

# МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

### MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING

УДК 536.24

Бердник М. Г.

*Канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем державного вищого навчального закладу «Національний гірничий університет», Дніпро, Україна*

#### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РІШЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОБМІНУ ПОРОЖНЬОГО КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА, ЯКИЙ ОБЕРТАЄТЬСЯ

**Актуальність.** У феноменологічній теорії теплопровідності передбачається, що швидкість поширення тепла є нескінченно великою. Однак при високих інтенсивних нестационарних процесах, що спостерігаються, наприклад, при вибухах, надзвучових потоках, великих швидкостях обертання використання цього припущення приводить до помилок, тому необхідно враховувати, що розповсюдження теплоти проходить з кінцевою швидкістю.

**Мета.** Розробка нової узагальненої математичної моделі температурних розподілів у порожньому кусково-однорідному циліндрі у вигляді крайової задачі математичної фізики для рівняння теплопровідності, та розв'язання отриманої крайової задачі.

**Метод.** Застосування відомих інтегральних перетворень Лапласа, Фур'є, а також розробленого нового інтегрального перетворення для кусково-однорідного простору.

**Результати.** Знайдено нестационарне температурне поле порожнього кругового циліндра в циліндричній системі координат, кусково-однорідного в напрямку полярного радіуса, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. Теплофізичні властивості в кожному шарі не залежать від температури за умови ідеального теплового контакту між шарами, а внутрішні джерела тепла відсутні.

**Висновки.** Вперше розроблена математична модель температурних розподілів у порожньому кусково-однорідному циліндрі, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічних диференціальних рівнянь теплопровідності з граничними умовами першого роду. Теплофізичні властивості якого в кожному шарі не залежать від температури за умови ідеального теплового контакту між шарами, а внутрішні джерела тепла відсутні.

Розроблено нове інтегральне перетворення для кусково-однорідного простору, за допомогою якого знайдено температурне поле порожнього кусково-однорідного кругового циліндра у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є. Знайдений аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (в супутниках, прокатних валках, турбінах і т.ін.).

**Ключові слова:** крайова задача, узагальнене рівняння переносу енергії, інтегральні перетворення Лапласа, Фур'є, час релаксації.

#### НОМЕНКЛАТУРА

$a_s$  – коефіцієнт температуропровідності  $s$ -го шара циліндра;

$Bi$  – критерій Біо;

$c$  – питома теплоємність;

$c_s$  – питома теплоємність  $s$ -го шара циліндра;

$F_0$  – критерій Фур'є;

$I$  – уявна одиниця;

$J_n(x)$  – функція Бесселя 1<sup>го</sup> роду  $n$ <sup>го</sup> порядку;

$Y_n(x)$  – функція Бесселя 2<sup>го</sup> роду  $n$ <sup>го</sup> порядку;

$Pd$  – критерій Предводителя;

$R_0$  – внутрішній радіус циліндра;

$R_1$  – радіус межі шарів;

$T(\rho, \varphi, z, t)$  – температура середовища;

$T_{\max}$  – максимальна температура циліндра;

$T_s(\rho, \varphi, z, t)$  – температури  $s$ -го шара циліндра;

$t$  – час;

$\gamma$  – щільність середовища;

$\gamma_s$  – щільність  $s$ -го шара циліндра;

$\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності;

$\lambda_s$  – коефіцієнт теплопровідності  $s$ -го шара циліндра;

$\tau_r$  – час релаксації.

© Бердник М. Г., 2017

DOI 10.15588/1607-3274-2017-2-3

## ВСТУП

У феноменологічній теорії теплопровідності передбачається, що швидкість поширення тепла є нескінченно великою [1, 2]. Однак при високих інтенсивних нестационарних процесах, що спостерігаються, наприклад, при вибухах, надзвукових потоках, великих швидкостях обертання вплив скінченності величини швидкості поширення тепла на теплообмін стає помітним [1–6].

В [1] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла.

Метою роботи є розробка нової узагальненої математичної моделі температурних розподілів у кусково-однорідному циліндрі у вигляді крайової задачі математичної фізики для рівняння теплопровідності, та розв'язання отриманої крайової задачі, розв'язки якої використовуються під час керування температурними полями.

## 1 ПОСТАНОВА ЗАДАЧІ

Розглянемо розрахунок нестационарного температурного поля порожнього кругового циліндра скінченної довжини  $L$ , зовнішнього радіуса  $R$  в циліндричній системі координат  $(r, \varphi, z)$ , кусково-однорідного в напрямку полярного радіуса  $r$ , який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $OZ$ , з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. Теплофізичні властивості якого в кожному шарі не залежать від температури за умови ідеального теплового контакту між шарами, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна  $G_0$ , а на зовнішній і внутрішній поверхні циліндра температура відома і не залежить від часу  $G(\varphi, z)$  і  $G_1(\varphi, z)$  відповідно.

Відносну температуру циліндра  $\theta(\rho, \varphi, z, t)$  можна представити у вигляді:

$$\theta(\rho, \varphi, z, t) = \begin{cases} \theta_1(\rho, \varphi, z, t) & \text{якщо } \rho \in (\rho_0, \rho_1); \\ \theta_2(\rho, \varphi, z, t) & \text{якщо } \rho \in (\rho_1, \rho_2). \end{cases} \quad (1)$$

Відносні температури  $\theta_s(\rho, \varphi, z, t)$   $s$ -го шара циліндра обчислюються по формулам:

$$\theta_s(\rho, \varphi, z, t) = \frac{T_s(\rho, \varphi, z, t) - G_0}{T_{\max} - G_0},$$

де  $\rho = \frac{r}{R}$ ,  $s=1,2$ .

## 2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Як показує огляд літератури теплообмін в циліндрах, які обертаються, вивчений в даний час ще недостатньо [1, 7]. Показано, що чисельні методи дослідження нестационарних неосесиметричних задач теплообміну циліндрів, які обертаються, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання. Так доводиться [8], що умови стійкості обчислень в методі кінцевих елементів і методі кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку нестационар-

них неосесиметричних температурних полів циліндрів, які обертаються, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають вигляд:

$$1 - \frac{\Delta F_0}{\Delta \varphi^2} \geq 0 \text{ та } \frac{1}{\Delta \varphi} - \frac{Pd}{2} \geq 0.$$

Якщо  $Pd = 10^{-5}$ , що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра  $\omega = 1,671 \text{ сек}^{-1}$  радіусом 100 мм, змінні  $\Delta \varphi$  і  $\Delta F_0$  повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta \varphi \leq 2 \cdot 10^{-5} \text{ та } \Delta F_0 \leq 2 \cdot 10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра за умови  $Bi = 5$  час необхідний для того, щоб температура досягла 90% стаціонарного стану, дорівнює  $Fo \approx 0,025$  [8]. Це означає, що потрібно принаймні здійснити  $1,3 \cdot 10^8$  операцій по часу для того, щоб було досягнуто стаціонарний розподіл температури.

Більше того, потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити  $3,14 \cdot 10^5$  обчислень, так як внутрішній стан у кільці характеризується  $3,14 \cdot 10^5$  точками. У результаті видно, що число обчислень, необхідних для отримання чисельного результату видається нереальним.

Тому для вирішення крайової задачі, яка виникає при математичному моделюванні нестационарних процесів теплообміну в циліндрах, які обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

## 3 МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

В [1] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно [1] узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, який обертається, з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $OZ$ , теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні приймає вигляд:

$$\gamma c \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \tau_r \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial t} \right] \right\} = \lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right], \quad (2)$$

Математично задача визначення відносної температури циліндра  $\theta(\rho, \varphi, z, t)$  складається в інтегруванні гіперболічних диференціальних рівнянь теплопровідності (2) в області  $D_s = \{(\rho, \varphi, z, t) | \rho \in (\rho_{s-1}, \rho_s), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, 1), t \in (0, \infty)\}$ , що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у виді:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \omega \frac{\partial \theta_s}{\partial \varphi} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial t^2} + \tau_r \omega \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \varphi \partial t} = \alpha_s^2 \left[ \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_s}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \varphi^2} + \chi \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial z^2} \right]. \quad (3)$$

з початковими умовами

$$\theta_s(\rho, \varphi, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta_s(\rho, \varphi, z, 0)}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

граничними умовами

$$\theta_1(\rho_0, \varphi, z, t) = W(\varphi, z), \quad \theta_2(1, \varphi, z, t) = V(\varphi, z), \quad (5)$$

$$\theta_s(\rho, \varphi, 0, t) = 0, \quad \theta_s(\rho, \varphi, 1, t) = 0, \quad (6)$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_1(\rho_1, \varphi, z, t) = \theta_2(\rho_1, \varphi, z, t), \quad (7)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(\rho_1, \varphi, z, t)}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial \theta_2(\rho_1, \varphi, z, t)}{\partial \rho}, \quad (8)$$

де  $\rho_1 = \frac{R_1}{R}$ ;  $\rho_0 = \frac{R_0}{R}$ ;  $\rho_2 = 1$ ;  $a_s = \frac{\lambda_s}{c_s \gamma_s}$ ;  $\chi = \left(\frac{R}{L}\right)^2$ ;

$\alpha_s^2 = \frac{a_s}{R^2}$ ;  $z = \frac{z}{L}$ ;  $s=1,2$ ;  $W(\varphi), V(\varphi) \in C(D)$ .

Тоді рішення крайової задачі (3)–(8)  $\theta_s(\rho, \varphi, z, t)$  є двічі неперервно диференційованим по  $\rho, \varphi, z, t$  в області  $D$  і неперервним на  $\bar{D}$  [9], тобто  $\theta_s(\rho, \varphi, z, t) \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ , а функції  $W(\varphi, z), V(\varphi, z), \theta_s(\rho, \varphi, z, t)$  можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [9]:

$$\begin{cases} \theta_s(\rho, \varphi, z, t) \\ V(\varphi, z) \\ W(\varphi, z) \end{cases} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{cases} \theta_{s,n}(\rho, z, t) \\ V_n(z) \\ W_n(z) \end{cases} \cdot \exp(in\varphi), \quad (9)$$

де

$$\begin{cases} \theta_{s,n}(\rho, z, t) \\ V_n(z) \\ W_n(z) \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{cases} \theta_s(\rho, \varphi, z, t) \\ V(\varphi, z) \\ W(\varphi, z) \end{cases} \cdot \exp(-in\varphi) d\varphi;$$

$$\theta_{s,n}(\rho, z, t) = \theta_{s,n}^{(1)}(\rho, z, t) + I\theta_{s,n}^{(2)}(\rho, z, t); \quad V_n(z) =$$

$$= V_n^{(1)}(z) + IV_n^{(2)}(z); \quad W_n(z) = W_n^{(1)}(z) + IW_n^{(2)}(z).$$

З огляду на те, що  $\theta_s(\rho, \varphi, z, t)$  функції дійсні, обмежимо надалі розглядом  $\theta_{s,n}(\rho, z, t)$  для  $n=0,1,2,\dots$ , тому що  $\theta_{s,n}(\rho, z, t)$  і  $\theta_{s,-n}(\rho, z, t)$  будуть комплексно спряженими [9]. Підставляючи значення функцій з (9) у (3)–(8) у результаті одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial t} + \vartheta_n^{(i)} \theta_{s,n}^{(m_i)} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial t^2} + \tau_r \vartheta_n^{(i)} \frac{\partial \theta_{s,n}^{(m_i)}}{\partial t} = \\ = \alpha_s^2 \left[ \frac{\partial^2 \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \theta_{s,n}^{(i)} + \chi \frac{\partial^2 \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial z^2} \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

з початковими умовами

$$\theta_{s,n}^{(i)}(\rho, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta_{s,n}^{(i)}(\rho, z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

граничними умовами

$$\theta_{1,n}^{(i)}(\rho_0, z, t) = W_n^{(i)}(z), \quad \theta_{2,n}^{(i)}(1, z, t) = V_n^{(i)}(z), \quad (12)$$

$$\theta_{s,n}^{(i)}(\rho, 0, t) = 0, \quad \theta_{s,n}^{(i)}(\rho, 1, t) = 0, \quad (13)$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_{1,n}^{(i)}(\rho_1, z, t) = \theta_{2,n}^{(i)}(\rho_1, z, t), \quad (14)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_{1,n}^{(i)}(\rho_1, z, t)}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial \theta_{2,n}^{(i)}(\rho_1, z, t)}{\partial \rho}, \quad (15)$$

де  $\vartheta_n^{(1)} = -\omega n$ ;  $\vartheta_n^{(2)} = \omega n$ ;  $m_1 = 2, m_2 = 1$ ;  $i, s=1,2$ .

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (10) інтегральне перетворення Фур'є [10]:

$$\tilde{f}(\lambda_m) = \int_0^1 f(x) \sin(\pi \cdot m \cdot x) dx,$$

де  $\lambda_m = \pi \cdot m$ ;  $m=1,2,\dots$ , а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(x) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi \cdot m \cdot x) \cdot \tilde{f}(\lambda_m). \quad (16)$$

В результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}}{\partial t} + \vartheta_n^{(i)} \tilde{\theta}_{s,n}^{(m_i)} + \tau_r \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}}{\partial t^2} + \tau_r \vartheta_n^{(i)} \frac{\partial \tilde{\theta}_{s,n}^{(m_i)}}{\partial t} = \\ = \alpha_s^2 \left[ \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)} - \chi \lambda_m^2 \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)} \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

з початковими умовами

$$\tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}(\rho, 0) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}(\rho, 0)}{\partial t} = 0, \quad (18)$$

граничними умовами

$$\tilde{\theta}_{1,n}^{(i)}(\rho_0, z, t) = \tilde{W}_n^{(i)}, \quad \tilde{\theta}_{2,n}^{(i)}(1, z, t) = \tilde{V}_n^{(i)}, \quad (19)$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\tilde{\theta}_{1,n}^{(i)}(\rho_1, z, t) = \tilde{\theta}_{2,n}^{(i)}(\rho_1, z, t), \quad (20)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \tilde{\theta}_{1,n}^{(i)}(\rho_1, z, t)}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial \tilde{\theta}_{2,n}^{(i)}(\rho_1, z, t)}{\partial \rho}. \quad (21)$$

Для розв'язання крайової задачі (17)–(21) побудуємо інтегральне перетворення:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\mu_{n,k}) &= \int_{\rho_0}^1 \frac{Q_0\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_s} \rho\right)}{\alpha(\rho)} \rho f(\rho) d\rho = \\ &= \sum_{s=1}^2 \int_{\rho_{s-1}}^{\rho_s} \frac{Q_s\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_s} \rho\right)}{\alpha_s^2} \rho f(\rho) d\rho, \end{aligned} \quad (22)$$

де  $Q_0\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_s} \rho\right)$ ,

$$\alpha(\rho) = \begin{cases} Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho\right), & \alpha_1^2 \quad \text{якщо } \rho \in (\rho_0, \rho_1); \\ Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right), & \alpha_2^2 \quad \text{якщо } \rho \in (\rho_1, \rho_2). \end{cases}$$

Власні функції  $Q_s\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_s} \rho\right)$  і власні значення  $\mu_{n,k}$  знаходяться із розв'язку задачі Штурма-Ліувілля:

$$\frac{d^2 Q_s}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dQ_s}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} + \frac{\mu_{n,k}^2}{\alpha_s^2} Q_s = 0, \quad (23)$$

$$Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_0\right) = 0, \quad Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_2\right) = 0, \quad (24)$$

$$Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_1\right) = Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right),$$

$$\lambda_1 \frac{\partial Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_1\right)}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)}{\partial \rho} \quad (s=1,2). \quad (25)$$

Розв'язавши задачу Штурма-Ліувілля (23)–(25) одержуємо:

$$Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho\right) = \frac{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho\right)}{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_1\right)},$$

$$Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) = \frac{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)},$$

$$\text{де } \Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) = Y_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_0\right) J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho\right) - J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_0\right) Y_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho\right);$$

$$\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) = Y_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_2\right) J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) - J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_2\right) Y_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right).$$

Власні значення  $\mu_{n,k}$  знаходяться із розв'язку трансцендентного рівняння:

$$\frac{\mu_{n,k} \Lambda'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_1\right)}{\alpha_1 \Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_1\right)} = \sigma \frac{H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)},$$

$$\text{де } H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) = \frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \left[ Y_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_2\right) J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) - \right. \\ \left. - J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_2\right) Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho\right) \right]; \quad \sigma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_0(\mu_{n,k} \rho)}{\|Q_0(\mu_{n,k} \rho)\|^2} \bar{f}(\mu_{n,k}). \quad (26)$$

Де квадрат норми власної функції  $\|Q_0(\mu_{n,k} \rho)\|^2$  дорівнює:

$$\begin{aligned} \|Q_0\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_s} \rho\right)\|^2 &= \frac{\rho_1^2}{2\alpha_1^2} \left\{ \left[ 1 - \frac{n^2 \alpha_1^2}{\mu_{n,k}^2 \rho_1^2} \right] + \left[ \frac{\Lambda'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)}{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)} \right]^2 \right\} - \\ &- \frac{\rho_0^2}{2\alpha_1^2} \left[ \frac{\Lambda'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_0\right)}{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho_1\right)} \right]^2 + \frac{\rho_2^2}{2\alpha_2^2} \left[ \frac{\alpha_2 H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_2\right)}{\mu_{n,k} \Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)} \right]^2 - \\ &- \frac{\rho_1^2}{2\alpha_2^2} \left\{ \left[ 1 - \frac{n^2 \alpha_2^2}{\mu_{n,k}^2 \rho_1^2} \right] + \left[ \frac{\alpha_2 H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)}{\mu_{n,k} \Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho_1\right)} \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (17) інтегральне перетворення (22) і враховуючи позначення (1), в результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_n^{(i)}}{dt} + \vartheta_n^{(i)} \left[ \bar{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{d\bar{\theta}_n^{(m_i)}}{dt} \right] + \tau_r \frac{d^2 \bar{\theta}_n^{(i)}}{dt^2} = \\ = \mu_{n,k} \Omega_{n,k}^{(i)} - \mu_{n,k}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} - \chi \lambda_m^2 \bar{\theta}_n^{(i)}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{де } \Omega_{n,k}^{(i)} = \frac{\rho_0}{\alpha_1} Q_1' \left( \frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1} \rho \right) \tilde{W}_n^{(i)} - \frac{1}{\alpha_2} Q_2' \left( \frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2} \rho \right) \tilde{V}_n^{(i)}$$

с початковими умовами

$$\tilde{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, t) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, t)}{\partial t} = 0, \quad (i=1,2). \quad (28)$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (27) с початковими умовами (28) інтегральне перетворення Лапласа [10]:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

В результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно  $\tilde{\theta}_n^{(i)}$ :

$$s \tilde{\theta}_n^{(i)} + \vartheta_n^{(i)} \left( \tilde{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r s \tilde{\theta}_n^{(m_i)} \right) + \tau_r s^2 \tilde{\theta}_n^{(i)} = q_{n,k} \left( \frac{\mu_{n,k} \tilde{\Omega}_{n,k}^{(i)}}{q_{n,k}} - \tilde{\theta}_n^{(i)} \right), \quad (29)$$

де  $i=1,2$ ;  $q_{n,k} = \mu_{n,k}^2 + \chi \lambda_m^2$ .

Розв'язавши систему рівнянь (29) одержуємо:

$$\tilde{\theta}_n^{(i)} = \mu_{n,k} \frac{\tilde{\Omega}_{n,k}^{(i)} (\tau_r s^2 + s + q_{n,k}) + (-1)^{i+1} \omega n \tilde{\Omega}_{n,k}^{(m_i)} (1 + s \tau_r)}{(\tau_r s^2 + s + q_{n,k})^2 + \omega^2 n^2 (1 + s \tau_r)^2}, \quad (i=1,2). \quad (30)$$

Застосовуючи до зображення функцій (30) формули оберненого перетворення Лапласа [10] одержуємо оригінали функцій:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_n^{(1)}(t) = & \sum_{j=1}^2 \zeta_{n,k}(s_j) \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n I] + \right. \\ & \left. + \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1) I] \right\} \cdot (e^{s_j t} - 1) + \\ & + \sum_{j=3}^4 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n I] + \right. \\ & \left. + \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1) I] \right\} \cdot (e^{s_j t} - 1), \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_n^{(2)}(t) = & \sum_{j=1}^2 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n I] - \right. \\ & \left. - \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1) I] \right\} \cdot (e^{s_j t} - 1) + \\ & + \sum_{j=3}^4 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n I] - \right. \\ & \left. - \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1) I] \right\} \cdot (e^{s_j t} - 1), \quad (32) \end{aligned}$$

$$\text{де } \zeta_{n,k}(s_j) = \frac{0,5 s_j^{-1} \mu_{n,k}}{(2\tau_r s_j + 1)^2 + (\tau_r \omega n)^2}, \text{ а значення } s_j \text{ для } j=1,2,3,4 \text{ визначаються за формулами:}$$

$$s_{1,2} = \frac{(\tau_r \omega n i - 1) \pm \sqrt{(1 + \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r},$$

$$s_{3,4} = \frac{(\tau_r \omega n i + 1) \pm \sqrt{(1 - \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (9),(16) і (26) одержуємо температурне поле кусково-однорідного кругового циліндра в напрямку полярного радіуса, який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\begin{aligned} \theta(\rho, \varphi, z, t) = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \tilde{\theta}_n^{(1)}(t) + i \cdot \tilde{\theta}_n^{(2)}(t) \right] \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \sin(\pi m z) \right\} \cdot \frac{Q_0(\mu_{n,k} \rho)}{\|Q_0(\mu_{n,k} \rho)\|^2} \right\} \cdot \exp(in\varphi), \quad (33) \end{aligned}$$

де значення  $\tilde{\theta}_n^{(1)}(t)$  і  $\tilde{\theta}_n^{(2)}(t)$  визначаються по формулам (31), (32).

#### 4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для розрахунку температурних полів  $\theta(\rho, \varphi, z, t)$  в кусково-однорідному циліндра по отриманій формули (33) було розроблено програмне забезпечення. При чисельних розрахунках знаходження суми рядів вони були замінені на часткові суми з точністю  $10^{-4}$ .

Програмне забезпечення написано на мові об'єктно-орієнтованого програмування C#, реалізоване у середовищі розробки Microsoft Visual Studio 2010 та функціонує на будь-якій операційній системі, на котрій встановлено Microsoft .NET Framework версії 4.0 або вище.

#### 5 РЕЗУЛЬТАТИ

Для перевірки математичної моделі проведені розрахунки, за допомогою розробленого програмного забезпечення, температурного поля в порожньому кусково-однорідному циліндрі.

Температура на поверхні циліндра задавалась у вигляді:

$$\theta(1, \varphi, z, t) = \Theta_1(\varphi) \cdot \eta(l_1 - z) + \Theta_2(\varphi) \cdot [\eta(1 - l_2 - z) - \eta(l_1 - z)] + \Theta_3(\varphi) \cdot [\eta(1 - z) - \eta(1 - l_2 - z)],$$

$$\begin{aligned} \Theta_2(\varphi) = & 2 \cdot \pi^{-1} \cdot \varphi \cdot \eta(0,5\pi - \varphi) + \eta(1,5\pi - \varphi) - \eta(0,5\pi - \varphi) + \\ & + [1 + 2 \cdot \pi^{-1} \cdot \eta(1,5\pi - \varphi)] \cdot [\eta(2 \cdot \pi - \varphi) - \eta(1,5\pi - \varphi)], \end{aligned}$$

де  $\Theta_1(\varphi) = \Theta_3(\varphi) = 0,03$ ;  $\rho_0 = 0,5$ ;  $\rho_1 = 0,75$   $l_1 = l_2 = 0,25$ ;

$$\eta(z) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } z \geq 0; \\ 1 & \text{якщо } z < 0, \end{cases}$$

$$\theta(\rho, \varphi, 0, t) = \theta(\rho, \varphi, 1, t) = 0,1, \quad \theta(\rho_0, \varphi, z, t) = 0,05.$$

Необхідні для розрахунку властивості матеріала циліндра наступні:

$$\lambda_1 = 34,8 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}; \tau_r = 10^{-11} \text{ сек}; c_1 = 560 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)};$$

$$c_2 = 560 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}; \gamma_1 = 7800 \text{ кг/м}^3; \sigma = 1,5.$$

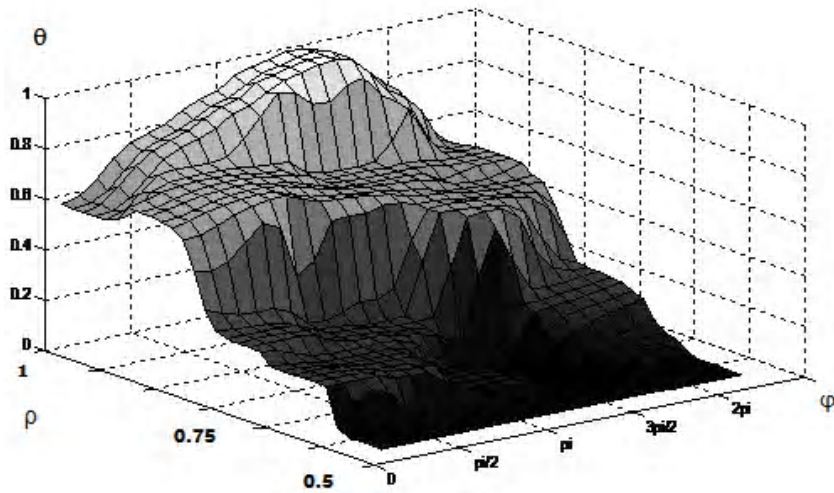
На рис. 1 представлені результати чисельних експериментів у вигляді кривих розподілу температури при наступних значеннях параметрів:  $z=0,5$ ,  $Pd=100$

$$(Pd = \frac{\omega R^2}{a_1}), \text{ де } F_0 = a_1 t \cdot R^{-2}.$$

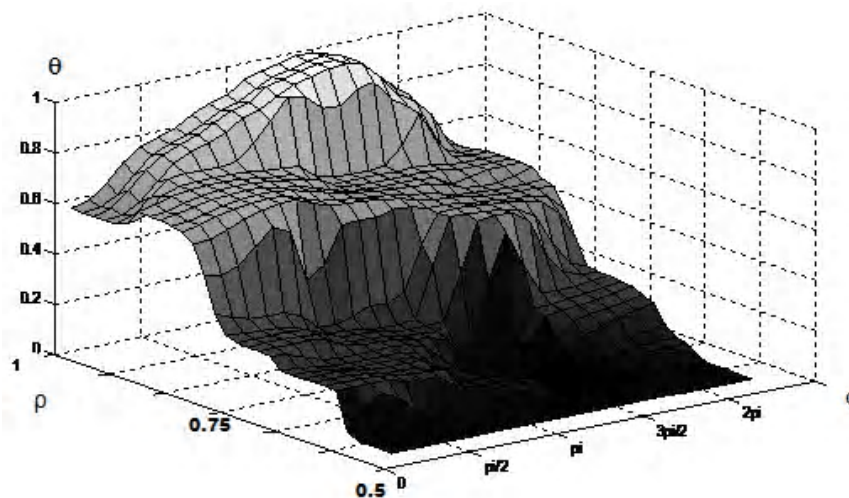
## 6 ОБГОВОРЕННЯ

Як видно з рис. 1 температурне поле при  $\rho < 0,54$ , є осесиметричне, а амплітуда коливань температури з часом зменшується.

Історично склалося, що в Україні розвинута мережа металургійних підприємств, на яких виробляють значну частину світового випуску сталі. На високопродуктивні слябові машини безперервного лиття заготовок (МБЛЗ) припадає приблизно 2/3 об'єму безперервного лиття заготовок [7]. Ролик МБЛЗ – це пустотілий циліндр діаметром від 140 до 600 мм, залежно від відстані до кристалізатора, довжина робочої частини 1900–2300 мм при загальній довжині 2400–4320 мм [1]. На МБЛЗ встановлено кілька сотень (500–800 штук) роликів, які підтримують сляб. Температура на його поверхні роликів 1300°C [7]. Через внутрішню порожнину ролика прокачують технічну воду для його охолодження. Швидкість обертання



а



б

Рисунок 1 – Розподіл температурного поля в циліндрі при різних значеннях критерія Фур'є:

$$а - F_0 = 0,4; б - F_0 = 1$$

ролика залежить від його діаметра та швидкості переміщення сляба. Ролики, які працюють у складних умовах термо-механічного навантаження, визначають ресурс МБЛЗ.

Таким чином знайдений аналітичний вираз (33) для розрахунку нестационарного неосесиметричного температурного температурного поля порожнього кругового циліндра циліндра скінченної довжини  $L$ , зовнішнього радіуса  $R$  в циліндричній системі координат  $(r, \varphi, z)$ , кусково-однорідного в напрямку полярного радіуса  $r$ , який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $OZ$ , з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла можна використовувати для моделювання температурних станів прокатних валків.

## ВИСНОВКИ

Вперше розроблена математична модель температурних розподілів у порожньому кусково-однорідному циліндрі, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі  $OZ$  з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді крайової задачі математичної фізики для рівняння теплопровідності.

Розроблено нове інтегральне перетворення для кусково-однорідного простору, за допомогою якого знайдено температурне поле у порожньому кусково-однорідному циліндрі у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є.

Знайдений аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (в супутниках, прокатних валках, турбінах і т.ін.).

## ПОДЯКИ

Робота виконана в державном вищом навчальному закладі «Національний гірничий університет» в рамках держбюджетної наукової роботи «Розробка та впровадження сучасних засобів дистанційного навчання та діагностики знань з дисциплін напряму підготовки комп'ютерні науки» за спеціальністю 6.050101 «Інформаційні управляючі системи та технології» (Е-310).

Бердник М. Г.

Канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения компьютерных систем, государственного высшего учебного заведения «Национальный горный университет», Днепр, Украина

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПОЛОГО КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

**Актуальность.** В феноменологической теории теплопроводности предполагается скорость распространения тепла бесконечно большой. Однако при высоких интенсивных нестационарных процессах наблюдаемых, например, при взрывах, сверхзвуковых потоках, больших скоростях вращения использования этого предположения приводит к ошибкам, поэтому необходимо учитывать, что распространение теплоты проходит с конечной скоростью.

**Цель.** Разработка новой обобщенной математической модели температурных распределений в полом кусочно-однородном цилиндре в виде краевой задачи математической физики для уравнения теплопроводности, и решение полученной краевой задачи.

**Метод.** Применение известных интегральных преобразований Лапласа, Фурье, а также разработанного нового интегрального преобразования для кусочно-однородного пространства.

**Результаты.** Найдено нестационарное температурное поле полого кругового цилиндра в цилиндрической системе координат, кусочно-однородного в направлении полярного радиуса, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси  $OZ$ , с учетом конечной скорости распространения тепла. Теплофизические свойства в каждом слое не зависят от температуры при идеальном тепловом контакте между слоями, а внутренние источники тепла отсутствуют.

**Выводы.** Впервые разработана математическая модель температурных распределений в полом кусочно-однородном цилиндре, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси  $OZ$  с учетом конечной скорости распространения тепла в виде краевой задачи математической физики для гиперболических дифференциальных уравнений теплопроводности с граничными условиями первого рода. Теплофизические свойства которого в каждом слое не зависят от температуры при идеальном тепловом контакте между слоями, а внутренние источники тепла отсутствуют.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бердник М. Г. Математичне моделювання тривимірної узагальненої задачі теплообміну суцільного циліндра, який обертається / М. Г. Бердник // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д. : ДНУ, 2014. – С. 26–35.
2. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. – Львів, 2011. – 48 с. – (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 01.11).
3. Ячменьов В. О. Розрахунок температурних полів в складеному напівнескінченному тілі з урахуванням узагальненого закону Фур'є / В. О. Ячменьов, В. В. Ніколенко // Вісник НТУ «ХП». Серія : Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Харків : НТУ «ХП», 2016. – № 10 (1182). – С. 61–65.
4. Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion wave equation [Text] / F. Mainardi // Appl. Math. Lett. – 1996. – № 9. – P. 23–28.
5. Povstenko Y. Time-fractional heat conduction in an infinite medium with a spherical hole under Robin boundary condition / Y. Povstenko // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2013. – № 16. – P. 356–369.
6. Povstenko Y. Fractional heat conduction in an infinite medium with a spherical inclusion. Entropy / Y. Povstenko // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2013. – № 15. – P. 4122–4133.
7. Громик А. П. Нестационарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. – Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2009. – 120 с.
8. Kuwashimo Kensuke. Temperature distribution within a rotating cylindrical body/ Kuwashimo Kensuke, Yamada Tominori // Bull. JSME. – 1978. – Vol. 21, № 152. – P. 266–272.
9. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики / Б. М. Маркович – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2010. – 384 с.
10. Лопушанська Г. П. Перетворення Фур'є, Лапласа: узагальнення та застосування / Г. П. Лопушанська, А. О. Лопушанський, О. М. М'яус. – Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. – 152 с.
11. Калініченко В. Вплив експлуатаційних факторів на напружено-деформований та граничний стан роликів машин безперервного лиття заготовок / В. Калініченко, Н. Гопкало // Вісник ТДТУ. – 2010. – Том 15, № 1. – С. 41–51.

Стаття надійшла до редакції 12.02.2017.

Після доробки 27.02.2017.

Разработано новое интегральное преобразование для кусочно-однородного пространства, с помощью которого найдено температурное поле полого кусочно-однородного кругового цилиндра в виде сходящихся ортогональных рядов по функциям Бесселя и Фурье. Найденное аналитическое решение обобщенной краевой задачи теплообмена цилиндра, который вращается, с учетом конечности величины скорости распространения тепла, может найти применение при моделировании температурных полей, которые возникают во многих технических системах (в спутниках, прокатных валках, турбинах и т.д.).

**Ключевые слова:** краевая задача, обобщенное уравнение переноса энергии, интегральные преобразования Лапласа, Фурье, время релаксации.

Berdnyk M. G.

PhD, Associate Professor, Associate Professor of Computer Software Systems State Higher Education Institution «National Mining University», Dnipro, Ukraine

#### MATHEMATICAL MODELS AND METHODS OF SOLVING SPATIAL GENERALIZED BOUNDARY VALUE PROBLEM HEAT ROTATING HOLLOW PIECEWISE HOMOGENEOUS CYLINDER

**Context.** The phenomenological theory of heat conduction speed is assumed infinitely large. However, the high intensity of the observed transient processes such as explosions, supersonic flow, high speeds of rotation of the use of this assumption leads to errors, so it is necessary to take into account that the distribution of heat takes place at a finite rate.

**Objective.** Development of a new generalized mathematical model of the temperature distribution in the hollow piecewise uniform cylinder in the form of a boundary value problem of mathematical physics for the heat equation and the solution of the resulting boundary value problem.

**Method.** The use of known integral Laplace transforms, Fourier series, and developed a new integral transformation for piecewise homogeneous space.

**Results.** Found Polga transient temperature field of a circular cylinder in a cylindrical coordinate system, a piecewise homogeneous polar radius direction, which rotates at a constant angular velocity about the axis OZ, with the ultimate heat propagation speed. Thermal properties of each layer does not depend on the temperature at an ideal thermal contact between the layers, and there are no internal sources of heat.

**Conclusions.** For the first time developed a mathematical model of the temperature distribution in the empty piecewise uniform cylinder, which rotates at a constant angular velocity about the axis OZ, taking into account the finite speed of propagation of heat in the form of mathematical physics boundary value problem for hyperbolic partial differential equations of heat conduction with boundary conditions of the first kind. Thermal properties are in each layer does not depend on the temperature at an ideal thermal contact between the layers, and there are no internal sources of heat. Created a new integral transform of a piecewise-homogeneous space, with which found the temperature field of the hollow piecewise homogeneous circular cylinder in the form of convergent orthogonal series of Bessel functions and of Fourier. The obtained analytical solution of a generalized boundary value problem of heat transfer cylinder, which rotates, given a finite amount of heat propagation velocity can be used for modeling of temperature fields, which occur in many technical systems (satellites, forming rolls, turbines, etc.).

**Keywords:** boundary value problem, generalized equation of energy transfer, integrated Laplace, Fourier, relaxation time.

#### REFERENCES

- Berdnyk M. G. Matematychnе modeljuvannja tryvmirnoi' uzagal'nenoi' zadachi teploobminu suchil'nogo cylindra, jakyj obertajet'sja, *Pytannja prykladnoi' matematyky i matematychnogo modeljuvannja*, D, DNU, 2014, pp. 26–35.
- Jachmen'ov V. O., Nikolenko V. V. Rozrahunok temperaturnyh poliv v skladenomu napivneskinchenomu tili z urahuvannjam uzagal'nenogo zakonu Fur'je, *Visnyk NTU «HPI». Serija: Energetychni ta teplotehnichni procesy j ustatkuvannja*. Harkiv, NTU «HPI», 2016, No. 10(1182), pp. 61–65.
- Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion wave equation [Text], *Appl. Math. Lett.*, 1996, No. 9, pp. 23–28.
- Povstenko Y. Time-fractional heat conduction in an infinite medium with a spherical hole under Robin boundary condition, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2013, No. 16, pp. 356–369.
- Povstenko Y. Fractional heat conduction in an infinite medium with a spherical inclusion. *Entropy, Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2013, No. 15, pp. 4122–4133.
- Konet I. M., Lenjuk M. P. Giperbolichni krajovi zadachi v neobmezhenyh trysharovyh oblastjah. L'viv, 2011, 48 p. (Prepr./ NAN Ukrai'ny In-t prykladnyh problem mehaniky i matematyky im. Ja. S. Pidstrygacha; 01.11).
- Gromyk A. P., Konet I. M. Nestacionarni zadachi teploprovodnosti v kuskovo-odnorodnyh prostorovyh seredovysshah. Kam'janec'-Podil's'kyj, Abetka-Svit, 2009, 120 p.
- Kuwashimo Kensuke, Tominori Yamada Temperature distribution within a rotating cylindrical body, *Bull. JSME*, 1978, Vol. 21, No. 152, pp. 266–272.
- Markovych B. M. Rivnjannja matematychnoi' fizyky. L'viv, Vydavnytvo L'vivs'koi' politehniky, 2010, 384 p.
- Lopushans'ka G. P., Lopushans'kyj A. O., M'jaus O. M. Peretvorenna Fur'je, Laplasa: uzagal'nenja ta zastosuvannja. L'viv, LNU im. Ivana Franka, 2014, 152 p.
- Kalinichenko V., Gopkalo N. Vplyv ekspluatacijnyh faktoriv na napruzhenno-deformovanyj ta granychnyj stan rolykiv mashyn bezperernovogo lyttja zagotovok, *Visnyk TDTU*, 2010, Tom 15, No. 1, pp. 41–51.