УДК 62–50:519.7/8

Левин В. И.

Д-р технических наук, профессор Пензенского государственного технологического университета, Пенза, Россия

ПОЛИИНТЕРВАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ОПТИМИЗАЦИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Актуальность. В последние десятилетия в гражданской и военной сферах все чаще встречаются новые информационные технологии, основанные на новых подходах к описанию различных видов неопределенности. Эти технологии широко применяются в технике, экономике, социальной сфере. Для их поддержки необходимы новые достаточно мощные математические модели и методы. В связи с этим данная статья, посвященная разработке новой модели неопределенности (полиинтервал) и математических методов и моделей для ее изучения, применительно к решению задач оптимизации в условиях неопределенности, является весьма актуальной.

Цель статьи заключается в детальной разработке новой математической модели неопределенности – полиинтервала, являющегося последовательностью конечного числа независимых интервалов неопределенности, с целью оптимизации разнообразных технических, экономических, социальных и иных систем с полиинтервальными параметрами.

Метод. Для достижения поставленной цели в статье предложено распространить на изучение оптимальных операций над полиинтервалами известный в интервальной математике метод введения операций над интервалами в виде теоретико-множественного обобщения соответствующих операций над вещественными числами.

Результат. В статье детально разработана новая математическая модель неопределенности – полиинтервал. Определены оптимальные операции (max, min) над полиинтервалами, выведены правила их выполнения. Установлены необходимые и достаточные условия существования этих операций, т.е. условия сравнимости полиинтервалов по отношениям «больше» и «меньше». Дан пример использования полученных результатов для принятия оптимального экономического решения о выборе наилучшего места работы по критерию «наибольшая зарплата». Показано, что полинтервал, являющийся более сложной моделью неопределенности систем, чем интервал, позволяет исследовать неопределенные системы с такими же временными затратами.

Выводы. Научная новизна данной работы состоит в предложенной автором новой математической модели неопределенности различных систем в виде полиинтервалов, совместно с математическим аппаратом, позволяющим выполнять оптимальные операции над полиинтервалами и тем самым дающим возможность решать задачи оптимизации технических, экономических, социальных и иных систем с полиинтервальными параметрами.

Ключевые слова: полиинтервалы, сравнение полиинтервалов, максимальный (минимальный) полиинтервал.

НОМЕНКЛАТУРА

a_i, b_i – вещественные числа;

$\tilde{a}, \tilde{b}$ – интервалы;

$\tilde{a} \circ \tilde{b}$ – операция над числами;

$\tilde{a} \bullet \tilde{b}$ – операция над интервалами;

$\tilde{A}, \tilde{B}$ – полиинтервалы;

$\tilde{A} \circ \tilde{B}$ – операция над полиинтервалами;

$\bigcup$ – объединение интервалов (полиинтервалов);

$\bigcap$ – пересечение интервалов (полиинтервалов);

$a \vee b$ – взятие максимального из чисел a, b;

$a \wedge b$ – взятие минимального из чисел a, b;

$\tilde{a} \vee \tilde{b}$ – взятие максимального из интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}$;

$\tilde{a} \wedge \tilde{b}$ – взятие минимального из интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}$;

$\tilde{A} \vee \tilde{B}$ – взятие максимального из полиинтервалов $\tilde{A}, \tilde{B}$;

$\tilde{A} \wedge \tilde{B}$ – взятие минимального из полиинтервалов $\tilde{A}, \tilde{B}$;

$\tilde{a} = \tilde{b}$ – равенство интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}$;

$\tilde{a} \neq \tilde{b}$ – неравенство интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}$;

$\tilde{a} \geq \tilde{b}$ – отношение $\geq$ между интервалами $\tilde{a}, \tilde{b}$;

$\tilde{A} = \tilde{B}$ – равенство полиинтервалов $\tilde{A}, \tilde{B}$;

$\tilde{A} \neq \tilde{B}$ – неравенство полиинтервалов $\tilde{A}, \tilde{B}$;

$\tilde{A} \geq \tilde{B}$ – отношение $\geq$ между полиинтервалами $\tilde{A}, \tilde{B}$.

ВВЕДЕНИЕ

В период Второй мировой войны появилось много новых технологий: обнаружение воздушных целей с помощью радаров, управление огнем зенитной артиллерии, шифровка и дешифровка информации в системах связи и т.д. Все эти технологии были связаны с исследованием неопределенности и использовали соответствующие математические методы, главным образом, теорию вероятностей. После войны эти исследования были продолжены и распространены на гражданскую сферу – технику, экономику, социум. При этом под неопределенностью стали понимать не только случайность возможных исходов, но и их неединственность или незнание, дрейф переменных, семантическую неопределенность целей, многокритериальность при принятии решений, недоопределенность модели или структуры изучаемой системы и т.д. Учет неопределенности систем очень важен при их проектировании, так как полная определенность в работе системы появляется лишь на последних этапах ее создания. Исследование неопределенных систем ведется путем решения задач расчета, анализа и синтеза различных функций с недетерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками данных систем. При этом, в зави-

DOI 10.15588/1607-3274-2018-1-7

p-ISSN 1607-3274. Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2018. № 1
e-ISSN 2313-688X. Radio Electronics, Computer Science, Control. 2018. № 1

симости от выбранной модели неопределенности, используется адекватный ей математический аппарат – теория нечетких множеств [1], многозначная и непрерывная логика [2], теория сверхслучайных процессов [3], интервальная [4, 5] и полиинтервальная [6] математика, теория сравнения интервалов [7] и др.

Настоящая статья имеет цель разработки метода синтеза оптимальных систем с полиинтервальными параметрами при помощи аппарата полиинтервальной математики.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Перечислим сначала исходные понятия и данные, которые будем использовать при формулировке и решении рассматриваемых в статье задач.

1. В качестве базы будем использовать исчисление интервалов, называемое иначе интервальной математикой [4, 5]. Интервал вводится как множество всех возможных значений неполностью определенной величины $\widetilde{a}$, задаваемой лишь ее нижней a_1 и верхней a_2 границами. Формально, величину $\widetilde{a}$ определим в виде следующего числового множества – ограниченного интервала неопределенности

$$\widetilde{a} \equiv [a_1, a_2] = \{a \mid a_1 \le a \le a_2\}. \qquad (1)$$

Согласно (1) неизвестное истинное значение неопределенной величины $\widetilde{a}$ достоверно лежит в пределах интервала $[a_1, a_2]$, не выходя за его границы a_1 и a_2. При этом все значения величины $\widetilde{a}$ в пределах указанного интервала считаются равновозможными в том смысле, что нет никаких оснований предпочитать одно значение другому. Понятие равновозможности здесь не означает задание равномерного вероятностного или какого-либо иного равномерного распределения величины $\widetilde{a}$ внутри указанного интервала.

2. Будем также использовать алгебраические операции над интервалами вида (1), обобщающие соответствующие операции над числами. Для этого применяется теоретико-множественная конструкция

$$\widetilde{a} \circ \widetilde{b} = \{a \bullet b \mid a \in \widetilde{a}, b \in \widetilde{b}\}, \quad \circ \widetilde{a} = \{\bullet a \mid a \in \widetilde{a}\}. \qquad (2)$$

Согласно (2), любая операция над интервалами $\circ$ определяется на базе соответствующей операции над точными числами $\bullet$, при условии, что конкретные значения этих чисел пробегают все возможные значения из соответствующих интервалов. Из определения (2)следуют простые правила выполнения операций над интервалами:

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2];$$
$$[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1];$$
$$k \cdot [a_1, a_2] = \begin{cases} [ka_1, ka_2], & k > 0, \\ [ka_2, ka_1], & k < 0; \end{cases}$$
$$[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min_{i,j}(a_i \cdot b_j), \max_{i,j}(a_i \cdot b_j)];$$
$$[a_1, a_2] / [b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot [1/b_2, 1/b_1], \text{ при } 0 \notin [b_1, b_2]. \qquad (3)$$

3. Наконец, мы будем использовать понятие полиинтервала как последовательности нескольких непересекающихся одиночных интервалов [6]

$$\widetilde{A} = (\widetilde{a}, \widetilde{b}, ..., \widetilde{d}), \text{ где } \widetilde{a}, \widetilde{b}, ..., \widetilde{d} \text{ – одиночные интервалы вида (1)}. \qquad (4)$$

В формуле (4) предполагается, что каждый следующий одиночный интервал сдвинут вправо от предыдущего и не пересекается с ним. Операции над полиинтервалами были введены в [6] аналогично операциям над интервалами с помощью теоретико-множественной конструкции типа (2)

$$\widetilde{A} \circ \widetilde{B} = \{a \bullet b \mid a \in \widetilde{A}, b \in \widetilde{B}\}, \circ \widetilde{A} = \{\bullet a \mid a \in \widetilde{A}\}. \qquad (5)$$

Здесь $\widetilde{A}$ – полиинтервал вида (4), $\widetilde{B}$ – другой полиинтервал того же вида, но с другими составляющими его одиночными интервалами. На базе определения (5) операций над полиинтервалами в работе [6] были выведены правила конструктивного выполнения следующих алгебраических операций с полиинтервалами: сложение, вычитание, умножение полиинтервала на число, умножение и деление полиинтервалов.

Первая задача настоящей статьи состоит в том, чтобы на базе того же определения (5) вывести правило конструктивного выполнения еще одной, весьма важной операции над полиинтервалами – определение максимального и минимального из двух полиинтервалов. Важность этой операции связана с тем, что к ее выполнению (равно как и к выполнению аналогичной операции над одиночными интервалами) сводятся многие классы задач оптимального планирования разнообразных систем и процессов, работающих при наличии некоторой неопределенности [8]. На основе этой операции также появляется возможность решения второй задачи статьи – сравнения полиинтервалов и их упорядочения по отношениям «больше», «меньше» и «равно».

2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Появляющиеся при исследовании неопределенных систем новые задачи, которые упомянуты во введении, значительно сложнее их детерминированных аналогов, которые приходится решать при исследовании систем с детерминированными параметрами. Это усложнение связано с тем, что алгебра недетерминированных чисел сложнее соответствующей алгебры детерминированных чисел. Поэтому для исследования неопределенных систем потребовались новые подходы.

Эти новые подходы к описанию неопределенности систем привели к созданию новых математических методов их изучения: теория нечетких множеств [1], многозначная и непрерывная логика [2], теория сверхслучайных процессов [3] и т. д. Одним из популярных методов стала также интервальная математика, изучающая величины, определяемые с точностью до интервалов возможных значений [4, 5]. Однако одиночные интервалы, изучаемые в интервальной математике, не охватывают всех практических ситуаций. Например, неопределенный период времени, в течение которого возможно проведение некоторой военной операции, может содержать несколько последовательных временных интервалов. Новые неопределенные объекты, имеющие вид последовательностей интервалов неопределенности, были введены в работе [6] и названы полиинтервалами. Полиинтервалы являются расширением интервальной модели неопределенности систем. В работе [6] было построено исчисление полиинтервалов, основанное на операциях над полиинтервалами, аналогичных операциям над интервалами в интервальной математике. Этими операциями являются сложение, вычитание, умножение и деление.

Настоящая статья посвящена построению и исследованию другой важной операции над полиинтервалами – сравнения. Эта операция вводится на базе теории сравнения интервалов [7] и может быть применена для оптимизации полиинтервальных величин и функций. Другие подходы к моделированию и исчислению характеристик интервальных систем изложены в [9–12].

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Следуя [6], будем представлять полиинтервалы вида (4) в теоретико-множественных терминах следующим образом:

$$\widetilde{A} = \widetilde{a} \cup \widetilde{b} \cup \ldots \cup \widetilde{d} \,. \tag{6}$$

Пусть заданы два полиинтервала $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ следующего вида

$$\widetilde{A} = \bigcup_{i=1}^{m} \widetilde{a}^{i}, \quad \widetilde{B} = \bigcup_{j=1}^{n} \widetilde{b}^{j}, \tag{7}$$

где $\widetilde{a}^{i} = [a_1^i, a_2^i],\ i = \overline{1,m}$ и $\widetilde{b}^{j} = [b_1^j, b_2^j],\ j = \overline{1,n}$ – одиночные интервалы, в совокупности составляющие $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ соответственно. Требуется определить максимальный и минимальный из этих полиинтервалов. Другими словами, требуется выполнить операции

$$\widetilde{C} = \widetilde{A} \vee \widetilde{B},\ \widetilde{D} = \widetilde{A} \wedge \widetilde{B}, \tag{8}$$

получив в результате $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$ – максимальный и минимальный полиинтервалы. Эти две операции определим формально, как и иные операции над полиинтервалами, введенные в [6] (сложение, вычитание, умножение), при помощи теоретико-множественной конструкции (5). Таким образом, максимум и минимум двух полиинтервалов определяются в виде

$$\widetilde{C} = \widetilde{A} \vee \widetilde{B} = \{a \vee b \mid a \in \widetilde{A}, b \in \widetilde{B}\},$$

$$\widetilde{D} = \widetilde{A} \wedge \widetilde{B} = \{a \wedge b \mid a \in \widetilde{A}, b \in \widetilde{B}\}. \tag{9}$$

Согласно (9), операции взятия максимума (минимума) двух полиинтервалов определяются на базе соответствующих операций над точно заданными величинами при условии, что конкретные значения этих величин пробегают все значения из соответствующих полиинтервалов.

Исходя из определений операции взятия максимума и минимума полиинтервалов (9), нетрудно установить формулу для конструктивного выполнения этих операций. Для этого используем следующую базовую формулу, позволяющую выполнить произвольную операцию $\circ$ над этими полиинтервалами $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ в виде суперпозиции этой операции над одиночными интервалами $\widetilde{a}^{i}$, $\widetilde{b}^{j}$, составляющими $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ [6]

$$\widetilde{A} \circ \widetilde{B} = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\widetilde{a}^{i} \circ \widetilde{b}^{j}) \text{ или в развернутом виде}$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} \widetilde{a}^{i} \right) \circ \left(\bigcup_{j=1}^{n} \widetilde{b}^{j} \right) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\widetilde{a}^{i} \circ \widetilde{b}^{j}). \tag{10}$$

Подставляя теперь в формулу (10) вместо $\circ$ конкретные операции $\vee$ и $\wedge$, получим необходимые формулы для конструктивного выполнения операций взятия максимума и минимума двух полиинтервалов

$$\widetilde{A} \vee \widetilde{B} = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\widetilde{a}^{i} \vee \widetilde{b}^{j}) \text{ или в развернутом виде},$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} \widetilde{a}^{i} \right) \vee \left(\bigcup_{j=1}^{n} \widetilde{b}^{j} \right) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\widetilde{a}^{i} \vee \widetilde{b}^{j}) \tag{11}$$

$$\widetilde{A} \wedge \widetilde{B} = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\widetilde{a}^{i} \wedge \widetilde{b}^{j}) \text{ или в развернутом виде}.$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} \widetilde{a}^{i} \right) \wedge \left(\bigcup_{j=1}^{n} \widetilde{b}^{j} \right) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\widetilde{a}^{i} \wedge \widetilde{b}^{j}). \tag{12}$$

Формулы (11), (12) сводят вычисление максимума и минимума полиинтервалов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ к вычислению максимумов и минимумов всех пар одиночных интервалов ($\widetilde{a}^{i}$, $\widetilde{b}^{j}$), составляющих $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$. Однако непосредственное использование вышеназванных формул для вычисления максимального (минимального) из полиинтервалов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ не всегда удобно, поскольку, во-первых, это требует вычисления максимума (минимума) для каждой из пар одиночных интервалов $(\widetilde{a}^{i}, \widetilde{b}^{j})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, а, во-вторых, не для каждой пары полиинтервалов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ существует максимальный (минимальный) полиинтервал. Поэтому гораздо практичнее сначала установить существование максимального (минимального) из двух заданных полиинтервалов, используя подходящий критерий существования, и лишь после этого вычислять максимальный и минимальный полиинтервал. Простой критерий существования максимального (минимального) из заданных полиинтервалов дает нижеследующая теорема. Она же сразу устанавливает, какой из полиинтервалов является максимальным, а какой – минимальный.

В предыдущей работе автора [7] были введены отношения между интервалами на базе теории множеств. При этом для любых двух интервалов $\widetilde{a}=[a_1,a_2]$, $\widetilde{b}=[b_1,b_2]$ по определению:

$$\widetilde{a}=\widetilde{b}\text{, если } a_1=b_1,\ a_2=b_2, \qquad (13)$$

$$\widetilde{a}\geq\widetilde{b}\text{, если } \widetilde{a}\vee\widetilde{b}=\widetilde{a},\ \widetilde{a}\wedge\widetilde{b}=\widetilde{b}, \qquad (14)$$

$$\widetilde{a}\text{ не сравнимо с } \widetilde{b}\text{, если } \widetilde{a}\neq\widetilde{b},\ \widetilde{a}\ngeq\widetilde{b},\ \widetilde{b}\ngeq\widetilde{a}. \qquad (15)$$

На основании определений (13)–(15) было показано [7], что 1) для того, чтобы интервалы $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ находились в отношении $\widetilde{a}\geq\widetilde{b}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $a_1\geq b_1$, $a_2\geq b_2$; 2) для того чтобы интервалы $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ были несравнимы, необходимо и достаточно выполнения условий $a_1<b_1,\ a_2>b_2$ или $b_1<a_1,\ b_2>a_2$. Другими словами, для выполнения отношения $\widetilde{a}\geq\widetilde{b}$ требуется, чтобы интервал $\widetilde{a}$ был сдвинут относительно интервала $\widetilde{b}$ вправо обеими своими границами, а для несравнимости указанных интервалов требуется, чтобы один из них (безразлично какой) полностью накрывал другой.

Отношения порядка между полиинтервалами мы введем теперь аналогично такого же рода отношениям между интервалами. Именно, для любых двух полиинтервалов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ (7) по определению примем

$$\widetilde{A}=\widetilde{B}\text{, если } m=n,\ \widetilde{a}^1=\widetilde{b}^1,\ \widetilde{a}^2=\widetilde{b}^2,\dots\ \widetilde{a}^m=\widetilde{b}^m, \qquad (16)$$

$$\widetilde{A}\geq\widetilde{B}\text{, если } \widetilde{A}\vee\widetilde{B}=\widetilde{A},\ \widetilde{A}\wedge\widetilde{B}=\widetilde{B}, \qquad (17)$$

$$\widetilde{A}\text{ не сравнимо с } \widetilde{B}\text{, если } \widetilde{A}\neq\widetilde{B},\ \widetilde{A}\ngeq\widetilde{B},\ \widetilde{B}\ngeq\widetilde{A}. \qquad (18)$$

Теорема 1. Для того, чтобы два полиинтервала $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ вида (7) были сравнимы и находились в отношении $\widetilde{A}\geq\widetilde{B}$, необходимо и достаточно, чтобы входящий в состав $\widetilde{A}$ минимальный одиночный интервал $\widetilde{a}^1$ и входящий в состав $\widetilde{B}$ максимальный одиночный интервал $\widetilde{b}^n$ находились в отношении $\widetilde{a}^1\geq\widetilde{b}^n$.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие $\widetilde{a}^1\geq\widetilde{b}^n$. Тогда, по определению полиинтервалов, для всех i,j справедливо неравенство $\widetilde{a}^i\geq\widetilde{b}^j$. Отсюда ясно, что для всех i,j имеем $\widetilde{a}^i\vee\widetilde{b}^j=\widetilde{a}^i$, $\widetilde{a}^i\wedge\widetilde{b}^j=\widetilde{b}^j$. Таким образом, по формулам (11), (12) получаем

$$\widetilde{A}\vee\widetilde{B}=\bigcup_{i=1}^{m}\widetilde{a}^i=\widetilde{A},\ \widetilde{A}\wedge\widetilde{B}=\bigcup_{j=1}^{n}\widetilde{b}^j=\widetilde{B}.$$

Два последних соотношения, согласно определению (17) означают, что полиинтервалы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ сравнимы и находятся в отношении $\widetilde{A}\geq\widetilde{B}$. Что и требовалось доказать.

Необходимость. Пусть два полиинтервала $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ сравнимы и находятся в отношении $\widetilde{A}\geq\widetilde{B}$. Тогда, в соответствии с определением этого отношения (17), верны следующие два равенства $\widetilde{A}\vee\widetilde{B}=\widetilde{A}$, $\widetilde{A}\wedge\widetilde{B}=\widetilde{B}$. Выражая в них операции $\vee$ и $\wedge$ по формулам (11), (12), а полиинтервалы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ по формулам (7), перепишем их в виде

$$\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}(\widetilde{a}^i\vee\widetilde{b}^j)=\bigcup_{i=1}^{m}\widetilde{a}^i,\ \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}(\widetilde{a}^i\wedge\widetilde{b}^j)=\bigcup_{j=1}^{n}\widetilde{b}^j.$$

В первом из равенств правая часть зависит только от интервалов $\widetilde{a}^i$, $i=\overline{1,m}$, поэтому, чтобы имело место равенство, его левая часть также должна зависеть только от интервалов $\widetilde{a}^i$, $i=\overline{1,m}$, а это возможно только при выполнении условия $\widetilde{a}^i\geq\widetilde{b}^j$ для всех i,j. Аналогично выводится выполнение этого условия из второго выписанного равенства. Выполнение данного условия означает, что любой одиночный интервал $\widetilde{a}^i$, входящий в состав полиинтервала $\widetilde{A}$, находится в отношении $\geq$ к любому одиночному интервалу $\widetilde{b}^j$, входящему в состав полиинтервала $\widetilde{B}$. В частности, справедливо $\widetilde{a}^1\geq\widetilde{b}^n$, что и требовалось доказать.

Формулы (11), (12) дают конструктивные правила выделения большего и меньшего из двух имеющихся полиинтервалов для тех случаев, когда они существуют. Теорема 1 дает простое правило проверки существования большего и меньшего из двух имеющихся полиинтервалов. Теперь алгоритм решения различных задач исследования систем с полиинтервальными характеристиками, требующих сравнения полиинтервалов, можно представить следующим образом.

Шаг 1. Построение абстрактной математической модели, представляющей решение задачи как попарное сравнение некоторого числа полиинтервалов, являющихся числовыми значениями характеристик изучаемой системы в условиях неопределенности, с целью последующего выделения полиинтервалов, являющихся решением задачи.

Шаг 2. Анализ подлежащих сравнению пар полиинтервалов, с целью выявления пар сравнимых и несравнимых полиинтервалов. Анализ проводится с помощью условий (16)–(18). При этом пары, удовлетворяющие условию (16) (равные полиинтервалы) или условию (17) (полиинтервалы, находящиеся в отношении $\geq$), относим к парам сравнимых полиинтервалов, а пары, удовлетворяющие условию (18) – к парам несравнимых полиинтервалов.

Шаг 3. Построение структурной математической модели решения задачи в виде частично ориентированного графа, с использованием шагов 1, 2. Вершинами графа являются полиинтервалы, выделенные на шаге 1, его ребрами – линии, соединяющие вершины равных полиинтервалов, его дугами (ориентированными ребрами) – линии, соединяющие вершины неравных полиинтервалов в направлении от меньших полиинтервалов к большим. При этом вершины, отвечающие несравнимым полиинтервалам, не соединяются никакими линиями. При построении граф-модели используются пары равных полиинтервалов, пары полиинтервалов с отношением $\geq$ и пары несравнимых полиинтервалов, полученные на шаге 2.

Шаг 4. Вычисление по структурной граф-модели вершины, соответствующей полиинтервалу, представляющему собой решение задачи. Чаще всего в качестве такого полиинтервала берется экстремальный – максимальный или минимальный полиинтервал. Возможны и другие варианты.

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В статье детально разработана новая математическая модель неопределенности – полиинтервал. Определены оптимальные операции (взятие максимума и минимума) над полиинтервалами, выведены правила выполнения этих операций. Установлены необходимые и достаточные условия существования этих операций, т.е. условия сравнимости полиинтервалов. Ниже дан пример использования полученных результатов для принятия оптимального решения в экономике. Его можно рассматривать как небольшой эксперимент по проверке работоспособности предложенного подхода.

Пример. При поступлении на службу работник выбирает между компаниями A, B и C. Фирма A предлагает ему месячную зарплату (в зависимости от заказов фирмы) в размере 10000 ± 2000 рублей или 15000 ± 2000 рублей, аналогично фирма B – зарплату в размере 5000 ± 1000 руб. или 8000 ± 1000 руб., фирма C – в размере 6000 ± 1000 рублей или 9000 ± 1000 рублей. Работнику нужно выбрать фирму с максимальной зарплатой.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве практического результата применения разработанных выше методов приведем решение примера из п. 4

Решение. Шаг 1. В фирме A первую заработную плату работника можно представить как интервал $[a_1^1, a_2^1] = [8000{,}12000]$, 2-ю – как интервал $[a_1^2, a_2^2] = [13000{,}17000]$. Аналогично, в фирме B первую зарплату работника можно представить как интервал $[b_1^1, b_2^1] = [4000\,{,}6000\,]$, а 2-ю – в виде интервала $[b_1^2, b_2^2] = [7000{,}9000]$, а в фирме C 1-ю зарплату можно представить как интервал $[c_1^1, c_2^1] = [5000{,}7000]$, 2-ю – как интервал $[c_1^2, c_2^2] = [8000{,}10000]$. Итак, месячную зарплату работника в фирмах A, B, C можно представить соответственно полиинтервалами

$$\widetilde{A} = \bigcup_{i=1}^{2} [a_1^i, a_2^i] = [8000\,{,}12000\,] \cup [13000\,{,}17000\,],$$

$$\widetilde{B} = \bigcup_{j=1}^{2} [b_1^j, b_2^j] = [4000{,}6000] \cup [7000{,}9000],$$

$$\widetilde{C} = \bigcup_{j=1}^{2} [c_1^j, c_2^j] = [5000{,}7000] \cup [8000{,}10000].$$

Абстрактная математическая модель решения задачи представляет собой совокупность полиинтервалов $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$, попарное сравнение которых должно на следующих шагах выделить максимальный полиинтервал, являющийся решением задачи.

Шаг 2. Попарно сравниваем полиинтервалы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ с помощью условий (16)–(18) и теоремы 1. Пара ($\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$). В результате сравнения полиинтервалов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ с помощью теоремы 1, находим $\widetilde{a}^1 = [8000{,}12000]$, $\widetilde{b}^2 = [7000{,}9000]$, здесь $8000 > 7000$, $12000 > 9000$, и поэтому, согласно (14), $\widetilde{a}^1 \geq \widetilde{b}^2$, откуда по теореме 1 $\widetilde{A} \geq \widetilde{B}$.

Пара ($\widetilde{A}$, $\widetilde{C}$). По тем же самым условиям находим $\widetilde{a}^1 = [8000\,{,}12000\,]$, $\widetilde{c}^2 = [8000\,{,}10000\,]$, здесь $8000 \geq 8000$, $12000 > 10000$ и потому, согласно (14), $\widetilde{a}^1 \geq \widetilde{c}^2$, и по теореме 1 $\widetilde{A} \geq \widetilde{C}$.

Пара ($\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$). С помощью тех же условий находим $\widetilde{b}^1 = [4000{,}6000]$, $\widetilde{c}^2 = [8000{,}10000]$, получаем $4000 < 8000$, $6000 < 10000$ и потому $\widetilde{b}^1 \ngeq \widetilde{c}^2$, откуда по теореме 1 $\widetilde{B} \ngeq \widetilde{C}$. Аналогично имеем $\widetilde{c}^1 = [5000{,}7000]$, $\widetilde{b}^2 = [7000{,}9000]$, где $5000 < 7000$, $7000 < 9000$, поэтому $\widetilde{c}^1 \ngeq \widetilde{b}^2$, откуда по теореме 1 $\widetilde{C} \ngeq \widetilde{B}$. С другой стороны, по условию (16), $\widetilde{B} \neq \widetilde{C}$, таким образом, в соответствии с (18) полиинтервалы $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ не сравнимы.

Шаг 3. По результатам шагов 1,2 получаем структурно-математическую модель решения задачи в виде частично ориентированного графа (рис. 1). Вершины этого

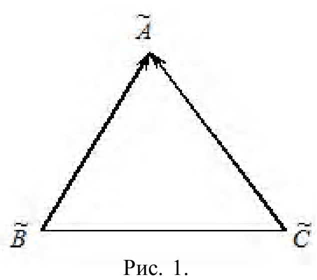

Рис. 1.

графа – полиинтервалы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$, его дуги ориентированы в направлении от меньших вершин $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ к большей вершине $\widetilde{A}$, а его ребро не ориентировано и соединяет несравнимые вершины, соответствующие полиинтервалам $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$.

Шаг 4. По структурной граф-модели (рис. 1) находим вершину, соответствующую максимальному полиинтервалу. Непосредственно из рис. 1 видно, что этой вершиной является $\widetilde{A}$, т.к. соответствующий полиинтервал $\widetilde{A}$ больше других полиинтервалов $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$. Обратим внимание, что оба полиинтервала, не являющиеся максимальными ($\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$) не сравнимы между собой, но это не повлияло на решение задачи. Это решение – выбор работником, из трех предложивших ему работу фирм A, B, C, фирмы A, как предложившей максимальную зарплату.

6 ОБСУЖДЕНИЕ

Как показано в статье, дальнейшее развитие известной операции сравнения интервалов неопределенности, с выделением максимального и минимального интервала [7], приводит к новой операции сравнения полиинтервалов, с выделением максимального и минимального полиинтервала. Таким образом, и для такой более сложной по сравнению с интервалом модели неопределенности, как полиинтервал, оказывается возможным сравнивать объекты и выбирать максимальный (минимальный) из них. Это открывает возможность решения задач оптимизации для неопределенных систем и процессов с полиинтервальными параметрами. Полиинтервальная модель неопределенности является более сложной, чем интервальная. Она встречается достаточно часто в военном деле, экономике, технике, социальной сфере и других областях и поэтому заслуживает изучения и разработки. Это изучение и разработку применительно к проблеме оптимизации естественно осуществлять, используя подходы интервальной математики к оптимизации [7] и развивая их в направлении учета многоинтервальности. И здесь выявляется важный факт: сравнение двух полиинтервалов, как показывает теорема 1, сводится к сравнению их крайних интервалов, благодаря этому сложность решения проблемы оптимизации систем с полиинтервальными параметрами такая же, как и в случае систем с интервальными параметрами. Это делает задачи оптимизации систем с полиинтервальными параметрами реально разрешимыми.

Представляет также интерес сравнение описанной процедуры сравнения полиинтервальных величин с аналогичными процедурами для случайных величин [13] и нечетких величин [1]. И здесь выясняется, что первая из процедур намного проще последних. Это связано с тем, что сравнение двух полиинтервальных величин, согласно доказанной теореме 1, требует всего лишь сравнения двух интервалов, т.е. двух пар чисел, в то время как сравнение двух случайных или нечетких величин требует вычисления интегралов [1, 13]. Таким образом, работа с полиинтервальными неопределенностями (как и с интервальными) значительно легче, чем работа со стохастическими и нечеткими неопределнностями.

7 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье сформулирована задача дальнейшего изучения новой модели неопределенности – полиинтервала, обобщающей известную модель неопределенности – интервал – на случай области из нескольких последовательных интервалов неопределенности. С помощью известной из интервальной математики теоретико-множественной конструкции, вводящей операции над интервалами, в том числе, операции взятия максимума (минимума), аналогичным путем введена операция взятия максимума (минимума) двух полиинтервалов. Разработана методика сведения операции взятия максимума и минимума полиинтервалов к аналогичным операциям с интервалами. С ее помощью доказана основная теорема, сводящая сравнение двух полиинтервалов, с выделением максимального и минимального из них, к операции сравнения двух интервалов – крайнего левого интервала одного полиинтервала и крайнего правого интервала другого. На примере из области экономики показана практическая польза разработанной теории и методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде. – М. : Мир. – 1976. – 176 с.
2. Левин В. И. Непрерывная логика / В. И. Левин. – Пенза : ПензГТА, 2008. – 496 с.
3. Горбань И. И. Феномен статистической устойчивости / И. И. Горбань. – Киев : Наукова Думка, 2014. – 370 с.
4. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М. : Мир, 1987. – 370 с.
5. Левин В. И. Интервальная математика и исследование систем в условиях неопределенности / В. И. Левин. – Пенза : Изд-во Пензенского технологического ин-та, 1998. – 55 с.
6. Левин В. И. Полиинтервалы, их исчисление и применение / В. И. Левин // Системы управления, связи и безопасности. – 2016. – № 3. – С. 239–246.
7. Левин В. И. Методы оптимизации систем в условиях интервальной неопределенности параметров / В. И. Левин // Информационные технологии. – 2012. – № 4. – С. 52–59.
8. Вощинин А.П. Оптимизация в условиях неопределенности / А. П. Вощинин, Г.Р. Сотиров. – М. : МЭИ, София : Техника, 1989. – 226 с.
9. Tsoukias A. Characterization of PQI Interval Order / A. Tsoukias, P. A Vincke // Discrete Applied Mathematics. – 2003. – №127 (2). – P. 387–397.
10. Ащепков Л. Т. Редукции интервальных бескоалиционных игр / Л. Т. Ащепков, Д. В. Давыдов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 11. – С. 2001–2008.
11. Давыдов Д. В. Идентификация параметров линейных интервальных управляемых систем с интервальным наблюдением / Д. В. Давыдов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 6. – С. 25–29.
12. Горбань И. И. Случайность и гиперслучайность / И. И. Горбань. – Киев : Наукова Думка, 2016. – 290 с.
13. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Высшая школа, 2006. – 575 с.

Статья поступила в редакцию 16.07.2017
После дораблтки 15.08.2017.

Левін В. І.

Д-р технічних наук, професор Пензенського державного технологічного університету, Пенза, Росія

ПОЛІІНТЕРВАЛЬНА МАТЕМАТИКА Й ОПТИМІЗАЦІЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Актуальність. В останні десятиліття в цивільній і військовій сферах усе частіше зустрічаються нові інформаційні технології, засновані на нових підходах до опису різних видів невизначеності. Ці технології широко застосовуються у техніці, економіці, соціальній сфері. Для їхньої підтримки необхідні нові досить могутні математичні моделі і методи. У зв'язку з цим ця стаття, присвячена розробці нової моделі невизначеності (поліінтервал) і математичних методів і моделей для її вивчення, стосовно до рішення задач оптимізації в умовах невизначеності, є дуже актуальною.

Мета статті полягає в детальній розробці нової математичної моделі невизначеності – поліінтервалу, що є послідовністю кінцевого числа незалежних інтервалів невизначеності, з метою оптимізації різноманітних технічних, економічних, соціальних і інших систем з поліінтервальними параметрами.

Метод. Для досягнення поставленої мети в статті запропоновано поширити на вивчення оптимальних операцій над поліінтервалами відомий у інтервальній математиці метод введення операцій над інтервалами у вигляді теоретико-множинного узагальнення відповідних операцій над дійсними числами.

Результат. У статті детально розроблена нова математична модель невизначеності – поліінтервал. Визначено оптимальні операції (max, min) над поліінтервалами, виведені правила їхнього виконання. Установлено необхідні і достатні умови існування цих операцій, тобто умови порівнянності поліінтервалів по відносинам «більше» і «менше». Дано приклад використання отриманих результатів для прийняття оптимального економічного рішення про вибір найкращого місця роботи за критерієм «найбільша зарплата». Показано, що поліінтервал, що є більш складною моделлю невизначеності систем, ніж інтервал, дозволяє досліджувати невизначені системи з такими ж витратами часу.

Висновки. Наукова новизна даної роботи полягає у запропонованій автором новій математичнійї моделі невизначеності різних систем у виді поліінтервалів, разом з математичним апаратом, що дозволяє виконувати оптимальні операції над поліінтервалами і тим самим таким, що дає можливість вирішувати задачі оптимізації технічних, економічних, соціальних і інших систем з поліінтервальними параметрами.

Ключові слова: поліінтервали, порівняння поліінтервалів, максимальний (мінімальний) поліінтервал.

Levin V.I.

Dr Sc., Professor of Mathematical Department of Penza State Technological University, Penza, Russia

POLYINTERVAL MATHEMATICS AND OPTIMIZATION IN CONDITIONS OF UNCERTAINTY

Contex. In recent decades, in the civil and military spheres new information technologies are increasingly encountered based on new approaches to describing various types of uncertainty. These technologies are widely used in engineering, economics, social sphere. To support them, new fairly powerful mathematical models and methods are needed. In this regard, this article devoted to the development of a new model of uncertainty (polyinterval) and mathematical methods and models for its study with regard to solving optimization problems under uncertainty is very relevant.

Objective. The aim of the article is to elaborate a new mathematical model of uncertainty – a polyinterval which is a sequence of a finite number of independent intervals of uncertainty in order to optimize various technical, economic, social and other systems with polyinterval parameters.

Method. To achieve this goal, it is proposed to extend the method of introducing operations on intervals in the form of a set-theoretical generalization of the corresponding operations over real numbers to the study of optimal operations over polyintervals.

Result. In the article a new mathematical model of non-definiteness is developed in detail – polyinterval. The optimal operations (max, min) over the polyintervals have been determined and the rules for their implementation have been derived. The necessary and sufficient conditions for the existence of these operations are established, i.e. the conditions for the comparability of polyintervals over the relations "more" and "less". An example of using the results obtained for making the optimal economic decision on choosing the best place of work by the criterion "the highest salary" is given. It is shown that the polyinterval, which is a more complex model of uncertainty than the interval, allows one to investigate uncertain systems with the same time costs.

Conclusions. The scientific novelty of this work consists in the proposed by the author new mathematical model of uncertainty of various systems in the form of polyintervals, in conjunction with a mathematical apparatus that allows performing optimal operations on polyintervals and thereby enabling the optimization of technical, economic, social and other systems with polyinterval parameters.

Keywords: interval value, polyinterval value, uncertainty, algebra of polyinterval values.

REFERENCES

1. Zade L. A. Ponjatie lingvisticheskoj peremennoj i ego primenenie k prinjatiju priblizhennyh reshenij. Moscow, Mir, 1976, 176 p.
2. Levin V.I. Nepreryvnaya Logika. Penza, Penza State Technological Academy, 2008, 496 p.
3. Gorban' I. I. Fenomen Statisticheskoy Ustoychivosti. Kiev, Naukova Dumka, 2014, 370 p.
4. Alefeld G., Herzberger J. Introduction to Interval Computation. N.Y., Academic Press, 1983, 352 p.
5. Levin V. I. Intervalnaya Matematika i Issledovanie Sistem v Usloviyah Neopredelennosti. Penza, Penza Technological Institute Publishing, 1998, 55 p.
6. Levin V.I. Poliintervaly, ih Ischislenie i Primenenie, *Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti*, 2016, No. 3, pp. 239–246.
7. Levin V. I. Metody Optimizacii Sistem v Usloviyah Intervalnoy Neopredelennosti Parametrov, *Informacionnye tehnologii,* 2012, No. 4, pp. 52–59.
8. Voschinin A. P., Sotirov G. R. Optimizaciya v Usloviyah Neopredelennosti. Moscow, MEI, Sofiya, Tehnika, 1989, 226 p.
9. Tsoukias A., Vincke P. A Characterization of PQI Interval Order, *Discrete Applied Mathematics*, 2003, No. 127 (2), pp. 387–397.
10. Aschepkov L. T., Davydov D. V. Reductions of Interval Noncooperative Games, *Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 2006, Vol. 46, No. 11, pp. 1910–1917.
11. Davydov D.V. Identification of Parameters of Linear Interval Controllable Systems with Interval Observation, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, Vol. 48, No. 6, pp. 861–865.
12. Gorban' I. I. Sluchainost' i Gipersluchainost'. Kiev, Naukova Dumka, 2016, 290 p.
13. Ventcel' E.S. Teoriya Veroyatnostey. Moscow, Vysshaya Shkola, 2016, 575 p.