УДК 519.852.6

Мамедов К. Ш.[1], Мамедов Н. Н.[2]

[1]*Д-р физ.-мат. наук. профессор Бакинского Государственного Университета и зав. отделом Института Систем Управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан*

[2]*Д-р философии по математике, ст. преподаватель Национальной Академии Авиации Азербайджана, Баку, Азербайджан*

ПОНЯТИЕ ГАРАНТИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ ПО ФУНКЦИОНАЛУ ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ И МЕТОДЫ ЕГО ПОСТРОЕНИЯ

Актуальность. Рассмотрена задача построения гарантированного субоптимального (приближенного) решения по функционалу в одномерной и многомерной задачах о ранце. Объектом исследования являлась модель с приращением коэффициентов целевой функции.

Цель работы. Разработка методов построения гарантированного субоптимального решения по функционалу в одномерной и многомерной задачах о ранце, т. е. найти такие минимальные изменения коэффициентов функционала в заданных интервалах, чтобы найденное решение гарантировало значения функционала не меньше, чем заранее фиксированного.

Метод. Введены понятия допустимого, гарантированного и гарантированного субоптимального решений по функционалу в многомерной задаче о ранце. В заданных интервалах необходимо найти такие минимальные изменения коэффициентов функционала, чтобы найденное решение гарантировало значение функционала не меньше, чем заранее фиксированного. Такое решение называем гарантированным решением по функционалу для одномерной и многомерной задачи о ранце. Разработаны методы их построения. Составлен программный комплекс для нахождения этих решений и проведены многочисленные вычислительные эксперименты над случайными задачами большой размерности.

Результаты. Разработан алгоритм для построения гарантированного субоптимального решения по функционалу в одномерной и многомерной задачах о ранце.

Выводы. Составлен программный комплекс для нахождения гарантированного субоптимального решения по функционалу и проведены многочисленные вычислительные эксперименты над случайными задачами большой размерности.

Ключевые слова: одномерная и многомерная задачи о ранце, гарантированное решение и гарантированное субоптимальное решения по функционалу, многокритериальная нелинейная задача Булевого программирования, принцип дихотомии, вычислительные эксперименты.

НОМЕНКЛАТУРА

$c_j, a_{ij}, a_j, b_i, \beta_j (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}), b$ – заданные целые неотрицательные числа;

$\alpha_{ij}, (j=\overline{1,n})$ – заданные неположительные целые числа;

$x_j, (j=\overline{1,n})$ j*-ый* неизвестный;

$X - n$-мерный вектор;

$X^k (k=0,1,2,...)$ – текущее субоптимальное (приближенное) решение в k-м шаге;

X^z – гарантированное субоптимальное решение по функционалу;

X^* – оптимальное решение;

X^S – субоптимальное (приближенное) решение;

f^* – оптимальное значение целевой функции;

f^S – субоптимальное (приближенные) значения целевой функции;

Δ^* – приращение оптимального значения f^*;

Δ^S – приращение субоптимального (приближенного) значения f^S;

p – фиксированный процент;

$\delta_j, (j=\overline{1,n})$ – приращение коэффициентов c_j;

j^* – фиксированный номер;

$f^k (k=0,1,2,...)$ – субоптимальное (приближенное) значение функционала в k-м шаге;

$\overline{X}^Z$ – текущие субоптимальные решения по функционалу;

$\overline{f}^Z$ – текущие субоптимальные (приближенные) значения целевой функции;

$c_{\text{ср}}$ – среднее изменение коэффициентов целевой функции;

$\Delta(f)$ – погрешность функционала.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую задачу Булевого программирования:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, (i=\overline{1,m}), \tag{2}$$

$$x_j = 0 \vee 1, (j=\overline{1,n}). \tag{3}$$

С целью выяснения практического значения ниже рассмотренной модели, дадим некоторые экономические интерпретации для задачи (1)–(3).

Допустим, что для реализации необходимо выбрать или игнорировать из каждых заданных проектов (мероприятия и т. д.). Если выбирается для реализации некоторый j-ый ($j=\overline{1,n}$) проект, то получается прибыль в объе-

DOI 10.15588/1607-3274-2018-1-19

ме $c_j, (j=\overline{1,n})$ единиц. Пусть для реализации этих проектов выделены m видов ресурсов в объеме – $b_i, (i=\overline{1,m})$ единиц. А для реализации j- ого $(j=\overline{1,n})$ объекта необходимо использовать a_{ij}, $(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$ единиц из выделенных ресурсов $b_i, (i=\overline{1,m})$ соответственно. Естественно, что необходимо реализовать такие проекты, в которых использование общих ресурсов не превышало бы выделенных ресурсов $b_i, (i=\overline{1,m})$, и одновременно полученная прибыль стала максимальной. Принимая неизвестные x_j, $(j=\overline{1,n})$, где

$$x_j=\begin{cases}1, \text{ если } j\text{-ый проект выбирается для реализации,}\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$$

экономико-математическая модель получается в виде (1)–(3). Целью данной работы является разработка методов построения гарантированного субоптимального решения по функционалу в одномерной и многомерной задачах о ранце. Другими словами, необходимо найти такие минимальные изменения коэффициентов функционала в заданных интервалах, чтобы найденное решение гарантировало значения функционала не меньше, чем заранее фиксированного.

Отметим что, это задача особенно актуальна в современной экономике, при учете финансовых проблем. Потому, что за счет изменения рыночных цен $c_j, (j=\overline{1,n})$ не изменяются затраты a_{ij}, $(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$ из выделенных ресурсов b_i, $(i=\overline{1,m})$.

1 ЛИТЕРАТУРНОЙ ОБЗОР

Общеизвестная задача (1)–(3), называется многомерной задачей о ранце и разработаны ряд методов [1–13, и т. д.] для построения оптимального и субоптимального (приближенного) решений этой задачи.

Допустим, что, каким-то известным методом найдено оптимальное или субоптимальное (приближенное) решение задачи (1)–(3) и определены соответствующие значения функционала (1). Предположим, заказчику интересно получить такое решение, которое гарантирует значения функции (1) не меньше, чем найденное. Очевидно, что для достижения этой цели возможно два варианта:

1) Не изменяя коэффициенты c_j и a_{ij}, $(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$, минимально увеличить (изменить) выделенные ресурсы $b_i, (i=\overline{1,m})$. Такие типы задач математически моделированы и решены в работах [14, 15].

2) Не изменяя коэффициенты a_{ij} и b_i, $(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$, минимально изменить цены $c_j, (j=\overline{1,n})$ в заданных интервалах $\lfloor \alpha_j, \beta_j \rfloor, (j=\overline{1,n})$. Эта задача в случае $m=1$ была решена в работе [16].

В данной работе рассмотрен второй вариант и разработан метод построения гарантированного решения по функционалу.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Допустим, что, оптимальное решение $X^*=(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ или некоторое субоптимальное решение $X^S=(x_1^S, x_2^S, ..., x_n^S)$ задачи (1)–(3) найдено каким-то методом. Тогда оптимальное f^* или субоптимальное значение f^S функции (1) можно вычислить:

$$f^*=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*;\quad f^S=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^S.$$

Предположим, что необходимо найти такое решение $X^*=(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ или $X^S=(x_1^S, x_2^S, ..., x_n^S)$ задачи (1)–(3) для которого максимальное или субоптимальное значение функции (1) стало не меньше, чем $f^*+\Delta^*$ или $f^S+\Delta^S$ соответственно. В частном случае, можно принять $\Delta^*=\left[f^*\cdot\frac{p}{100}\right]$ или $\Delta^S=\left[f^S\cdot\frac{p}{100}\right]$. Здесь p является фиксированным процентом f^* или f^S, а $[z]$– означает целую часть числа z. Этого можно добиться минимальным изменением коэффициентов $c_j, (j=\overline{1,n})$, в заданных интервалах $\lfloor \alpha_j, \beta_j \rfloor, (j=\overline{1,n})$ не изменяя заданные коэффициенты b_i и a_{ij}, $(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$. Таким образом получается следующая модель:

$$\sum_{j=1}^{n}(c_j+\delta_j)x_j \to \max, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, (i=\overline{1,m}), \tag{5}$$

$$\alpha_j \le \delta_j \le \beta_j, (j=\overline{1,n}), \tag{6}$$

$$x_j = 0 \vee 1, (j=\overline{1,n}). \tag{7}$$

Отметим, что решением задачи (4)–(7) является такое минимальное значение $\delta_j, (j=\overline{1,n})$ и вектор $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$, для которого выполняется ограничения (5)–(7) и одновременно функция (4) принимает максимальное значение. При этом, если для некоторой

j^*, $\delta_{j^*} < 0$, то соответствующий c_{j^*} уменьшается на δ_{j^*} единиц. Наоборот, если $\delta_{j^*} > 0$, то соответствующий c_{j^*} увеличивается на δ_{j^*} единиц. В случае $\delta_{j^*} = 0$ коэффициент c_{j^*} не меняется. Таким образом, получаем следующую математическую модель:

$$\delta_j \to \min, \ (j = \overline{1,n}) \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j + \delta_j) x_j \geq, f^* + \Delta^*, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ (i = \overline{1,m}), \tag{10}$$

$$\alpha_j \leq \delta_j \leq \beta_j, \ (j = \overline{1,n}), \text{ и целые}, \tag{11}$$

$$x_j = 0 \vee 1, (j = \overline{1,n}). \tag{12}$$

Необходимо отметить, что задача (8)–(12) является нелинейной (смотри (9)) многокритериальной задачей Булевого программирования. Естественно, что это задача также входит в класс NP-полных (т. е. трудно решаемых).

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Сначала введем следующие понятия.

Определение 1. Допустимым решением задачи (8)–(12) является n-мерный вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, который удовлетворяет ограничениям (9)–(12) при фиксированных $\delta_j, (j = \overline{1,n})$

Определение 2. Допустимое решение $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ задачи (8)–(12) дающее минимальное значение параметров $\delta_j, (j = \overline{1,n})$ назовем гарантированным решением по функционалу.

Учитывая, что задача (8)–(12) входит в класс NP-полных, то нахождение оптимального решения для задач большой размерности за реальное время невозможно. Поэтому появляется необходимость построения, гарантированного субоптимального (приближенного) решений задач (8)–(12). С этой целью введем следующие понятия.

Определение 3. Допустимое решение $X^S = (x_1^S, x_2^S, ..., x_n^S)$ задачи (8)–(12) дающее меньшее значение параметров $\delta_j, (j = \overline{1,n})$ будем называть гарантированным субоптимальным решением по функционалу.

Пусть, каким-то методом найдено субоптимальное решение $X^S = (x_1^S, x_2^S, ..., x_n^S)$ задачи (1)–(3).Тогда соответствующие значения f^S функции (1) составляет $f^S = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^S$. Таким образом, можно вычислить $\Delta^S = \left[f^S \cdot \frac{p}{100} \right]$, где p – фиксированный процент, а обозначение $[z]$ означает целую часть числа z.

Мы должны построить такой вектор $X^S = (x_1^S, x_2^S, ..., x_n^S)$, удовлетворяющий (10), (12), который позволяет найти целые значения $\delta_j, (j = \overline{1,n})$ обеспечивающие выполнение условий $\alpha_j \leq \delta_j \leq \beta_j$, $(j = \overline{1,n})$, и $\sum_{j=1}^{n} (c_j + \delta_j) x_j^S \geq, f^S + \Delta^S$.

Таким образом, нужно найти гарантированное субоптимальное решение по функционалу следующей задачи

$$\delta_j \to \min, \ (j = \overline{1,n}) \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j + \delta_j) x_j \geq f^S + \Delta^S, \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i = \overline{1,m}), \tag{15}$$

$$\alpha_j \leq \delta_j \leq \beta_j, \quad (j = \overline{1,n}), \quad \text{и целые}, \tag{16}$$

$$x_j = 0 \vee 1, (j = \overline{1,n}). \tag{17}$$

Процесс построения гарантированного субоптимального решения по функционалу задачи (13)–(17) проводится методом дихотомии (деления пополам). В начале принимаем $\delta_j := \alpha_j$, $(j = \overline{1,n})$ поскольку необходимо минимизировать значения параметров $\delta_j, (j = \overline{1,n})$. При этом, с целью запомнить заданных значений $c_j, (j = \overline{1,n})$ примем $c_j' := c_j, (j = \overline{1,n})$. После этого принимая $c_j := c_j' + \delta_j, (j = \overline{1,n})$ находим субоптимальное решение $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ в задаче (1)–(3). Тогда соответствующее значение функции (1) составит $f^0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0$.

Очевидно, что, $f^0 < f^S + \Delta^S$, поскольку начальные значения параметров $\delta_j, (j = \overline{1,n})$ отрицательные. Для того, чтобы построить новую задачу типа (1)–(3), используя принцип дихотомии принимаем

$\delta_j := \frac{\alpha_j + \beta_j}{2}, (j = \overline{1,n})$ и определяем новые значения коэффициентов функции (1): $c_j := c_j' + \delta_j, (j = \overline{1,n})$. После этого находим субоптимальное решение $X^1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$ текущей задачи (1)–(3) и соответствующее значение $f^1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^1$.

Для значения f^1 возможно 2 случая: 1) $f^1 < f^S + \Delta^S$; 2) $f^1 \geq f^S + \Delta^S$.

В первом случае необходимо принимать $\alpha_j := \delta_j$ и $\delta_j := \frac{\alpha_j + \beta_j}{2}, (j = \overline{1,n})$. Далее принимая новые значения $c_j := c_j' + \delta_j, (j = \overline{1,n})$ находим решение $X^2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$ новой задачи (1)–(3) и соответствующее значение

$$f^2 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^2. \qquad (18)$$

А в случае $f^1 \geq f^S + \Delta^S$, запоминая $X^S := X^1$ и $\overline{\delta_j} := \delta_j, (j = \overline{1,n})$ принимаем $\beta_j := \delta_j$ и $\delta_j := \frac{\alpha_j + \beta_j}{2}, (j = \overline{1,n})$. После этого фиксируем $c_j := c_j' + \delta_j, (j = \overline{1,n})$. Необходимо отметить, что наша цель является минимизация параметров $\delta_j, (j = \overline{1,n})$ в интервале $\left[\alpha_j, \beta_j\right], (j = \overline{1,n})$.

Далее, находим субоптимальное решение $X^2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$ задачи (1)–(3) и соответствующие значения

$$f^2 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^2. \qquad (19)$$

Отметим, что найденные значения f^2 из соотношений (18) и (19) различны, поскольку они соответствуют различным значениям $\delta_j, (j = \overline{1,n})$. Другими словами, оба варианта отмеченные выше не могут выполняться одновременно.

Для значения f^2, как отмечено выше возможны два случая: либо $f^2 < f^S + \Delta^S$, либо $f^2 \geq f^S + \Delta^S$. Процесс решения повторяется аналогично вышеуказанному, делением интервалов $\left[\alpha_j, \beta_j\right], (j = \overline{1,n})$ пополам.

Вычисления завершаются, в случае выполнения $\left|\beta_j - \alpha_j\right| \leq 1$ для всех $j, (j = \overline{1,n})$. Другими словами, процесс решения продолжается до такого шага k, пока выполняется условия $\left|\beta_j - \alpha_j\right| \leq 1$ для всех $j, (j = \overline{1,n})$. Особенно отметим, что в процессе построения гарантированного субоптимального решения вышеуказанным образом, в каком-то шаге l, $1 \leq l \leq k$, если $f^l \geq f^S + \Delta^S$, то запоминается $X^S := X^l$ и $\overline{\delta_j} := \delta_j, (j = \overline{1,n})$.

В конечном итоге, коэффициенты функции (1) принимают значения $c_j := c_j' + \delta_j, (j = \overline{1,n})$. Отсюда легко определяются изменения (увеличение или уменьшение) исходных значений коэффициентов $c_j, (j = \overline{1,n})$.

В процессе решения, последний запомненный вектор $X^S = (x_1^S, x_2^S, ..., x_n^S)$ является гарантированным субоптимальным решением по функционалу для задачи (1)–(3).

Отметим что, разработанный выше метод построения, гарантированного субоптимального решения по функционалу в случае $m = 1$, т. е. для задачи о ранце выполняется более просто. В этом случае задача (1)–(3) принимает следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad (20)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, \qquad (21)$$

$$x_j = 0 \vee 1, (j = \overline{1,n}). \qquad (22)$$

Тогда для задачи (20)–(22) соответствующая задача (8)–(12) будет принимать следующий вид:

$$\delta_j \to \min, \ (j = \overline{1,n}) \qquad (23)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j + \delta_j) x_j \geq f^S + \Delta^S, \qquad (24)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, \qquad (25)$$

$$\alpha_j \le \delta_j \le \beta_j, \ (j=\overline{1,n}), \text{ и целые,} \quad (26)$$

$$x_j = 0 \vee 1, (j=\overline{1,n}). \quad (27)$$

Теперь напишем алгоритм для построения гарантированного субоптимального решения по функционалу для задачи (20)–(22). Другими словами, напишем алгоритм решения задачи (23)–(27).

Шаг 1. Ввод целых чисел $n, c_j, a_j, \alpha_j, \beta_j (j=\overline{1,n}), p$ и b.

Шаг 2. Построить начальное субоптимальное решение $X^S=(x_1^S, x_2^S, ..., x_n^S)$ задачи (20)–(22) и вычислить $f^S=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^S$.

Шаг 3. Вычислить $\Delta^S=\left[f^S \cdot \frac{p}{100}\right]$, где $[z]$ означает целую часть число z.

Шаг 4. Принять $\delta_j := \alpha_j$, $c_j' := c_j$ и $c_j := c_j' + \delta_j, (j=\overline{1,n})$ и подставить значения $c_j, (j=\overline{1,n})$ в задаче (20)–(22).

Шаг 5. Построить субоптимальное решение $\overline{X}^Z=(\overline{x}_1^Z, \overline{x}_2^Z, ..., \overline{x}_n^Z)$ текущей задачи (20)–(22) и соответствующее значениям функционала $\overline{f}^Z=\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x}_j^Z$.

Если $|\beta_j - \alpha_j| \le 1$ для всех $j, (j=\overline{1,n})$ то переход к шагу 8.

Шаг 6. Если $\overline{f}^Z < f^S + \Delta^S$, то принять $\alpha_j := \delta_j$, $\delta_j := \frac{\alpha_j+\beta_j}{2}$, $c_j := c_j' + \delta_j, (j=\overline{1,n})$ и переход к шагу 5.

Шаг 7. Если $\overline{f}^Z \ge f^S + \Delta^S$ то запомнить $X^Z := \overline{X}^Z$ и принимая $\beta_j := \delta_j$, $\delta_j := \frac{\alpha_j+\beta_j}{2}$, $c_j := c_j' + \delta_j, (j=\overline{1,n})$ переход к шагу 5.

Шаг 8. Выдать на печать найденное гарантированное решение по функционалу $X^Z=(x_1^Z, x_2^Z, ..., x_n^Z)$ соответствующее значениям функционала $f^Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^Z$ и приращений $f^Z - f^S, \Delta^S, \ f^Z - f^S - \Delta^S$.

Шаг 9. Останов.

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Сначала применением разработанного метода в данной работе, найдем гарантированное субоптимальное решение по функционалу следующей задачи из книги [5].

$$15x_1+8x_2+12x_3+20x_4+17x_5+14x_6+6x_7+4x_8+5x_9+2x_{10} \to \max,$$

$$5x_1+3x_2+5x_3+9x_4+8x_5+7x_6+4x_7+3x_8+4x_9+2x_{10} \le 18,$$

$$x_j = 0 \vee 1, \quad (j=\overline{1,10}).$$

Субоптимальное решение и соответствующие значения функционала этой задачи являются $X^S=(1,1,1,0,0,0,1,0,0,0)$ и $f^S=41$. Запоминаем заданные коэффициенты функционала $c_j'=(15,8,12,20,17,14,6,4,5,2)$ Допустим, что значение $f^S=41$ необходимо увеличить на $\Delta^S=41$ единиц. Тогда полученная задача соответствующая (23)–(27), принимает следующий вид:

$$\delta_j \to \min, \ (j=\overline{1,10}). \quad (28)$$

$$(15+\delta_1)x_1+(8+\delta_2)x_2+(12+\delta_3)x_3+(20+\delta_4)x_4+(17+\delta_5)x_5+(14+\delta_6)x_6+$$

$$+(6+\delta_7)x_7+(4+\delta_8)x_8+(5+\delta_9)x_9+(2+\delta_{10})x_{10} \ge f^S+\Delta^S=50, \quad (29)$$

$$5x_1+3x_2+5x_3+9x_4+8x_5+7x_6+4x_7+3x_8+4x_9+2x_{10} \le 18, \quad (30)$$

$$\delta_1 \in [-3,5], \delta_2 \in [-2,6], \delta_3 \in [-1,5], \delta_4 \in [-4,0], \delta_5 \in [-3,1],$$

$$\delta_6 \in [-2,9], \delta_7 \in [-3,7], \delta_8 \in [-1,0], \delta_9 \in [0,5], \delta_{10} \in [0,3], \quad (31)$$

$$x_j = 0 \vee 1, \quad (j=\overline{1,10}). \quad (32)$$

В начальном этапе принимаем $\delta_j' = \alpha_j, (j=\overline{1,10})$ т.е. принимаем $\delta_j' = (-3,-2,-1,-4,-3,-2,-3,-1,0,0)$. Тогда подставляя эти величины вместо δ_j в задаче (28)–(32) получаем следующую текущую задачу:

$$12x_1+6x_2+11x_3+16x_4+14x_5+12x_6+3x_7+3x_8+5x_9+2x_{10} \to \max, \quad (33)$$

$$5x_1+3x_2+5x_3+9x_4+8x_5+7x_6+4x_7+3x_8+4x_9+2x_{10} \le 18, \quad (34)$$

$$x_j = 0 \vee 1, \quad (j=\overline{1,10}). \quad (35)$$

Субоптимальное решение и соответствующие значения задачи (33)–(35) будут $X^0=(1,1,1,0,0,0,0,0,1,0)$ и $f^0=34$. Поскольку $f^0=34<50$, то принимаем $\alpha_j = \delta_j'$, $\delta_j' = \frac{\alpha_j+\beta_j}{2}$, $(j=\overline{1,10})$. Тогда

$\delta_j' = (1, 2, 2, -2, -1, 3, 2, 0, 2, 1)$. Подставляя эти значения в задаче (28)–(32) получаем следующую задачу:

$$16x_1+10x_2+14x_3+18x_4+16x_5+17x_6+8x_7+4x_8+7x_9+3x_{10}\to\max, \quad (36)$$

$$5x_1+3x_2+5x_3+9x_4+8x_5+7x_6+4x_7+3x_8+4x_9+2x_{10}\le 18, \quad (37)$$

$$x_j = 0\vee 1, \quad (j=\overline{1,10}). \quad (38)$$

Субоптимальное решение и соответствующие значения функционала задачи (36)–(38) будут $X^1=(1,1,1,0,0,0,1,0,0,0)$ и $f^1=48$. Поскольку, $f^1=48<50$, то принимаем $\alpha_j=\delta_j'$, $\delta_j'=\frac{\alpha_j+\beta_j}{2}$, $(j=\overline{1,10})$. Тогда $\delta_j'=(3, 4, 3, -1, 0, 6, 4, 0, 3, 2)$. Учитывая эти значения в (29) задача (28)–(32) принимает следующий вид:

$$18x_1+12x_2+15x_3+19x_4+17x_5+20x_6+10x_7+4x_8+8x_9+4x_{10}\to\max, \quad (39)$$

$$5x_1+3x_2+5x_3+9x_4+8x_5+7x_6+4x_7+3x_8+4x_9+2x_{10}\le 18, \quad (40)$$

$$x_j = 0\vee 1, \quad (j=\overline{1,10}). \quad (41)$$

Субоптимальное решение и соответствующие значения функционала в задаче (39)–(41) будут $X^2=(1,1,1,0,0,0,1,0,0,0)$ и $f^2=55$. Так как, здесь $f^2=55>50$, то принимаем $\beta_j=\delta_j'$, $\delta_j'=\frac{\alpha_j+\beta_j}{2}$, $(j=\overline{1,10})$. Тогда получим $\delta_1\in[1,3]$, $\delta_2\in[2,4]$, $\delta_3\in[2,3]$, $\delta_4\in[-2,-1]$, $\delta_5\in[-1,0]$, $\delta_6\in[3,6]$, $\delta_7\in[2,4]$, $\delta_8\in[0,0]$, $\delta_9\in[2,3]$, $\delta_{10}\in[1,2]$.

В результате получаем $\delta_j'=(2, 3, 2, -2, 0, 4, 3, 0, 2, 1)$. Учитывая эти значения в (29) получаем:

$$17x_1+11x_2+14x_3+18x_4+17x_5+18x_6+9x_7+4x_8+7x_9+3x_{10}\to\max, \quad (42)$$

$$5x_1+3x_2+5x_3+9x_4+8x_5+7x_6+4x_7+3x_8+4x_9+2x_{10}\le 18, \quad (43)$$

$$x_j = 0\vee 1, \quad (j=\overline{1,10}). \quad (44)$$

Субоптимальное решение и соответствующие значения функционала задачи (42)–(44) будут $X^3=(0,1,1,0,0,1,0,1,0,0)$ и $f^3=47$. Поскольку $f^3=47<50$, то принимаем $\alpha_j=\delta_j'$, $\delta_j'=\frac{\alpha_j+\beta_j}{2}$, $(j=\overline{1,10})$. Тогда $\delta_j'=(2, 3, 2, -1, 0, 5, 3, 0, 2, 1)$. Учитывая эти значения в (29) задачи (28)–(32) принимают следующий вид:

$$17x_1+11x_2+14x_3+19x_4+17x_5+19x_6+9x_7+4x_8+7x_9+3x_{10}\to\max, \quad (45)$$

$$5x_1+3x_2+5x_3+9x_4+8x_5+7x_6+4x_7+3x_8+4x_9+2x_{10}\le 18, \quad (46)$$

$$x_j = 0\vee 1, \quad (j=\overline{1,10}). \quad (47)$$

Субоптимальное решение и соответствующие значения функционала задач (45) – (47) будут $X^4=(0,1,1,0,0,1,0,1,0,0)$ и $f^4=48$. Поскольку $f^4=48<50$, то принимаем $\alpha_j=\delta_j'$, $\delta_j'=\frac{\alpha_j+\beta_j}{2}$, $(j=\overline{1,10})$. Тогда получим $\delta_1\in[2,3]$, $\delta_2\in[3,4]$, $\delta_3\in[2,3]$, $\delta_4\in[-1,-1]$, $\delta_5\in[-1,-1]$, $\delta_6\in[5,6]$, $\delta_7\in[3,4]$, $\delta_8\in[0,0]$, $\delta_9\in[2,3]$, $\delta_{10}\in[1,2]$.

Поскольку удовлетворяется $|\beta_j-\alpha_j|\le 1$, $(j=\overline{1,10})$, то процесс вычисления останавливается. В результате получим $\delta_j'=(3, 4, 3, -1, 0, 6, 4, 0, 3, 2)$ и соответствующее решение будет $X^S=(1,1,1,0,0,0,1,0,0,0,)$. Следовательно, исходное значение коэффициентов заменяется на $c_j=(18,12,15,19,17,20,10,4,8,4)$.

В итоге получаем следующие основные показатели:

$c_{ср}=2{,}4$, $\Delta(f)=55-41=14$, $\Delta^S=9$, $\Delta(f)-\Delta^S=5$,

где $c_{ср}=\frac{\sum_{j=1}^{n}(c_j-c_j')}{n}$, $\Delta(f)=f^Z-f^S$.

Как видно, для получения гарантированного значения функционала не меньше, чем 50 среднее изменение коэффициентов целевой функции составило 2,4, а вместо ожидаемого приращения функционала 9 получили 14 единиц.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Для получения более подробной информация об эффективности в данной работе разработанного метода, были проведены многочисленные вычислительные эксперименты. Коэффициенты решенных задач, являются случайными целыми числами, из следующих интервалов:

$$0\le a_{ij}\le 999,\ 0\le c_j\le 999,\ b_i=\left[0.4\cdot\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right],\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$$

Здесь $[z]$ означает целую часть числа z. Результаты вычислительных экспериментов представлены в следующих таблицах 1–2. Приближенные решения построены методом [11].

Таблица 1 – Результаты процесса решения задачи (13)–(17)

$m \times n$	10×100	10×200	10×500	10×1000
$c_{\text{ср}}$	5,6	8,3	7,2	9,6
$\Delta(f)$	82	93	135	168
Δ^S	65	71	91	105
$\Delta(f)-\Delta^S$	17	22	44	63

Таблица 2 – Результаты процесса решения задачи (13)–(17)

$m \times n$	20×100	20×200	20×500	20×1000
$c_{\text{ср}}$	5,2	7,8	8,1	9,2
$\Delta(f)$	76	84	127	146
Δ^S	62	67	83	99
$\Delta(f)-\Delta^S$	14	17	44	48

6 ОБСУЖДЕНИЕ

Из выше приведенных таблиц видно, что для 8 случайно выбранных задач различной размерности среднее изменение коэффициентов целевой функции (1) находится в интервалах от 5,2 до 9,6 единиц. В этих задачах погрешность функционала меняется от 76 до 168 единиц. А приращение субоптимального (приближенного) значения f^S составляет от 62 до 105 единиц. Эти результаты показывают, что не существенно изменяя коэффициентов целевой функции, обеспечивается получение гарантированной прибыли. А это очень важно для решения реальных практических задач.

Таким образом, результаты проведенных экспериментов еще раз подтверждают практическое и теоретическое значения рассмотренной задачи в данной работе.

ВЫВОДЫ

Исходя из текста таблиц и обсуждений можно сделать следующие выводы. В работе рассмотрена математичекая модель построения гарантированного решения по функционалу на основе многомерной и одномерной задачи о ранце. Введены понятия допустимого, гарантированного и гарантированного субоптимального решений по функционалу. Разработан метод построения гарантированного субоптимального (приближенного) решения по функционалу этой задачи . Составлен программный комплекс для нахождения этих решений и проведены многочисленные вычислительные эксперименты над случайными задачами большой размерности.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках госбюджетной научно-исследовательской темы Института систем управления НАН Азербайджана «Разработка методов решения, алгоритмов и программных средств для решения различных классов задач целочисленного программирования» (номер гос. регистрации № 0101 Аз 00736). Отметим, что часть этой работы рассмотрена авторами в работе [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корбут А. А. Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. – М. : Наука, 1969. – 368 с.
2. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование) / М. М. Ковалев. – М. : УРСС, 2003. – 246 с.
3. Martello S. Knapsack problems, Algorithm and Computers implementations. / S. Martello, P. Toth. – John Wiley & Sons, Chichster, 1990. – 296 p.
4. Kellerer H. Knapsack problems. / H. Kellerer, U. Pferschy, D. Pisinger. – Berlin, Heidelberg, New-York : Springer Verlag, 2004. – 546 p.
5. Сигал И. Х. Введение в прикладное дискретное программирование: модели, вычислительные алгоритмы / И. Х. Сигал, А. П. Иванова. – М. : Физмат лит., 2007. – 304 с.
6. Сергиенко И. В. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации / И. В.Сергиенко, Т. Т. Лебедева, В. А. Рошин. – Киев : Наукова думка, 1980. – 276 с.
7. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И. В. Сергиенко. – АН УССР, Институт Кибернетики : Наукова Думка, 1988. – 471 с.
8. Сергиенко И. В. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач / И. В. Сергиенко, Л. Н. Козерацкая, Т. Т. Лебедева. – Киев : Наук. думка, 1995. – 169 с.
9. Сергиенко И. В. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы, решения, исследования / И. В. Сергиенко, В. П. Шило. – Киев : Нац. акад. наук Украины, Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова Наука. думка, 2003. – 261 с.
10. Мамедов К. Ш. Исследование по целочисленной оптимизации (методы, алгоритмы и вычислительные эксперименты) / К. Ш. Мамедов. – Германия : Lambert Academic Publishing, 2012. – 276 с.
11. Бабаев Дж.А. Методы построения субоптимальных решений многомерной задачи о ранце / Дж. А. Бабаев, К. Ш. Мамедов, М. Г. Мехтиев // ЖВМ и МФ. – 1978. – Т. 28, № 6. – С. 1443–1453.
12. Нуриев У. Г. Гибридный метод для решения многомерной задачи о ранце / У. Г. Нуриев. – Препринт ИК АН УССР, 1983. – 45 с.
13. Emelichev V. Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming / V. Emelichev, D. Podkopaev // Discrete Optimization. – 2010. – Vol. 7. – P. 48–63.
14. Мамедов К. Ш. Алгоритмы построения гарантированного решения и гарантированного приближенного решения многомерной задачи о ранце / К. Ш. Мамедов, Н. Н. Мамедов // Международный научно-технический журнал «Проблемы Управления и Информатики». – 2014. – № 5. – С. 30–37.
15. Mamedov K. Sh. Guaranteed solution and its finding in the Integer Programming Problems. / K. Sh. Mamedov, N. N. Mamedov // International Journal of Applied Science and Tecnology. – August. – 2015. – Vol. 5, № 4. – P. 46–54.
16. Мамедов К. Ш. Понятие гарантированного решения и гарантированного субоптимального решения относительно целевой функкии в задаче о ранце и его построение (на азерб. языке) / К. Ш. Мамедов, Н. Н. Мамедов // Изв. НАН Азерб. Баку. – 2016. – № 3. – С. 42–49.
17. Senjy S. An approach to linear programming with 0-1 variables. / S. Senjy, Y. Toyoda // J. Manag. Sci. – 1978. – V.15, № 4. – P. 196–207.

Статья поступила в редакцию 16.07.2017.
После доработки 01.09.2017.

Мамедов К. Ш.[1], Мамедов Н. Н.[2]

[1]Д-р фіз.-мат. наук. професор Бакинського Державного Університету та зав. відділом Інституту Систем Управління НАН Азербайджану, Баку, Азербайджан

[2]Д-р філософії з математики, ст. викладач Національної Академії Авіації Азербайджану, Баку, Азербайджан

ПОНЯТТЯ ГАРАНТОВАНОГО РІШЕННЯЗА ФУНКЦІОНАЛОМ ДЛЯ БАГАТОВИМІРНОЇ ЗАВДАЧІ ПРО РАНЕЦЫ І МЕТОДИ ЙОГО ПОБУДОВИ

Актуальність. Розглянуто задачу побудови гарантованого субоптимального (наближеного) рішення по функціоналу в одновимірній та багатовимірній задачах про ранець. Об'єктом дослідження є модель з приростом коефіцієнтів цільової функції.

Мета роботи. Розробка методів побудови гарантованого субоптимального рішення по функціоналу в одновимірній та багатовимірній задачах про ранець, тобто знайти такі мінімальні зміни коефіцієнтів функціонала в заданих інтервалах, щоб знайдене рішення гарантувало значення функціоналу не менше, ніж заздалегідь фіксоване.

Метод. Введено поняття допустимого, гарантованого і гарантованого субоптимального рішень по функціоналу в багатовимірній задачі про ранець. У заданих інтервалах необхідно знайти такі мінімальні зміни коефіцієнтів функціонала, щоб знайдене рішення гарантувало значення функціоналу не менш, ніж заздалегідь фіксоване. Таке рішення називаємо гарантованим рішенням по функціоналу для одновимірної і багатовимірної задачі про ранець. Розроблено методи їх побудови. Створено програмний комплекс для знаходження цих рішень і проведені численні обчислювальні експерименти над випадковими завданнями великої розмірності.

Результати. Розроблено алгоритм для побудови гарантованого субоптимального рішення по функціоналу в одновимірній та багатовимірній задачах про ранець.

Висновки. Створено програмний комплекс для знаходження гарантованого субоптимального рішення по функціоналу і проведені численні обчислювальні експерименти над випадковими завданнями великої розмірності.

Ключові слова: одномірна і багатовимірна задачі про ранець, гарантоване рішення і гарантоване субоптимальное рішення по функціоналу, багатокритеріальна нелінійна задача Булевого програмування, принцип дихотомії, обчислювальні експерименти.

Mamedov K. Sh.[1], Mamedov N. N.[2]

[1]Dr. Sc., Professor of Baku State University and head of Department of the Institute of Control Systems of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

[2]Ph. D., senior lecturer of the National Aviation Academy of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

THE CONCEPT OF GUARANTEED SOLUTION THROUGH THE FUNCTIONAL FOR MUTIDIMENTIONAL KNAPSACK PROBLEM AND METHODS OF ITS CONSTRUCTION

Contex. The problem of constructing a guaranteed suboptimal (approximate) solution with respect to a functional in one-dimensional and multidimensional knapsack problems is considered. The object of the study was a model with an increment of the coefficients of the objective function.

Objective. The methods of constructing guaranteed suboptimal solution through the functional in one-dimensional and multidimensional knapsack problem has been developed.

That is it is necessary to find such minimal changes coefficient of the objective function in the set of integer intervals so that the solution found guarantees the value of the functional not less than the predetermined value.

Method. The concept of guaranteed solution and guaranteed suboptimal solution relative to the objective function in the satchel problem is introduced. It is necessary to find such minimal changes coefficient of the objective function in the set of integer intervals so that the solution found guarantees the value of the functional not less than the predetermined value. Such kind of solution we name as guaranteed solution through the functional for one-dimensional and multidimensional knapsack problem. The methods of their construction has been developed. A software package was developed to find these solutions and numerous computational experiments were performed on random large-dimensional problems.

Results. The algorithm of constructing guaranteed suboptimal solution through the functional in one-dimensional and multidimensional knapsack problem has been developed.

Conclusions. A software package was developed to find the concept of guaranteed solution and guaranteed suboptimal solutions and numerous computational experiments were performed on random large-dimensional problems.

Keywords: one-dimensional and multidimensional knapsack problems, guaranteed solution and guaranteed suboptimal solution through the functional, non-linear multicriteria the problem of Boolean programming, dichotomy approach, computational experiment.

REFERENCES

1. Korbut A. A., Finkel'shtejn Yu. Yu. Diskretnoe programmirovanie. Moscow, Nauka, 1969. – 368 p.
2. Kovalev M. M. Diskretnaya optimizaciya (celochislennoe programmirovanie). Moscow, URSS, 2003, 246 p.
3. Martello S., Toth P. Knapsack problems, Algorithm and Computers implementations. John Wiley & Sons, Chichster, 1990, 296 p.
4. Kellerer H., Pferschy U., Pisinger D. Knapsack problems. Berlin, Heidelberg, New-York, Springer Verlag, 2004, 546 p.
5. Sigal I. X., Ivanova A. P. Vvedenie v prikladnoe diskretnoe programmirovanie: modeli, vychislitel'nye algoritmy. Moscow, Fizmat lit., 2007, 304 p.
6. Sergienko I. V., Lebedeva T. T., Roshin V. A. Priblizhennye metody resheniya diskretnyx zadach optimizacii. Kiev, Naukova dumka, 1980, 276 p.
7. Sergienko I. V. Matematicheskie modeli i metody resheniya zadach diskretnoj optimizacii. AN USSR, Institut Kibernetiki, Naukova Dumka, 1988, 471 p.
8. Sergienko I. V., Kozerackaya L. N., Lebedeva T. T. Iscledovanie ustojchivosti i parametricheskij analiz diskretnyx optimizacionnyx zadach. Kiev, Nauk. dumka, 1995, 169 p.
9. Sergienko I. V., Shilo V. P. Zadachi diskretnoj optimizacii: problemy, metody, resheniya, issledovaniya. Kiev, Nac. akad. nauk Ukrainy, In-t kibernetiki im. V. M. Glushkova Nauka. dumka, 2003, 261 p.
10. Mamedov K. Sh. Issledovanie po celochislennoj optimizacii (metody, algoritmy i vychislitel'nye e'ksperimenty). Germaniya, Lambert Academic Publishing, 2012, 276 p.
11. Babaev Dzh. A., Mamedov K. Sh., Mextiev M. G. Metody postroeniya suboptimal'nyx reshenij mnogomernoj zadachi o rance, *ZhVM i MF*, 1978, Vol. 28, No. 6, pp. 1443–1453.
12. Nuriev U. G. Gibridnyj metod dlya resheniya mnogomernoj zadachi o rance. Preprint IK AN USSR, 1983, 45 p.
13. Vladimir Emelichev, Podkopaev Dmitry Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming, *Discrete Optimization*, 2010, Vol. 7, pp. 48–63.
14. Mamedov N. N., Mamedov K. Sh., Algoritmy postroeniya garantirovannogo resheniya i garantirovannogo priblizhennogo resheniya mnogomernoj zadachi o rance, *Mezhdunarodnyj nauchno-texnicheskij zhurnal «Problemy Upravleniya i Informatiki»*, 2014, No. 5, pp. 30–37.
15. Mamedov N. N., Mamedov K. Sh. Guaranteed solution and its finding in the Integer Programming Problems, *International Journal of Applied Science and Tecnology*, 2015, August, Vol. 5, No. 4, pp. 46–54.
16. Mamedov N. N., Mamedov K. Sh. Ponyatie garantirovannogo resheniya i garantirovannogo suboptimalnogo resheniya otnositelno celevoj funkii v zadache o rance i ego postroenie (na azerb. yazyke), *Izv. NAN Azerb. Baku*, 2016, No. 3, pp. 42–49.
17. Senjy S., Toyoda Y. An approach to linear programming with 0–1 variables, *J. Manag. Sci*, 1978, Vol.15, No. 4, pp. 196–207.