

¹Д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры системного анализа и управления Национального технического университета «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина

²Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной математики и математического моделирования Национального технического университета «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина

ПОДАВЛЕНИЕ «ЭФФЕКТА ХЛЫСТА» В ЦЕПЯХ ПОСТАВОК С ПОМОЩЬЮ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ИНВАРИАНТНЫХ ЭЛЛИпсоИДОВ

Актуальность. Решена актуальная задача синтеза децентрализованного управления запасами материальных ресурсов в цепях поставок в условиях неопределенности внешнего спроса и наличия эксплуатационных ограничений.

Цель работы. Развитие метода оптимальной стабилизации локальных узлов цепей поставок с помощью линейной динамической обратной связи по отклонению между наличными и страховыми уровнями запасов ресурсов в узлах цепи, обеспечивающего подавление «эффекта хлыста», а также развитие метода анализа устойчивости децентрализованной системы управления запасами в цепях поставок.

Метод. Предложен подход на основе метода инвариантных эллипсоидов, который обеспечивает полное и своевременное удовлетворение неизвестного, но ограниченного внешнего спроса на ресурсы, стабилизацию замкнутых локальных подсистем при выполнении заданных ограничений на значения локальных состояний и управляющих воздействий, а также подавление «эффекта хлыста» в цепях поставок. С помощью метода векторных функций Ляпунова и метода сравнения установлены условия устойчивости децентрализованной системы управления запасами в цепях поставок.

Результаты. Задача синтеза управления с помощью техники линейных матричных неравенств сведена к последовательности задач полуопределенного программирования, которые решаются численно в реальном времени.

Выводы. Получил дальнейшее развитие метод субоптимального структурного и параметрического синтеза децентрализованного ограниченного управления запасами в цепях поставок, что позволяет снизить затраты, связанные с транспортированием и хранением материальных ресурсов за счет подавления «эффекта хлыста»; степень подавления указанного эффекта для различных эшелонов цепи поставок определяется выбором значений весовых матриц локальных критериев качества. Разработанные модели и алгоритмы децентрализованного управления запасами в условиях неопределенности спроса и наличия эксплуатационных ограничений внедрены на промышленных предприятиях и организациях, которые занимаются производством, хранением и распределением материальных ресурсов, в частности, КП «Харьковводоканал» - одним из крупнейших в Украине предприятий по предоставлению услуг водоснабжения и ООО Компании «СВ» (г. Харьков) – ведущем производителе средств бытовой химии в Украине.

Ключевые слова: управление запасами, эффект хлыста, децентрализованное управление, метод инвариантных эллипсоидов, линейное матричное неравенство.

НОМЕНКЛАТУРА

«+» – псевдообращение Мура-Пенроуза;

> 0 (≥ 0) – положительно определенная (полуопределенная) матрица;

$O_{n \times n}$ – нулевая матрица соответствующей размерности;

A_i – матрица динамики расширенной модели i -го узла цепи поставок;

B_i – матрица влияния управлений расширенной модели i -го узла цепи поставок;

B_{it} – матрицы влияния управлений исходной модели i -го узла цепи поставок;

C_i – матрица выходов расширенной модели i -го узла цепи поставок;

D – допустимое множество значений внешних возмущений цепи поставок;

E_i – матрица влияния возмущений исходной модели i -го узла цепи поставок;

G_i – матрица влияния возмущений расширенной модели i -го узла цепи поставок;

I_n – единичная матрица соответствующей размерности;

$J_i(k)$ – критерий качества i -го узла цепи поставок;

$K_i(k)$ – нестационарная матрица коэффициентов обратной связи i -го узла цепи поставок;

N – количество узлов цепи поставок;

N_i – размерность вектора состояний расширенной модели i -го узла цепи поставок;

$P_i(k)$ – нестационарная матрица функции Ляпунова i -го узла цепи поставок;

U_i – допустимое множество значений управлений i -го узла цепи поставок;

W_i^{ξ}, W_i^{μ} – диагональные весовые матрицы локального критерия качества;

X_i – допустимое множество значений состояний i -го узла цепи поставок;

d^{\min}, d^{\max} – векторы нижних и верхних граничных значений внешнего спроса;

$d(k)$ – вектор внешних возмущающих воздействий цепи поставок;

e_m – единичный вектор соответствующей размерности;

k – номер дискретного интервала времени;

m – среднее значение размеров заказов;

m_i – размерность вектора управляющих воздействий i -го узла цепи поставок;

n_i – размерность вектора состояний i -го узла цепи поставок;

$u_i(k)$ – вектор управляющих воздействий i -го узла цепи поставок;
 q – размерность вектора внешних возмущений цепи поставок;
 x_i^* – вектор страховых запасов ресурсов i -го узла цепи поставок;
 x_i^{\max} – вектор граничных значений состояний i -го узла цепи поставок;
 $x_i(k)$ – вектор состояний исходной модели i -го узла цепи поставок;
 $w_i(k)$ – вектор внешних возмущений i -го узла цепи поставок;
 Π_i – матрица влияния внешнего спроса на вектор состояний i -го узла цепи поставок;
 Π_{ij} – технологические матрицы i -го узла цепи поставок;
 $\Phi(k)$ – нестационарная матрица динамики линейной системы сравнения;
 Λ_i – максимальное значение интервалов запаздывания i -го узла цепи поставок;
 $\beta \in [0,1]$ – коэффициент дисконтирования;
 ε – малая положительная константа;
 $\rho_{S,C}$ – количественная мера проявления «эффекта хлыста» в цепи поставок;
 σ^2 – дисперсия значений размеров заказов;
 $v(k)$ – вектор состояний линейной системы сравнения;
 $\eta(k)$ – скалярная функция, которая является выходом линейной системы сравнения;
 $\xi_i(k)$ – вектор состояний расширенной модели i -го узла цепи поставок;
 ЛМН – линейное матричное неравенство;
 ЦП – цепь поставок.

ВВЕДЕНИЕ

Цепь поставок представляет собой интегрированный производственный процесс, включающий взаимосвязанные производственные узлы, склады и каналы распределения ресурсов, которые добывают сырье, перерабатывают его и поставляют готовую продукцию в розничную сеть либо конечным потребителям.

Для управления цепями поставок разработано множество подходов, которые используются для эффективной интеграции поставщиков, производителей, дистрибьюторов и продавцов так, чтобы продукция производилась и распределялась в нужном количестве, в нужных местах и в нужное время с целью минимизации общесистемных затрат при обеспечении заданного уровня обслуживания. Большинство публикаций по управлению ЦП посвящено разработке эвристических подходов либо методов математического программирования. Однако, в настоящее время стало понятно, что оптимизация потоков материальных ресурсов в ЦП невозможна без применения системного подхода и методологии теории автоматического управления.

Поскольку ЦП представляет собой сложный многосвязный объект, существует множество аспектов исследований в управлении ЦП. Одним из них является со-

вершенствование стратегии управления запасами с целью подавления эффекта, известного под названием «эффект хлыста».

Эффект хлыста (от англ. bullwhip effect) – явление в цепи поставок, при котором незначительные изменения спроса конечного потребителя приводят к значительным отклонениям в размерах спроса на всех уровнях цепи поставок, причем колебания спроса возрастают при движении по цепи от потребителя к производителю. Эффект хлыста приводит к возникновению либо дефицита, либо избытка материальных ресурсов. В результате повышается риск невыполнения заказов, снижается устойчивость цепи и, следовательно, уровень обслуживания клиентов. Поэтому предотвращение или сглаживание эффекта хлыста является одной из важнейших проблем в области управления ЦП.

Целью работы является синтез децентрализованного управления запасами на основе метода инвариантных эллипсоидов и дескрипторного описания системы для управления уровнями запасов ресурсов и подавления эффекта хлыста в цепи поставок.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для математического описания процесса управления запасами в цепи поставок используется дискретная модель в пространстве состояний, уравнения которой описывают изменение уровня запасов каждого вида ресурсов с течением времени. Выбирается период дискретизации по времени и считается, что все временные интервалы, необходимые для выполнения заказов в узлах ЦП и транспортировки ресурсов между узлами, известны и кратны выбранному периоду дискретизации.

Выполним декомпозицию цепи поставок S на локальные подсистемы $S_i, i = \overline{1, N}$, которые являются децентрализованными по входам. Пополнение запасов происходит с запаздыванием относительно момента формирования заказа. Поведение системы определяется уравнениями динамики подсистем S_i , каждое из которых является разностным уравнением с запаздыванием:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda_i} B_{it}u_i(k-t) + E_iw_i(k). \quad (1)$$

Вектор внешних возмущений узла $w_i(k) \in R^{n_i}$ включает функции внешнего спроса и спроса, формируемого узлами цепи, для которых узел S_i является поставщиком ресурсов:

$$w_i(k) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \Pi_{ij}u_j(k) + \Pi_id(k). \quad (2)$$

Необходимое и достаточное условие продуктивности матрицы Π_{ij} : число Фробениуса матрицы (максимальное собственное значение) должно быть меньше 1.

Предполагается, что для каждого узла ЦП заданы эксплуатационные ограничения в виде максимальных допустимых уровней запасов ресурсов. Тогда в каждый момент времени $k \geq 0$ должны выполняться ограничения:

$$\begin{aligned} x_i(k) \in X_i = \{x_i \in R^{n_i} : 0 \leq x_i \leq x_i^{\max}\}, \\ u_i(k) \in U_i = \{u_i \in R^{m_i} : 0 \leq u_i\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для моделирования неопределенности внешнего спроса используется набор интервалов, в пределах которых компоненты векторной функции $d(k)$, описывающей спрос, принимают значения произвольным образом. В результате внешние возмущения ЦП удовлетворяют ограничениям $d(k) \in D = \{d \in \mathbb{R}^q : 0 \leq d^{\min} \leq d \leq d^{\max}\}$, где векторы d^{\min} и d^{\max} считаются известными.

Для количественной оценки эффекта хлыста предложено следующее соотношение [1]:

$$\rho_{S,C} = \frac{\sigma_{\text{SUPPLIER}}^2 / m_{\text{SUPPLIER}}}{\sigma_{\text{CUSTOMER}}^2 / m_{\text{CUSTOMER}}}, \quad (4)$$

где дисперсия σ^2 и среднее значение m размеров заказов поставщика (англ.: supplier) и заказчика (англ.: customer) вычисляются за определенный период.

Для системы, состоящей из взаимосвязанных узлов, динамика которых описывается уравнениями (1), необходимо решить задачу синтеза децентрализованного управления запасами, которое для любого допустимого внешнего спроса $\forall d(k) \in D$ обеспечивает:

- 1) полное и своевременное удовлетворение спроса на ресурсы, то есть выполнение первого из ограничений (3) на значения состояний;
- 2) устойчивость замкнутой системы в целом с учетом взаимосвязей при выполнении второго из ограничений (3) на значения управляющих воздействий;
- 3) подавление эффекта хлыста в цепи поставок.

2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Анализ различных подходов к управлению запасами можно найти в работе [2] и библиографии к ней. Среди многообразия моделей выделяют два основных типа: модель критических уровней и модель периодической проверки. В первом случае предполагается непрерывный контроль за состоянием запасов и размещение заказов фиксированного размера при снижении текущих запасов до некоторых критических уровней. Второй тип модели предполагает проверку уровня запасов через равные промежутки времени и размещение заказа, размер которого определяется в соответствии с выбранной стратегией.

В работе рассматривается модель периодической проверки, а задача управления запасами сформулирована как задача подавления влияния неслучайных ограниченных внешних возмущений, методы решения которой рассмотрены в работе [3].

Одним из подходов к данной проблематике в теории автоматического управления является концепция инвариантных множеств, среди которых особо выделяются эллипсоиды вследствие их простой структуры и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова. При этом для синтеза оптимального регулятора требуется решить эквивалентную задачу поиска наименьшего по некоторому критерию инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы. В работе [3] на основе техники ЛМН устанавливается достаточное условие устойчивости замкнутой системы – это существование квадратичной функции Ляпунова, построенной на решениях системы.

После того, как были развиты вычислительные методы, основанные на идеях выпуклой оптимизации, и для их реализации разработаны соответствующие алгоритмы и программное обеспечение [4], техника ЛМН используется в качестве общего метода анализа и синтеза динамических систем как в непрерывном, так и в дискретном времени.

Вопросам изучения эффекта хлыста посвящено большое количество научных трудов (см. работу [5] и библиографию к ней). В настоящее время исследования указанного феномена заключаются в основном в описательном анализе его причин и последствий. Анализ публикаций показал, что исследователи в качестве основных причин появления эффекта хлыста выделяют практически одни и те же факторы [6], а для подавления эффекта предлагают методы, ориентированные либо на использование соответствующих менеджерских решений, либо на рациональный выбор параметров ЦП.

Однако, в последнее время появились работы, авторы которых предлагают использовать методологию теории автоматического управления для подавления эффекта хлыста. В частности, в работе [7] сравнивается применение метода прогнозирующего управления с целью уменьшения эффекта хлыста при синтезе централизованной и децентрализованной стратегии управления запасами в 4-уровневой цепи поставок. Полученные результаты свидетельствуют, что при централизованном подходе получение информации о спросе конечного потребителя всеми звеньями цепи позволяет значительно уменьшить колебания размеров заказов в ЦП. С другой стороны, применение децентрализованной структуры управления позволяет сглаживать проявление эффекта хлыста в различных эшелонах цепи поставок путем выбора соответствующих значений весовых матриц локальных показателей качества.

Однако, применение метода прогнозирующего управления предполагает наличие информации о внешнем спросе для построения его адекватной модели, в то время как на практике подобная информация, как правило, отсутствует. Кроме того, распространение информации о спросе конечного потребителя требует наличия централизованной системы сбора и передачи информации, а соответствующая задача синтеза централизованного управления характеризуется значительной вычислительной сложностью.

В результате возникает необходимость развития метода инвариантных эллипсоидов для задач децентрализованного управления запасами в цепях поставок. Предполагается, что оптимальная стабилизация локальных подсистем позволит добиться подавления эффекта хлыста в каждом из эшелонов цепи поставок, после чего необходимо решить задачу анализа устойчивости системы в целом с учетом взаимосвязей.

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Первым этапом решения задачи является преобразование модели (1) к стандартному виду без запаздывания на основе расширения вектора состояний узла путем включения в него векторов, которые определяют размеры ранее заказанных ресурсов, находящихся в процессе транспортировки и переработки:

$\xi_i(k) = [x_i^T(k), u_i^T(k-1), u_i^T(k-2), \dots, u_i^T(k-\Lambda_i)]^T$. Тогда уравнения расширенной модели узла примут вид:

$$\xi_i(k+1) = A_i \xi_i(k) + B_i u_i(k) + G_i w_i(k), \quad x_i(k) = C_i \xi_i(k),$$

где матрицы $A_i \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{N_i \times m_i}$, $G_i \in \mathbb{R}^{N_i \times n_i}$, $C_i \in \mathbb{R}^{n_i \times N_i}$, $N_i = n_i + m_i \Lambda_i$ имеют соответствующую блочную структуру.

Выполним аппроксимацию множеств значений внешних воздействий локальных узлов эллипсоидами наименьшего объема. Для определения граничных значений внешних воздействий каждого из узлов цепи на основании граничных значений внешнего спроса предложен следующий алгоритм.

$$1. \forall i = \overline{1, N}: d_i^{\min} = \Pi_i d^{\min}, \quad d_i^{\max} = \Pi_i d^{\max}.$$

$$2. \forall i = \overline{1, q}: \Pi_i^{\min} = \sum_{j=1, j \neq i}^q \Pi_{ij} d_j^{\min},$$

$$\Pi_i^{\max} = \sum_{j=1, j \neq i}^q \Pi_{ij} d_j^{\max}, \quad w_i^{\min} = d_i^{\min} + \Pi_i^{\min},$$

$$w_i^{\max} = d_i^{\max} + \Pi_i^{\max}.$$

$$3. \forall i = \overline{q+1, N}: \Pi_i^{\min} = \sum_{j=1}^{i-1} \Pi_{ij} (\Pi_j^{\min} + d_j^{\min}),$$

$$\Pi_i^{\max} = \sum_{j=1}^{i-1} \Pi_{ij} (\Pi_j^{\max} + d_j^{\max}),$$

$$w_i^{\min} = d_i^{\min} + \Pi_i^{\min}, \quad w_i^{\max} = d_i^{\max} + \Pi_i^{\max}. \quad (4)$$

Тогда значения страховых запасов узла S_i вычисляются по формуле $x_i^* = (\Lambda_i + 1)w_i^{\max}$, а множество значений внешних воздействий узла аппроксимируется эллипсоидом:

$$E_i^w(w_i^*, Q_{w_i}) = \{w_i \in \mathbb{R}^{n_i} : (w_i(k) - w_i^*)^T Q_{w_i}^{-1} (w_i(k) - w_i^*) \leq 1\}, \quad (5)$$

параметры которого $Q_{w_i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ и $w_i^* \in \mathbb{R}^{n_i}$ определяются в соответствии с выражениями:

$$Q_{w_i} = \hat{W}_i^{-2}, \quad w_i^* = \hat{W}_i^{-1} \hat{z}_i, \quad (6)$$

где \hat{W}_i, \hat{z}_i – решение задачи полуопределенного программирования $-\lg \det W_i \rightarrow \min$ при ограничениях на матричную $W_i = W_i^T \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ и векторную $z_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ переменные:

$$W_i \succ 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & (W_i w_i - z_i)^T \\ W_i w_i - z_i & I_{n_i} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, 2^{n_i}},$$

где $w_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ – векторы, компоненты которых содержат координаты вершин многогранника, определяющего допустимое множество значений внешних воздействий узла S_i .

Также выполняется аппроксимация множества X_i эллипсоидом наименьшего объема

$$E_i^x(x_i^*, Q_{x_i}) = \{x_i \in \mathbb{R}^{n_i} : (x_i(k) - x_i^*)^T Q_{x_i}^{-1} (x_i(k) - x_i^*) \leq 1\}, \quad (7)$$

у которого вектор координат центра совпадает с вектором страховых запасов x_i^* , а матрица вычисляется в результате решения задачи полуопределенного программирования $\text{tr } Q_{x_i} \rightarrow \min$ при ограничениях на матричную переменную $Q_{x_i} = Q_{x_i}^T \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$:

$$Q_{x_i} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & (x_i - x_i^*)^T \\ x_i - x_i^* & Q_{x_i} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, 2^{n_i}},$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ – векторы, которые содержат координаты вершин многогранника X_i .

Локальный критерий качества в случае бесконечного временного горизонта выбран в виде:

$$J_i(k) = \sum_{t=k}^{\infty} \beta^t \left((\xi_i(t) - \xi_i^*)^T W_i^{\xi} (\xi_i(t) - \xi_i^*) + u_i^T(t) W_i^u u_i(t) \right), \quad (8)$$

где ξ_i^* – вектор, составленный из $(\Lambda_i + 1)$ векторов x_i^* .

Необходимыми и достаточными условиями разрешимости задачи синтеза управления запасами в цепи поставок являются: 1) управляемость всех пар матриц (A_i, B_i) , $i = \overline{1, N}$; 2) условие достаточности ресурсов управления (см. [8]).

Традиционным средством защиты от неопределенности спроса является создание страховых запасов. Закон управления строится в виде линейной динамической обратной связи по сигналу невязки между наличными и страховыми уровнями запасов ресурсов:

$$u_i(k) = K_i(k) (\xi_i(k) - \xi_i^*). \quad (9)$$

Тогда расширенная модель замкнутой локальной подсистемы с учетом (9) примет вид:

$$\begin{aligned} \xi_i(k+1) &= A_i^f(k) (\xi_i(k) - \xi_i^*) + A_i \xi_i^* + G_i w_i(k), \\ x_i(k) &= C_i \xi_i(k), \quad A_i^f(k) = A_i + B_i K_i(k). \end{aligned} \quad (10)$$

Задача отыскания управления, минимизирующего квадратичный критерий качества, является одной из основных в теории управления. В данной работе для ее решения применяется метод инвариантных эллипсоидов. Эллипсоид, описываемый уравнением

$$E_i(\xi_i^*, Q_i(k)) = \{\xi_i \in \mathbb{R}^{N_i} : (\xi_i(k) - \xi_i^*)^T Q_i^{-1}(k) (\xi_i(k) - \xi_i^*) \leq 1\}, \quad (11)$$

где $Q_i(k) \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$ – матрица эллипсоида, ξ_i^* – вектор, компоненты которого определяют координаты центра эллипсоида, называется инвариантным по состоянию для системы (10), если любая траектория системы, начавшись в эллипсоиде, остается в нем для любого момента времени $k \geq 0$.

Воспользуемся подходом, который основан на достаточных условиях устойчивости и заключается в построении функции Ляпунова для замкнутой системы. Определим квадратичную функцию Ляпунова, построенную на решениях системы (10), в виде:

$$V_i(\xi_i(k) - \xi_i^*) = (\xi_i(k) - \xi_i^*)^T P_i(k) (\xi_i(k) - \xi_i^*)$$

$$P_i(k) = P_i^T(k) \succ 0. \quad (12)$$

Сравнение выражений (11) и (12) позволяет утверждать, что при выполнении равенства $P_i(k) = Q_i^{-1}(k)$ инвариантный эллипсоид (11) представляет множество, которое находится внутри поверхности уровня функции Ляпунова (12). Таким образом, задача стабилизации подсистемы заключается в построении регулятора, который обеспечивает минимизацию по некоторому критерию инвариантного эллипсоида замкнутой подсистемы при заданных ограничениях. В качестве критерия выбрана сумма квадратов полуосей эллипсоида, то есть след его матрицы $Q_i(k)$.

Вычислим первую разность по k функции Ляпунова (12) и потребуем, чтобы значение функции с течением времени убывало с некоторой гарантированной скоростью, которая определяется значением показателя качества (8):

$$V_i(\xi_i(k+1) - \xi_i^*) - V_i(\xi_i(k) - \xi_i^*) \leq$$

$$\leq - \left((\xi_i(k) - \xi_i^*)^T W_i^\xi (\xi_i(k) - \xi_i^*) + u_i^T(k) W_i^u u_i(k) \right). \quad (13)$$

Просуммируем по k от 0 до ∞ левые и правые части неравенства типа Ляпунова (13) и получим оценку

$$\max_{d(k) \in D} J_i(k) \leq V_i(\xi_i(0) - \xi_i^*). \text{ Тогда управляющие воздействия необходимо искать из условия минимизации функции Ляпунова } u_i(k) = \arg \min_{u_i(k) \in U_i} V_i(\xi_i(0) - \xi_i^*).$$

В итоге, решая задачу минимизации инвариантного эллипсоида замкнутой подсистемы по критерию следа матрицы при ограничении, задаваемом неравенством типа Ляпунова (13), приходим к регулятору, который обеспечивает минимизацию верхнего граничного значения показателя качества (8) при любом допустимом внешнем возмущении, а также устойчивость замкнутой подсистемы. Такой подход позволяет свести задачу синтеза ограниченного децентрализованного управления запасами к решению задачи полуопределенного программирования.

В силу неушербности S -процедуры при одном ограничении [3] выполнение неравенств (5) и (13), которые представлены в виде квадратичных форм относительно вектора

$$s_i(k) = \left[(\xi_i(k) - \xi_i^*)^T, \xi_i^{*T}, w_i^{*T}, (w_i(k) - w_i^*)^T \right]^T, \text{ эквивалентно выполнению для некоторого скаляра } \alpha_i(k) > 0 \text{ совокупности ЛМН:}$$

$$Q_i(k) \succ 0, \begin{bmatrix} Q_i(k) & O_{N_i \times N_i} & O_{N_i \times n_i} & (A_i Q_i(k) + B_i Y_i(k))^T & O_{N_i \times n_i} & Q_i(k) W_i^\xi & Y_i^T(k) W_i^u \\ O_{N_i \times N_i} & O_{N_i \times N_i} & O_{N_i \times n_i} & (A_i - I_{N_i})^T & O_{N_i \times n_i} & O_{N_i \times N_i} & O_{N_i \times m_i} \\ O_{n_i \times N_i} & O_{n_i \times N_i} & O_{n_i \times n_i} & G_i^T & O_{n_i \times n_i} & O_{n_i \times N_i} & O_{n_i \times m_i} \\ A_i Q_i(k) + B_i Y_i(k) & A_i - I_{N_i} & G_i & Q_i(k) & G_i Q_{w_i}^{1/2} & O_{N_i \times N_i} & O_{N_i \times m_i} \\ O_{n_i \times N_i} & O_{n_i \times N_i} & O_{n_i \times n_i} & Q_{w_i}^{1/2} G_i^T & \alpha_i(k) I_{n_i} & O_{n_i \times N_i} & O_{n_i \times m_i} \\ W_i^\xi Q_i(k) & O_{N_i \times N_i} & O_{N_i \times n_i} & O_{N_i \times N_i} & O_{N_i \times n_i} & W_i^\xi & O_{N_i \times m_i} \\ W_i^u Y_i(k) & O_{m_i \times N_i} & O_{m_i \times n_i} & O_{m_i \times N_i} & O_{m_i \times n_i} & O_{m_i \times N_i} & W_i^u \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (14)$$

где $Y_i(k) = K_i(k) Q_i(k)$.

Ограничения (3) с помощью модификации леммы Шура для нестрогих матричных неравенств представлены в виде совокупности ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Q_{x_i} & C_i Q_i(k) \\ Q_i(k) C_i^T & Q_i(k) \end{bmatrix} \succeq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon e_{m_i} (\xi_i(k) - \xi_i^*)^T Y_i^T(k) & Y_i(k) \\ Y_i^T(k) & Q_i(k) \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (15)$$

Наличие второго из ЛМН (15) приводит к закону управления в виде динамической обратной связи, поскольку

матрица неравенства зависит от текущего значения вектора состояний $\xi_i(k)$.

Тогда результат решения задачи синтеза децентрализованного управления запасами в цепи поставок на основе метода инвариантных эллипсоидов представлен в виде теоремы.

Теорема. Если для системы (10) с ограничениями (3) матрицы $\hat{Q}_i(k)$ и $\hat{Y}_i(k)$ получены в результате решения оптимизационной задачи

$$\text{tr } Q_i(k) \rightarrow \min \quad (16)$$

при ограничениях (14), (15) на матричные переменные $Q_i(k) = Q_i^T(k) \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$, $Y_i(k) \in \mathbb{R}^{m_i \times N_i}$ и скалярный параметр $\alpha_i(k) > 0$, то:

1) для любого начального состояния $\xi_i(0) = [x_i^T(0), u_i^T(-1), \dots, u_i^T(-\Lambda)]^T$, где $x_i(0) \geq x_i^*$, $u_i(k) = O_{m_i \times 1} \forall k \leq 0$ и любого внешнего возмущения $w_i(k) \in E_i^w(w_i^*, Q_{w_i})$ подсистема (10) является устойчивой при ограничениях (3);

2) среди всех линейных управлений вида (9) регулятор с матрицей

$$K_i(k) = \hat{Y}_i(k) \hat{Q}_i^{-1}(k) \quad (17)$$

доставляет минимум по критерию следа матрицы инвариантного эллипсоида замкнутой подсистемы S_i в момент времени k . Доказательство теоремы приведено в [9].

Уравнение динамики расширенной модели узла с учетом взаимосвязей (2) примет вид:

$$\xi_i(k+1) = A_i \xi_i(k) + B_i u_i(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^N B_{ij} u_j(k) + F_i d(k), \quad (18)$$

где матрицы $B_{ij} \in \mathbb{R}^{N_i \times m_j}$, $F_i \in \mathbb{R}^{N_i \times q}$ имеют блочную структуру:

$$B_{ij}^T = [\Pi_{ij} E_i \mid O_{m_j \times m_i} \mid \dots \mid O_{m_j \times m_i}],$$

$$F_i^T = [\Pi_i E_i \mid O_{q \times m_i} \mid \dots \mid O_{q \times m_i}].$$

Уравнение (18) с учетом (9) и обозначения $F_{ij}(k) = B_{ij} K_j(k)$ примет вид:

$$\xi_i(k+1) = A_i^f(k) (\xi_i(k) - \xi_i^*) + A_i \xi_i^* + \sum_{j=1, j \neq i}^N F_{ij}(k) (\xi_j(k) - \xi_j^*) + F_i d(k).$$

Для сети поставок S построим векторную функцию Ляпунова:

$$V(\xi(k) - \xi^*) = [V_1(\xi_1(k) - \xi_1^*), \dots, V_N(\xi_N(k) - \xi_N^*)]^T, \quad (19)$$

где $\xi(k) = [\xi_1^T(k), \dots, \xi_N^T(k)]^T$ и $\xi^* = [\xi_1^{*T}, \dots, \xi_N^{*T}]^T$ – составные векторы соответствующей размерности. Компонентами функции (19) являются функции Ляпунова (12) локальных подсистем. На основе векторной функции Ляпунова (19) строится модульная функция Ляпунова для управляемой сети поставок S :

$$V_0(\xi(k) - \xi^*) = \sum_{i=1}^N p_{0i} V_i(\xi_i(k) - \xi_i^*) = P_0 V(\xi(k) - \xi^*), \quad (20)$$

где $P_0 = [p_{01}, \dots, p_{0N}] \in \mathbb{R}^{1 \times N}$, $p_{0i} > 0$, $i = \overline{1, N}$.

Сопоставим набору локальных подсистем S_i , $i = \overline{1, N}$ линейную систему сравнения, обусловленную разностными уравнениями:

$$v(k+1) = \Phi(k) v(k), \quad v(0) = V(\xi(0) - \xi^*),$$

$$\eta(k) = P_0 v(k). \quad (21)$$

Квадратичные формы $V_i(A_i^f(k)(\xi_i(k) - \xi_i^*))$ и $V_i(\xi_i(k) - \xi_i^*)$ определяют пучок форм $V_i(A_i^f(k)(\xi_i(k) - \xi_i^*)) - \mu V_i(\xi_i(k) - \xi_i^*)$, где μ – некоторый параметр. Аналогично определяется пучок форм $V_j(F_{ij}(k)(\xi_j(k) - \xi_j^*)) - \mu V_j(\xi_j(k) - \xi_j^*)$. Вычисление элементов матрицы $\Phi(k)$ выполняется по характеристическим уравнениям пучков квадратичных форм:

$$\det(A_i^{fT}(k) P_i(k) A_i^f(k) - \mu_{ii} P_i(k)) = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\det(F_{ij}^T(k) P_i(k) F_{ij}(k) - \mu_{ij} P_j(k)) = 0, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad j \neq i,$$

где $[\Phi(k)]_{ij} = (\mu_{ij}^{\max})^{1/2}$; μ_{ij}^{\max} – максимальное значение корня соответствующего уравнения. В результате для векторной (19) и модульной (20) функций Ляпунова цепи поставок выполняются неравенства:

$$V(\xi(k) - \xi^*) \leq v(k), \quad V_0(\xi(k) - \xi^*) \leq \eta(k).$$

Таким образом, система сравнения (21) покомпонентно мажорирует векторную и модульную функции Ляпунова, построенные для рассматриваемой системы. В результате анализ устойчивости децентрализованной системы управления запасами в цепи поставок сводится к анализу устойчивости линейной положительной системы сравнения (21).

Если граф, представляющий модель цепи, не имеет циклов, то матрица динамики системы сравнения является нижнетреугольной. Поскольку локальные подсистемы после замыкания являются стабилизированными, то значения диагональных элементов матрицы динамики являются положительными и меньше единицы. В результате матрица $\forall k \Phi(k)$ является нильпотентной и, таким образом, система сравнения (21) является устойчивой. Следовательно, управляемая цепь поставок, которая состоит из взаимосвязанных подсистем, замкнутых локальными обратными связями с децентрализованными регуляторами (17), является устойчивой по Ляпунову.

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В качестве примера исследована 4-уровневая цепь поставок, состоящая из 4 одно-менклатурных узлов, которая изучалась в работе [6]. Определим узлы ЦП следующим образом:

{Поставщик сырья, Производственный узел, Оптовый склад, Ритейлер}.

Каждый из эшелонов цепи обозначается $i = 1, \dots, 4$. Таким образом, для модели цепи поставок, представленной на рис. 1, $i = 1$ обозначает «Ритейлера», а $i = 4$ – «Поставщика сырья».

Заданы значения интервалов времени, необходимого для транспортировки ресурсов между узлами сети: $T_{4,3} = T_{3,2} = T_{2,1} = 1$; а также технологические матрицы,

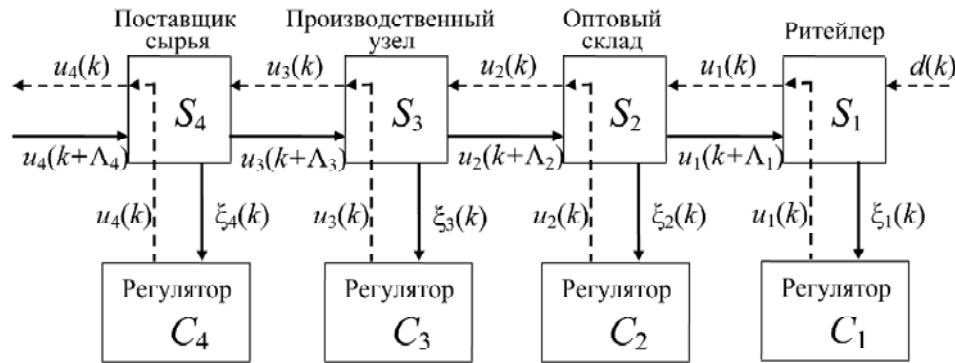


Рисунок 1 – Модель 4-уровневой цепи поставок

которые в рассматриваемом случае являются скалярами: $\Pi_{43} = \Pi_{32} = \Pi_{21} = 1$. Размерности расширенных моделей подсистем равны: $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 2$. Внешний спрос моделируется следующим образом:

$$\begin{cases} d(0) = m + e(0), \\ d(k) = r \cdot (d(k-1) - m) - \theta \cdot e(k-1) + m, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

где m – среднее значение спроса, равное 30 ед.; $r = 0,9$ – коэффициент авторегрессии; $\theta = 4$ – коэффициент скользящего среднего; $e(k), k = 0, 1, \dots$ – последовательность случайных величин, распределенных по нормальному закону. В результате граничные значения внешнего спроса равны: $d^{\min} = 18, d^{\max} = 40$.

С помощью алгоритма (4) вычислены граничные значения внешних воздействий для всех узлов ЦП, на основе которых вычислены размеры страховых запасов ресурсов в узлах цепи. В результате решения соответствующих задач полуопределенного программирования по формулам (6) определены параметры эллипсоидов (5), аппроксимирующих допустимые множества значений внешних воздействий (в рассматриваемом примере эллипсоиды вырождаются в отрезки). Также определены матрицы эллипсоидов (7), аппроксимирующих допустимые множества значений состояний каждого из узлов ЦП.

Граничные и страховые значения уровней запасов ресурсов, начальные условия, а также параметры аппроксимирующих эллипсоидов всех узлов ЦП представлены в табл. 1, где также приведены значения элементов весовых матриц локальных критериев качества (8).

Моделирование осуществлялось в течение 50 периодов. Матрицы локальных регуляторов вычислены в соответствии с (17) в результате решения последовательности задач полуопределенного программирования (16) при ограничениях (14), (15). Численное решение задач получено в среде MATLAB с помощью свободно распространяемого пакета CVX [10].

Таблица 1 – Характеристики децентрализованной системы управления запасами

Номер узла i	x_i^{\max} , ед.	x_i^* , ед.	$x_i(0)$, ед.	w_i^* , ед.	Q_i^w	Q_i^x	W_i^ξ	W_i^u
1	150	80	80	40	117	13122	0,1	0,1
2	150	80	80	40	117	13122	0,1	0,1
3	150	80	80	40	117	13122	0,1	0,1
4	150	80	80	40	117	13122	0,1	0,1

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты моделирования представлены на рис. 2, где a, b, d – значения внешнего спроса и объемов заказов; b, γ, e – значения граничного, страхового и наличного уровней запасов для узлов 1–3, соответственно. Для сравнения на графиках также показаны результаты, полученные с помощью системы децентрализованного управления, где локальные регуляторы реализуют стратегию управления с критическим уровнем запаса, которая состоит в следующем: если имеющийся уровень запаса меньше критического уровня x_i^* , то формируется заказ на пополнение запаса до этого уровня, в противном случае пополнение не происходит:

$$u_i(k) = \begin{cases} x_i^* - x_i(k), & x_i(k) < x_i^*, \\ 0, & x_i(k) \geq x_i^*. \end{cases} \quad (22)$$

6 ОБСУЖДЕНИЕ

В табл. 2 приведены результаты количественной оценки эффекта хлыста по формуле (4) при распространении заказов по цепи поставок от узла 1 к узлу 4, полученные с помощью децентрализованного управления на основе двух подходов: стратегии управления с критическим уровнем запасов (22) и метода инвариантных эллипсоидов (9), (17).

В первом случае имеет место явно выраженный эффект хлыста, что приводит к возникновению дефицита ресурсов в узлах цепи, начиная со 2-го. Построение децентрализованного управления запасами на основе метода инвариантных эллипсоидов позволяет подавить эффект хлыста, причем степень подавления для различных эшелонов ЦП можно изменять путем выбора значений весовых матриц локальных критериев качества, от которых зависят размеры инвариантных эллипсоидов замкнутых локальных подсистем. Значение показателя каче-

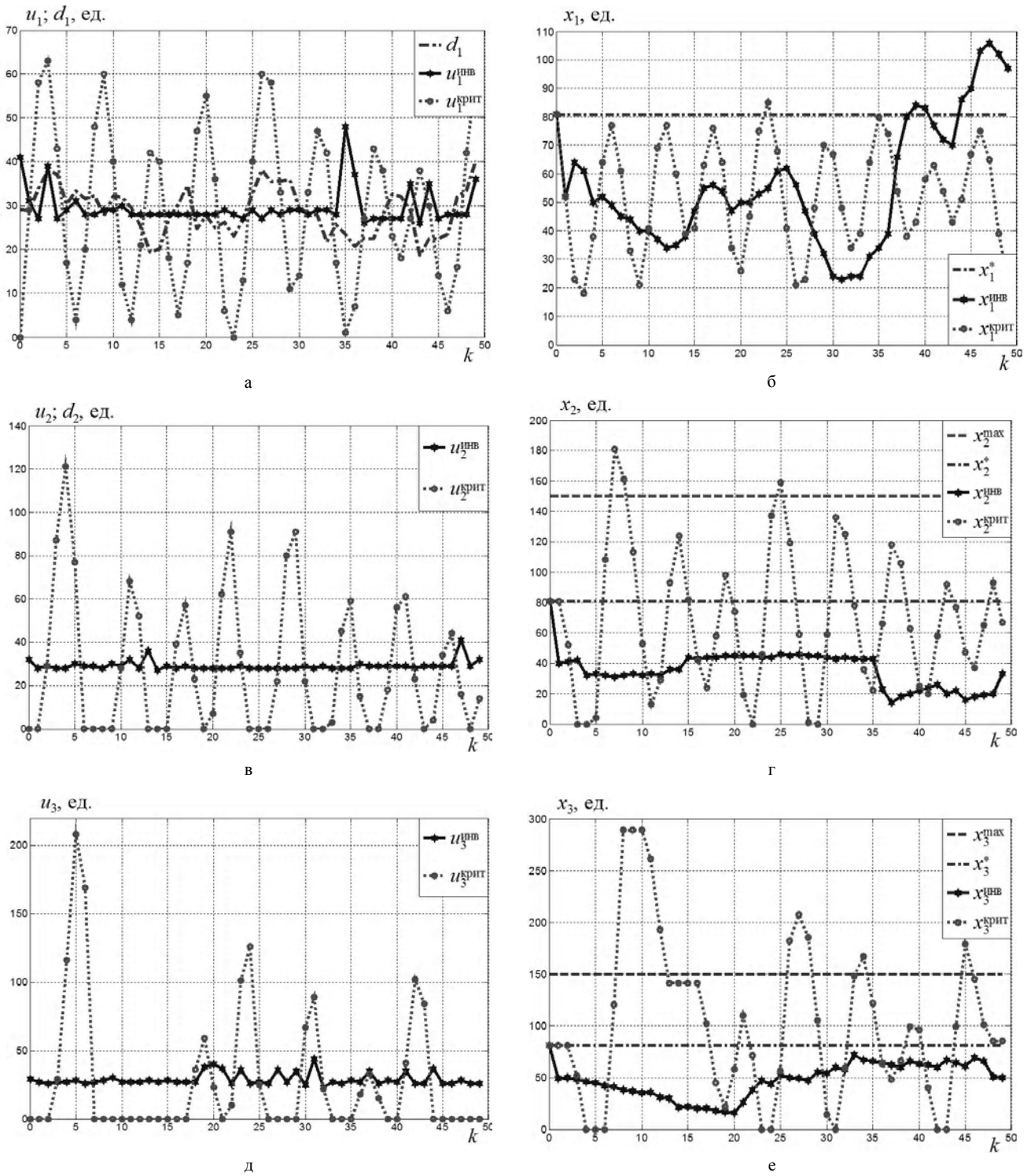


Рисунок 2 – Графики переходных процессов в цепи поставок

ства, полученное на основе предложенного подхода путем суммирования значений локальных показателей (8),

оказалось на 34,5% меньше значения, полученного для системы управления с критическим уровнем запасов.

Таблица 2 – Количественные оценки меры проявления эффекта хлыста в ЦП

Стратегия управления	$\rho_{1,2}$	$\rho_{1,3}$	$\rho_{1,4}$
С критическим уровнем	3,072	7,041	15,065
Метод инвариантных эллипсоидов	0,295	1,201	0,925

ВЫВОДЫ

В статье предложен подход к решению задачи синтеза децентрализованного ограниченного управления запасами в цепях поставок в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и наличия эксплуатационных ограничений. Локальные законы управления строятся в виде линейной динамической обратной связи по отклонению между наличными и страховыми уровнями запасов ресурсов. Предложенный подход основан на оптимальной стабилизации локальных подсистем с помощью метода инвариантных эллипсоидов. Использование техники ЛМН позволяет свести задачу синтеза управления к последовательности задач полуопределенного программирования, которые решаются численно в реальном времени. В результате: получил дальнейшее развитие метод субоптимального структурного и параметрического синтеза децентрализованного ограниченного управления запасами в цепях поставок на основе развития метода инвариантных эллипсоидов, что позволяет снизить затраты, связанные с транспортированием и хранением материальных ресурсов за счет подавления «эффекта хлыста» в цепи поставок; степень подавления указанного эффекта для различных эшелонов цепи определяется выбором значений весовых матриц локальных критериев качества; получил дальнейшее развитие метод анализа устойчивости децентрализованной системы управления запасами в цепях поставок на основе использования метода векторных функций Ляпунова и метода сравнения, что позволяет установить достаточные условия, при которых нестационарная матрица динамики линейной системы сравнения, построенной для модели децентрализованной системы управления запасами, является нильпотентной и, следовательно, управляемая цепь поставок, которая состоит из взаимосвязанных подсистем, замкнутых локальными обратными связями с децентрализованными регуляторами, является устойчивой по Ляпунову.

Разработанные модели и алгоритмы децентрализованного управления запасами внедрены на промышленных предприятиях и организациях, которые занимаются производством, хранением и распределением материальных ресурсов, в частности, КП «Харьковводоканал» – одним из крупнейших в Украине предприятий по предоставлению услуг водоснабжения и ООО Компании «СВ»

(г. Харьков) – ведущем производителе средств бытовой химии в Украине.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках госбюджетной научно-исследовательской темы Национального технического университета «Харьковский политехнический институт» «Разработка информационной технологии формирования портфелей проектов национального уровня на основе имитационной модели научно-технологического развития Украины» (номер государственной регистрации 0115U000543).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Disney S. M. The effect of vendor managed inventory dynamics on the bullwhip effect in supply chains / S. M. Disney, D. R. Towill // *Int. J. Prod. Econ.* – 2003. – Vol. 85. – P. 199–215.
2. Лотоцкий В. А. Модели и методы управления запасами / В. А. Лотоцкий, А. С. Мандель. – М.: Наука, 1991. – 188 с.
3. Поляк Б. Т. Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств / Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, П. С. Щербаков. – М.: ЛЕ-НАНД, 2014. – 560 с.
4. Чурилов А. Н. Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам / А. Н. Чурилов, А. В. Гессен. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2004. – 148 с.
5. Wang X. The bullwhip effect: progress, trends and directions / X. Wang, S. M. Disney // *Eur. J. Operat. Res.* – 2016. – Vol. 250. – P. 691–701.
6. Вохмянина А. В. Анализ влияния «эффекта хлыста» на уровень обслуживания в логистической цепи поставок / А. В. Вохмянина, М. А. Журавская, Qiao Cong // *Транспорт: наука, техника, управление.* – 2015. – № 9. – С. 38–45.
7. Fu D. Decentralized and centralized model predictive control to reduce the bullwhip effect in supply chain management / D. Fu, C. M. Ionescu, El-H. Aghezzaf, R. De Keyser // *Comput. Ind. Eng.* – 2014. – Vol. 73. – P. 21–31.
8. Blanchini F. Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays / F. Blanchini, R. Pesenti, F. Rinaldi, W. Ukovich // *IEEE Transactions on Robotics and Automation.* – 2000. – Vol. 16, No. 3. – P. 313–317.
9. Дорофеев Ю. И. Робастное управление запасами в сетях поставок в условиях неопределенности спроса и транспортных запаздываний: дис. ... доктора техн. наук: 05.13.07 / Дорофеев Юрий Иванович. – Харьков, 2016. – 284 с.
10. Grant M. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.1 / M. Grant, S. Boyd // [Electronic resource]. – Access mode: <http://cvxr.com/cvx>.

Статья поступила в редакцию 21.12.2016.
После доработки 28.12.2016.

Дорофеев Ю. И.¹, Любчик Л. М.²

¹Д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры системного анализа и управления Национального технического университета «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина

²Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедры компьютерной математики и математического моделирования Национального технического университета «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина

СТРИМАННЯ «ЕФЕКТУ ХЛИСТА» В ЛАНЦЮГАХ ПОСТАВОК ЗА ДОПОМОГОЮ ДЕЦЕНТРАЛІЗОВАНОГО КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ІНВАРІАНТНИХ ЕЛІПСОЇДІВ

Актуальність. Вирішено актуальну задачу синтезу децентралізованого керування запасами матеріальних ресурсів в ланцюгах поставок в умовах невизначеності зовнішнього попиту та наявності експлуатаційних обмежень.

Мета роботи. Розвиток методу оптимальної стабілізації локальних вузлів ланцюгів поставок за допомогою лінійного динамічного зворотного зв'язку за відхиленням між наявними і страховими рівнями запасів ресурсів у вузлах ланцюга, що забезпечує стримання «ефекту хлыста», а також розвиток методу аналізу стійкості децентралізованої системи керування запасами в ланцюгах поставок.

Метод. Запропоновано підхід на основі методу інваріантних еліпсоїдів, який забезпечує повне та своєчасне задоволення невідомого, але обмеженого зовнішнього попиту на ресурси, стабілізацію замкнених локальних підсистем при виконанні заданих обмежень на значення локальних станів і керуючих дій, а також стримання «ефекту хлыста» в ланцюгах поставок. За допомогою методу векторних

функцій Ляпунова та методу порівняння встановлено умови стійкості децентралізованої системи керування запасами в ланцюгах поставок.

Результати. Задачу синтезу керування за допомогою техніки лінійних матричних нерівностей зведено до послідовності задач напіввизначеного програмування, які розв'язуються чисельно в реальному часі.

Висновки. Отримав подальший розвиток метод субоптимального структурного і параметричного синтезу децентралізованого обмеженого керування запасами в ланцюгах поставок, що дозволяє знизити витрати, пов'язані з транспортуванням та зберіганням матеріальних ресурсів за рахунок стримання «ефекту хлиста»; ступінь стримання зазначеного ефекту для різних ешелонів ланцюга поставок визначається вибором значень вагових матриць локальних критеріїв якості. Розроблені моделі та алгоритми децентралізованого керування запасами в умовах невизначеності попиту та наявності експлуатаційних обмежень впроваджені на промислових підприємствах та організаціях, які займаються виробництвом, зберіганням і розподілом матеріальних ресурсів, зокрема, КП «Харківводоканал» – одному з найбільших в Україні підприємств з надання послуг водопостачання і ТзОВ Компанії «СВ» (м. Харків) – провідному виробнику засобів побутової хімії в Україні.

Ключові слова: керування запасами, ефект хлиста, децентралізоване керування, метод інваріантних еліпсоїдів, лінійна матрична нерівність.

Dorofiev Yu. I.¹, Lyubchik L. M.²

¹Doctor of Science, Associate Professor, Professor of the Department of System Analysis and Control, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine

²Doctor of Science, Professor, Head of the Department of Computer Mathematics and Mathematical Modeling, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine

BULLWHIP EFFECT IN SUPPLY CHAINS REDUCING BY DECENTRALIZED INVENTORY CONTROL BASED ON INVARIANT ELLIPSOIDS METHOD

Context. The urgent task of the decentralized inventory control synthesis of material resources in supply chains with uncertainty of external demand and availability of operational constraints has been solved.

Objective is a development of the method of optimal stabilization of local supply chain nodes using a linear dynamic feedback from deviation between available and safety levels of resource stocks in the chain nodes, providing suppression of «bullwhip effect» and the development of the stability analysis method of the decentralized inventory control system in supply chains.

Method. An approach based on the invariant ellipsoids method, which provides a complete and timely response of the «unknown, but bounded» external demand for resources, the stabilization of the closed local subsystems under predefined constraints on the values of local states and control actions, as well as the suppression of «bullwhip effect» in the supply chains has been invited. The stability conditions for decentralized inventory control system in supply chains using the vector Lyapunov functions method and the comparison method has been determined.

Results. The problem of control synthesis using the technique of linear matrix inequalities was reduced to a sequence of semidefinite programming problems, which are solved numerically in real time.

Conclusions. The method of suboptimal structural and parametric synthesis of the decentralized constrained inventory control in supply chains was further developed through the development of the invariant ellipsoids method, thus the costs associated with transportation and storage of material resources were reduced due to suppression of «bullwhip effect»; the degree of suppression of mentioned above effect for different levels of the supply chains is determined by the choice of weighting matrices of local quality criteria. The developed models and algorithms of the decentralized inventory control under uncertainty of demand and availability of operational constraints were introduced at the industrial enterprises and organizations which deal with the production, storage and distribution of material resources, such as the «Kharkivvodokanal» – one of the largest enterprises in Ukraine providing water services and the Ltd. Company «SV» (Kharkiv) – the leading manufacturer of household chemical goods in Ukraine.

Keywords: inventory control, bullwhip effect, decentralized control, invariant ellipsoids method, linear matrix inequality.

REFERENCES

1. Disney S. M., Towill D. R. The effect of vendor managed inventory dynamics on the bullwhip effect in supply chains, *Int. J. Prod. Econ.*, 2003, Vol. 85, pp. 199–215.
2. Lotockij V. A., Mandel' A. S. *Modeli i metody upravlenija zapasami*. Moscow, Nauka, 1991, 188 p.
3. Poljak B. T., Hlebnikov M. V., Shherbakov P. S. *Upravlenie linejnymi sistemami pri vneshnih vozmushhenijah: tehnika linejnyh matrichnyh neravenstv*. Moscow, LENAND, 2014, 560 p.
4. Churilov A. N., Gessen A. V. *Issledovanie linejnyh matrichnyh neravenstv. Putevoditel' po programmym paketam*. Sankt-Peterburg, Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2004, 148 p.
5. Wang X., Disney S. M. The bullwhip effect: progress, trends and directions, 2016, *Eur. J. Operat. Res.* Vol. 250, pp. 691–701.
6. Vohmyanina A. V., Zhuravskaya M. A., Qiao Cong. *Analiz vliyaniya «effekta hlysta» na uroven' obsluzhivaniya v logisticheskoy cepi postavok*, *Transport: nauka, tekhnika, upravlenie*, 2015, No. 9, pp. 38–45.
7. Fu D., Ionescu C. M., Aghezzaf El-H., De Keyser R. Decentralized and centralized model predictive control to reduce the bullwhip effect in supply chain management, *Comput. Ind. Eng.*, 2014, Vol. 73, pp. 21–31.
8. Blanchini F., Pesenti R., Rinaldi F., Ukovich W. Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays, *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 2000, Vol. 16, No. 3, pp. 313–317.
9. Dorofiev Yu. I. *Robastnoe upravlenie zapasami v setyah postavok v usloviyah neopredelennosti sprosa i transportnyh zapazdyvanij* : dis. ... doktora tekhn. nauk : 05.13.07 / Dorofiev Yuriy Ivanovich, Kharkiv, 2016, 284 p.
10. Grant M., Boyd S. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.1, Access mode: <http://cvxr.com/cvx>.