference ICASSP 2008, Las Vegas, 31 March – 4 April 2008 : proceedings*, IEEE, 2008, pp. 3389–3392. DOI: 10.1109/ICASSP.2008.4518378.
12. Vovk S. M., Borul'ko V. F. A minimum-duration method for recovering finite signals, *Radioelectronics and Communications Systems*, 1991, Vol. 34, pp. 67–69.
13. Borulko V. F., Vovk S. M. Opredelenie istochnikov v odnomerroy reshetke elektricheskikh dipoley na osnove printsipa minimalnoy prostranstvennoy protyazhennosti resheniya, *Radiofizika i elektronika*, 2011, Vol. 2 (16), No. 2, pp. 14–20.
14. Borulko V. F., Vovk S. M. Principle of minimum extent in spatial spectrum extrapolation problems of complex-valued sources, *Telecommunications and Radio Engineering*, 2013, Vol. 72, No. 7, pp. 581–592. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v72.i7.30.
15. Goltsman F. M. Fizicheskiy eksperiment i statisticheskie vyivodyi. Leningrad, Izdatelstvo Leningradskogo Universiteta, 1982, 192 p.