*УДК 519.832.3*

Романюк В. В.

*Канд. техн. наук, доцент Хмельницького національного університету*

# РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЧІТКОЇ АНТАГОНІСТИЧНОЇ $2 \times 2$-ГРИ

Представлено концепцію розв'язування антагоністичної $2 \times 2$-гри, елементи матриці якої задаються у формі неодноелементних множин. Показано, що розв'язком такої нечіткої гри може бути спеціальний перетин розв'язків усіх звичайних $2 \times 2$-ігор, елементи матриць яких утворюють ці множини. Для випадків, коли такий перетин виявиться порожнім, пропонується використання нечіткого розв'язку нечіткої $2 \times 2$-гри. За умови неприйнятності подібного розв'язку будується безкоаліційна метагра, розв'язок якої міститиме оптимальні поведінки обох гравців у вихідній нечіткій $2 \times 2$-грі.

**Ключові слова:** моделювання в умовах невизначеності, прийняття рішень в умовах невизначеності, нечітка $2 \times 2$-гра, безкоаліційна метагра, оптимальна поведінка.

## ВСТУП

Прийняття рішень і моделювання в умовах невизначеності [1, 2] є звичною справою, якщо ставиться задача описати і дослідити певне явище або процес з достатньою для практики точністю й адекватністю. Там, де доводиться оцінювати параметри досліджуваного об'єкта, котрі не залежать один від одного і задані у формі інтервалів ненульової міри, застосовані принципи інтервального аналізу [3, 4]. Проте у випадках, коли хоча б два параметри досліджуваного об'єкта є взаємозалежними (не у строго функціональному сенсі), треба адаптовувати методи інтервального аналізу до відповідних нестрого функціональних залежностей. Подібні проблеми виникають і в задачах оптимального керування, частинним випадком яких є ігрові антагоністичні моделі [5], параметри яких задаються нечітко (або ж, іншими словами, ці параметри не можуть бути чітко, у формі точкового значення, оцінені).

## АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Питання нечіткого моделювання і прийняття рішень в умовах повної або часткової невизначеності досить грунтовно розглядаються в [1, 2, 6, 7]. Утім, розв'язування ігрових антагоністичних моделей, у яких задані на інтервалах параметри не мають відповідних імовірнісних мір, є невирішеною задачею. Одним зі способів локалізації або точкового оцінювання таких інтервальних параметрів є застосування розв'язку відповідної антагоністичної гри, ядро якої задається на квадраті можливих пар значень параметра, де мінімізуються втрати від некоректної точкової оцінки [8, 9]. Та цей спосіб є занадто песимістичним. Більш того, при розв'язуванні елементарних антагоністичних ігор, тобто $2 \times 2$-ігор, де принаймні один з чотирьох елементів матриці гри заданий у формі інтервалу (або сегмента), варто враховувати, що розв'язок матричної гри нетривіальним чином залежить від інтервальних елементів матриці гри [5, 8, 10]. Все це стимулює до формулювання більш простих або до вироблення менш неявних принципів розв'язування матричних ігор з інтервальними (нечіткими) елементами (нечітких ігор). І слід почати, очевидно, з розв'язування нечітких антагоністичних $2 \times 2$-ігор.

## ФОРМУЛЮВАННЯ МЕТИ ТА ЗАВДАНЬ СТАТТІ

Розв'язок $2 \times 2$-гри позначатимемо як $S = \langle \mathbf{P}_{\text{opt}}, \mathbf{Q}_{\text{opt}} \rangle$ з оптимальними стратегіями першого

$$\mathbf{P}_{\text{opt}} = \left[ p_{\text{opt}} \;\; 1 - p_{\text{opt}} \right] \in \\ \in \{ \mathbf{P} = [p \quad 1-p] \in \mathbb{R}^2 \mid p \in [0;1] \} \tag{1}$$

та другого

$$\mathbf{Q}_{\text{opt}} = \left[ q_{\text{opt}} \;\; 1 - q_{\text{opt}} \right] \in \\ \in \{ \mathbf{Q} = [q \quad 1-q] \in \mathbb{R}^2 \mid q \in [0;1] \} \tag{2}$$

гравців відповідно. Вважатимемо, що порядок слідування елементів множини $S = \langle \mathbf{P}_{\text{opt}}, \mathbf{Q}_{\text{opt}} \rangle$ міняти не можна, а усі операції над такими множинами (кортежами) мають здійснюватись окремо для кожного з двох їх елементів. В результаті проведення операцій над множинами виду $S = \langle \mathbf{P}_{\text{opt}}, \mathbf{Q}_{\text{opt}} \rangle$ з'являтимуться двоелементні кортежі, першим елементом яких буде множина з частин оптимальних стратегій першого гравця, а другим – множина з частин оптимальних стратегій другого гравця. Поставимо за мету формалізувати випадок, коли принаймні один з чотирьох елементів матриці $2 \times 2$-гри заданий у формі неодноелементної множини (заданий нечітко, але не на нечіткій множині). Слід запропонувати концепцію розв'язування таких елементарних антагоністичних ігор, де принаймні один з чотирьох елементів матриці $2 \times 2$-гри задається нечітко.

## ОСНОВНА ЧАСТИНА

**Означення 1.** Матричну $2 \times 2$-гру з ядром

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{3}$$

назвемо нечіткою, якщо $\exists i \in \{1, 2\}$ та $\exists j \in \{1, 2\}$ такі, що $a_{ij} \in A_{ij}$ при $|A_{ij}| > 1$.

**Зауваження 1.** Якщо усі чотири множини із $\left\{\{A_{ij}\}_{i=1}^{2}\right\}_{j=1}^{2}$ є скінченними, то нечітку $2 \times 2$-гру можна називати дискретно нечіткою.

**Зауваження 2.** По аналогії з визначенням цілком змішаної гри (або цілком змішаної стратегії гравця) нечітку $2 \times 2$-гру, у якій $|A_{ij}| > 1$ виконується $\forall i = \overline{1, 2}$ та $\forall j = \overline{1, 2}$, називатимемо цілком нечіткою.

**Зауваження 3.** У випадку, коли у системі $\left\{\{A_{ij}\}_{i=1}^{2}\right\}_{j=1}^{2}$ знайдеться хоча б одна одноелементна множина, відповідну нечітку $2 \times 2$-гру можна називати локально нечіткою. Поняття глобально нечіткої $2 \times 2$-гри, зрозуміло, співпадає з поняттям цілком нечіткої $2 \times 2$-гри.

**Зауваження 4.** Тривіальна локально нечітка $2 \times 2$-гра є найпростішою (елементарною) нечіткою $2 \times 2$-грою, де лише одна множина із $\left\{\{A_{ij}\}_{i=1}^{2}\right\}_{j=1}^{2}$ містить лише два елементи, а решта множин є одноелементними.

**Означення 2.** Якщо $A_{ij} = [a_{ij}^{\langle 1\rangle}; a_{ij}^{\langle 2\rangle}]$ і різниця $a_{ij}^{\langle 2\rangle} - a_{ij}^{\langle 1\rangle}$ є постійною $\forall i = \overline{1, 2}$ та $\forall j = \overline{1, 2}$, то $2 \times 2$-гру назвемо нечіткою з радіусом нечіткості $r = \dfrac{a_{ij}^{\langle 2\rangle} - a_{ij}^{\langle 1\rangle}}{2}$.

**Зауваження 5.** У випадку, коли $2 \times 2$-гра є дискретно нечіткою й $A_{ij} = \{a_{ij}^{\langle 1\rangle}, a_{ij}^{\langle 2\rangle}\}$ при $a_{ij}^{\langle 1\rangle} - a_{ij}^{\langle 2\rangle}$ $\forall i = \overline{1, 2}$ та $\forall j = \overline{1, 2}$ з постійною різницею $a_{ij}^{\langle 2\rangle} - a_{ij}^{\langle 1\rangle}$, теж можна вести мову про застосування означення 2. Крім того, кожна множина $A_{ij}$, будучи скінченною, може містити більше двох елементів, але так, що $\min A_{ij} = a_{ij}^{\langle 1\rangle}$ та $\max A_{ij} = a_{ij}^{\langle 2\rangle}$. Тоді й тут ніщо не перешкоджатиме оперувати радіусом нечіткості $r = \dfrac{a_{ij}^{\langle 2\rangle} - a_{ij}^{\langle 1\rangle}}{2}$, причому навіть там, де потужності множин у системі $\left\{\{A_{ij}\}_{i=1}^{2}\right\}_{j=1}^{2}$ будуть різними.

Тепер час означити те, що надалі вважатимемо розв'язком нечіткої $2 \times 2$-гри.

**Означення 3.** Якщо $S(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ є розв'язком $2 \times 2$-гри з матрицею (3), то розв'язком нечіткої $2 \times 2$-гри назвемо множину (кортеж)

$$\begin{aligned} &\bar{S}(A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}) = \\ &= \bigcap_{a_{11} \in A_{11}} \bigcap_{a_{12} \in A_{12}} \bigcap_{a_{21} \in A_{21}} \bigcap_{a_{22} \in A_{22}} S(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = \\ &= \langle \bar{P}_{\text{opt}}, \bar{Q}_{\text{opt}} \rangle. \end{aligned} \tag{4}$$

**Зауваження 6.** Зрозуміло, що далеко не кожна нечітка $2 \times 2$-гра має непорожній розв'язок. Розглянемо хоча б локально нечітку гру з ядром

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

у якому $a_{11} = \{a_{11}^{\langle 1\rangle}, a_{11}^{\langle 2\rangle}\}$ (приклад гри з тривіальною нечіткістю). Тут

$$p_{\text{opt}} = \frac{5-3}{a_{11} + 5 - 3 - 4} = \frac{2}{a_{11} - 2}$$

при $a_{11} \geq 4$, при $a_{11} \in (3;4)$ імовірність $p_{\text{opt}} = 1$, при $a_{11} = 3$ імовірність $p_{\text{opt}} \in \{1, 0\}$, а при $a_{11} < 3$ імовірність $p_{\text{opt}} = 0$. Також

$$q_{\text{opt}} = \frac{5-4}{a_{11} + 5 - 3 - 4} = \frac{1}{a_{11} - 2}$$

при $a_{11} \geq 4$, а при $a_{11} < 4$ імовірність $p_{\text{opt}} = 1$. І, очевидно, що, скажімо, для $a_{11} \in \{3.5, 4.5\}$ розв'язок нечіткої $2 \times 2$-гри з матрицею (5)

$$\begin{aligned} &\bigcap_{a_{11} \in \{3.5,\, 4.5\}} S(a_{11}, 4, 3, 5) = \langle [1\ 0], [1\ 0] \rangle \cap \\ &\cap \left\langle \left[\frac{2}{4.5-2}\ \ 1 - \frac{2}{4.5-2}\right], \left[\frac{1}{4.5-2}\ \ 1 - \frac{1}{4.5-2}\right] \right\rangle = \\ &= \langle [1\ 0], [1\ 0] \rangle \cap \left\langle \left[\frac{4}{5}\ \frac{1}{5}\right], \left[\frac{2}{5}\ \frac{3}{5}\right] \right\rangle = \\ &= \left\langle \left\{[1\ 0]\right\} \cap \left\{\left[\frac{4}{5}\ \frac{1}{5}\right]\right\}, \left\{[1\ 0]\right\} \cap \left\{\left[\frac{2}{5}\ \frac{3}{5}\right]\right\} \right\rangle = \\ &= \langle \varnothing, \varnothing \rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

Означивши розв'язок нечіткої $2 \times 2$-гри, дамо твердження про необхідну умову того, щоб він був непорожнім.

**Теорема 1.** Для того, щоб розв'язок (4) нечіткої $2\times 2$-гри був непорожнім, необхідно, щоб кожен розв'язок $S(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ був у чистих стратегіях.

**Доведення.** Нехай матрицею $2\times 2$-гри є (3), де немає сідлових точок у чистих стратегіях, а оптимальними стратегіями першого та другого гравців є (1) і (2) відповідно, причому для визначеності вважатимемо, що оптимальна імовірність

$$p_{\text{opt}} = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}$$

вибору першим гравцем його першої чистої стратегії належить інтервалу $(0;1)$. Власне, це означає, що оптимальна стратегія першого гравця є змішаною (або, що характерне для ігор з двома чистими стратегіями даного гравця, є цілком змішаною). При зміні одного зі значень $\left\{\{a_{ij}\}_{i=1}^{2}\right\}_{j=1}^{2}$ імовірність $p_{\text{opt}}$ буде змінюватись також. Виключення становитиме випадок, коли $a_{11} = a_{12}$ і змінюватиметься $a_{21}$ або $a_{22}$. Але тоді $p_{\text{opt}} = 1$ (вибір першої чистої стратегії першим гравцем) або $p_{\text{opt}} = 0$, а

$$q_{\text{opt}} = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}} = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{22}-a_{21}}$$

змінюватиметься при $a_{12}\ne a_{21}$ (без втрати загальності). Якщо ж $a_{12} = a_{21}$, то $q_{\text{opt}} = 1$ і гра міститиме сідлову точку у чистих стратегіях. Отже, якщо $2\times 2$-гра розв'язуватиметься у змішаних стратегіях, то кожен раз буде нова множина із множин оптимальних стратегій гравців. Перетин таких множин, очевидно, буде порожнім. Теорему доведено.

Дамо тепер таке означення, що має відношення до непорожнього розв'язку нечіткої $2\times 2$-гри.

**Означення 4.** Розв'язок $2\times 2$-гри з матрицею (3) назвемо стійким з радіусом $r$, якщо відповідна нечітка $2\times 2$-гра з елементами $a_{ij}\in[\tilde{a}_{ij}-r;\tilde{a}_{ij}+r]$ має непорожній розв'язок.

Відповідь на питання про існування розв'язків у чистих стратегіях певного класу нечітких $2\times 2$-ігор дає наступне твердження.

**Теорема 2.** Для довільної $2\times 2$-гри, елементи $\left\{\{a_{ij}\}_{i=1}^{2}\right\}_{j=1}^{2} = \{a, b, c, d\}$ матриці якої є різними, з розв'язком у чистих стратегіях знайдеться $r>0$ таке, що відповідна нечітка $2\times 2$-гра розв'язуватиметься у чистих стратегіях. При цьому, якщо для визначеності покладати

$$a<b<c<d, \tag{7}$$

значення $r\in(0;r_{\max})$ при

$$r_{\max} = \min\left\{\frac{b-a}{2}, \frac{c-b}{2}, \frac{d-c}{2}\right\}. \tag{8}$$

**Доведення.** Нехай $a<b<c<d$ і відповідна $2\times 2$-гра має сідлову точку у чистих стратегіях. Зрозуміло, що при заміні $a$ на $a_1$, $b$ на $b_1$, $c$ на $c_1$, $d$ на $d_1$ такій, що

$$a_1<b_1<c_1<d_1, \tag{9}$$

сідлова точка не зміниться. Візьмемо деяке $r>0$ і вимагатимемо, щоб

$$a+r<b-r,\quad b+r<c-r,\quad c+r<d-r.$$

Тоді

$$a_1 = a+r,\quad b_1\in[b-r;b+r],$$
$$c_1\in[c-r;c+r],\quad d_1 = d-r$$

і буде виконуватись (9). Маємо

$$r<\frac{b-a}{2}, \tag{10}$$

$$r<\frac{c-b}{2}, \tag{11}$$

$$r<\frac{d-c}{2}. \tag{12}$$

Оскільки усі елементи множини $\{a, b, c, d\}$ є різними і, взагалі, має місце (7), то праві частини у (10)–(12) є додатними, і розв'язком системи нерівностей (10)–(12) разом із умовою $r>0$ є множина

$$\left(0;\min\left\{\frac{b-a}{2}, \frac{c-b}{2}, \frac{d-c}{2}\right\}\right). \tag{13}$$

Теорему доведено.

Звісно, тоді, коли нечітка $2\times 2$-гра не має розв'язку, слід визначати її розв'язок в іншій формі.

**Означення 5.** Нечітким розв'язком нечіткої $2\times 2$-гри назвемо множину (кортеж)

$$\tilde{S}(A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}) =$$
$$= \bigcup_{a_{11}\in A_{11}}\bigcup_{a_{12}\in A_{12}}\bigcup_{a_{21}\in A_{21}}\bigcup_{a_{22}\in A_{22}} S(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) =$$
$$= \langle\tilde{P}_{\text{opt}}, \tilde{Q}_{\text{opt}}\rangle. \tag{14}$$

**Зауваження 7.** До такого типу розв'язку доводитиметься звертатись, якщо $S(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ є розв'язком $2\times 2$-гри з матрицею (3) й $\bar{S}(A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}) = \langle\varnothing, \varnothing\rangle$. Проте про практичну «сумісність» нечіткого розв'язку (14) може йти мова лише у випадках зв'язності множин оптимальних імовірностей $p_{\text{opt}}$ та $q_{\text{opt}}$ як елементів кортежу $\tilde{S}(A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22})$ з умовою того, що їх лебегівська міра на числовій прямій буде набагато меншою за одиницю. У випадку незв'язності одного з елементів кортежу $\tilde{S}(A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22})$ використання концепції нечіткого розв'язку нечіткої $2 \times 2$-гри представляється скрутним. Повертаючись до прикладу локально нечіткої гри з ядром (5), для якої незв'язність множин у кортежі

$$\tilde{S}(A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}) =$$
$$= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \cup \left\langle \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \right\rangle =$$
$$= \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

очевидна, тобто перший гравець має брати $p_{\text{opt}} \in \left\{ \frac{4}{5}, 1 \right\}$, а другий – має брати $q_{\text{opt}} \in \left\{ \frac{2}{5}, 1 \right\}$, можна говорити про неприйнятно велику відстань між елементами множини $\left\{ \frac{2}{5}, 1 \right\}$ (навіть відносно її першого елемента). Для множини $\left\{ \frac{4}{5}, 1 \right\}$ першого гравця відносна відстань між її елементами є значно меншою, тому нечіткий розв'язок тут є більш прийнятним для першого гравця.

Взагалі кажучи, прийнятність нечіткої множини оптимальних стратегій (у формі оптимальних імовірностей вибору першої чистої стратегії) гравця визначається різницею між її максимальним і мінімальним значеннями. Зокрема, чим менша різниця $\sup \tilde{P}_{\text{opt}} - \inf \tilde{P}_{\text{opt}}$, тим більш прийнятною для першого гравця є нечітка множина $\tilde{P}_{\text{opt}}$. Аналогічно і з різницею $\sup \tilde{Q}_{\text{opt}} - \inf \tilde{Q}_{\text{opt}}$ для другого гравця. Зрозуміло, що для зв'язних елементів кортежу (14) замість таких різниць, строго кажучи, слід використовувати лебегівську міру відповідних множин. Тільки тоді можна вести мову про прийнятність не тільки самої концепції нечітких розв'язків у нечітких $2 \times 2$-іграх, а й про використання цієї концепції.

Проте, з іншого боку, використання гравцями елементів нечітких множин $\tilde{P}_{\text{opt}}$ та $\tilde{Q}_{\text{opt}}$ у кортежі (14) породжуватиме свою гру, розв'язавши яку, вже можна буде не турбуватись про ступінь прийнятності використання нечіткого розв'язку $\langle \tilde{P}_{\text{opt}}, \tilde{Q}_{\text{opt}} \rangle$. Чистою стратегією кожного гравця у такій грі, котра, у певному смислі, стане вже метагрою по відношенню до вихідної нечіткої $2 \times 2$-гри, буде припущення про те, що матрицею $2 \times 2$-гри є елемент множини

$$\left\{ \left\{ \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\}_{a_{11} \in A_{11}} \right\}_{a_{12} \in A_{12}} \right\}_{a_{21} \in A_{21}} \right\}_{a_{22} \in A_{22}} \tag{15}$$

з відповідними розв'язком

$$S(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) =$$
$$= \langle \mathbf{P}_{\text{opt}}(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}), \mathbf{Q}_{\text{opt}}(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \rangle. \tag{16}$$

При цьому, очевидно, перший гравець робитиме свої припущення незалежно від другого і навпаки. Якщо обидва гравці одночасно «подумали» про одну й ту саму матрицю

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \in$$
$$\in \left\{ \left\{ \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\}_{a_{11} \in A_{11}} \right\}_{a_{12} \in A_{12}} \right\}_{a_{21} \in A_{21}} \right\}_{a_{22} \in A_{22}}, \tag{17}$$

то це ще означає, що перший гравець отримає виграш

$$v_{\text{opt}}(a, b, c, d) =$$
$$= [\mathbf{P}_{\text{opt}}(a, b, c, d)] \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot [\mathbf{Q}_{\text{opt}}(a, b, c, d)]^{\text{T}}, \tag{18}$$

а другий гравець стільки ж програє. В описуваній метагрі з'явиться ще один гравець – «природа» або непередбачувані «випадкові обставини», які зумовлять у момент часу обирання гравцями їх чистих стратегій (про обирання змішаних стратегій у певний момент часу говорити складно) той чи інший елемент множини (15) як матрицю (з фіксованими елементами) $2 \times 2$-гри. Наприклад, у локально нечіткій грі з ядром (5), у якому $a_{11} \in \{3.5, 4.5\}$, кожен з двох гравців і «природа» у певний момент часу можуть вибирати тільки одну з двох матриць

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3.5 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4.5 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тут, як метагра по відношенню до вихідної нечіткої $2 \times 2$-гри, породжуватиметься діадична гра [8, 11, 12] трьох осіб.

Взагалі кажучи, породженою метагрою по відношенню до вихідної нечіткої $2 \times 2$-гри буде безкоаліційна $(|A_{11}| \cdot |A_{12}| \cdot |A_{21}| \cdot |A_{22}|) \times (|A_{11}| \cdot |A_{12}| \cdot |A_{21}| \cdot |A_{22}|) \times$

$\times (|A_{11}| \cdot |A_{12}| \cdot |A_{21}| \cdot |A_{22}|)$-гра трьох осіб. Якщо через $\mathbf{M}_h$ позначати чисту стратегію $h$-го гравця як елемент множини (15), $\mathbf{P}_{\mathrm{opt}}(\mathbf{M}_1)$ та $\mathbf{Q}_{\mathrm{opt}}(\mathbf{M}_2)$ – як оптимальні стратегії в $\mathbf{M}_1$-грі та $\mathbf{M}_2$-грі відповідно, то у такій метагрі функція виграшу першого гравця

$$K_1(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3) = \\ = \mathbf{P}_{\mathrm{opt}}(\mathbf{M}_1) \cdot \mathbf{M}_3 \cdot [\mathbf{Q}_{\mathrm{opt}}(\mathbf{M}_2)]^{\mathrm{T}}, \qquad (19)$$

функція виграшу другого гравця

$$K_2(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3) = \\ = -\mathbf{P}_{\mathrm{opt}}(\mathbf{M}_1) \cdot \mathbf{M}_3 \cdot [\mathbf{Q}_{\mathrm{opt}}(\mathbf{M}_2)]^{\mathrm{T}} = \\ = -K_1(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3), \qquad (20)$$

а функцію виграшу третього гравця («природи») можна покласти тотожною нулю:

$$K_3(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3) = 0,$$

$$\forall \mathbf{M}_h \in \left\{ \left\{ \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\}_{a_{11} \in A_{11}} \right\}_{a_{12} \in A_{12}} \right\}_{a_{21} \in A_{21}} \right\}_{a_{22} \in A_{22}}, \\ h = \overline{1, 3}. \qquad (21)$$

Очевидно, що для скінченних множин $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{21}$, $A_{22}$ функції виграшів (19)–(21) можна представити у формі тривимірних

$$(|A_{11}| \cdot |A_{12}| \cdot |A_{21}| \cdot |A_{22}|) \times (|A_{11}| \cdot |A_{12}| \cdot |A_{21}| \cdot |A_{22}|) \times \\ \times (|A_{11}| \cdot |A_{12}| \cdot |A_{21}| \cdot |A_{22}|)\text{-матриць,}$$

але, зважаючи на (20) і (21), можна обмежитись однією

$$(|A_{11}| \cdot |A_{12}| \cdot |A_{21}| \cdot |A_{22}|) \times (|A_{11}| \cdot |A_{12}| \cdot |A_{21}| \cdot |A_{22}|) \times \\ \times (|A_{11}| \cdot |A_{12}| \cdot |A_{21}| \cdot |A_{22}|)\text{-матрицею}$$

$\mathbf{K} = [k_{m_1 m_2 m_3}]_{G \times G \times G}$ з елементами

$$k_{m_1 m_2 m_3} = \mathbf{P}_{\mathrm{opt}}(\mathbf{M}_1^{\langle m_1 \rangle}) \cdot \mathbf{M}_3^{\langle m_3 \rangle} \cdot [\mathbf{Q}_{\mathrm{opt}}(\mathbf{M}_2^{\langle m_2 \rangle})]^{\mathrm{T}}, \\ m_h = \overline{1, G} \;\; \forall h = \overline{1, 3}, \qquad (22)$$

де

$$G = |A_{11}| \cdot |A_{12}| \cdot |A_{21}| \cdot |A_{22}|$$

й

$$\left\{ \mathbf{M}_h^{\langle m_h \rangle} \right\}_{m_k = 1}^{G} = \\ = \left\{ \left\{ \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\}_{a_{11} \in A_{11}} \right\}_{a_{12} \in A_{12}} \right\}_{a_{21} \in A_{21}} \right\}_{a_{22} \in A_{22}}.$$

Так само можна обмежитись лише функцією (19) у випадку, коли принаймні одна з множин системи $\left\{ \{A_{ij}\}_{i=1}^{2} \right\}_{j=1}^{2}$ є нескінченною.

Отже, нечітка $2 \times 2$-гра з множиною (15) усіх можливих «чітких» $2 \times 2$-матриць за умови порожнього кортежу (4) і неприйнятності нечіткого розв'язку (14) породжуватиме безкоаліційну $G \times G \times G$-гру (метагру) з ядром (19) при штучному покладанні (21). Розв'язок цієї метагри міститиме оптимальну поведінку обох гравців в умовах ведення вихідної нечіткої $2 \times 2$-гри.

## ВИСНОВОК ТА ПЕРСПЕКТИВА ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Звичайно, питання про впроваджуваність розв'язку безкоаліційної $G \times G \times G$-метагри є відкритим і далеко не тривіальним [8, 11, 12]. Можливо, у деяких ситуаціях практичне використання цього розв'язку [13, 14] виявиться настільки незрозумілим (адже мова йтиме як про імовірності вибору чистих стратегій – матриць, так і про відому неоднозначність ситуацій рівноваги у безкоаліційних іграх), що буде варто шукати способи усунення «нечіткості» у $2 \times 2$-грі (прямого, «неігрового» перетворення нечіткої $2 \times 2$-гри у «чітку»). Але запропонована концепція розв'язку (4) нечіткої $2 \times 2$-гри та її нечіткого розв'язку (14) з можливим розв'язуванням безкоаліційної $G \times G \times G$-метагри має фундаментальне значення для ігрових методів моделювання в умовах невизначеності. У перспективі, звісно, слід зайнятися формулюванням відповідних положень для матричних ігор більших і, взагалі кажучи, довільних форматів.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Трухаев, Р. И.* Модели принятия решений в условиях неопределенности / Трухаев Р. И. – М. : Наука, 1981. – 258 с.
2. *Черноруцкий, И. Г.* Методы принятия решений / Черноруцкий И. Г. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 416 с. : ил.
3. *Caprani, O.* Introduction to Interval Analysis / O. Caprani, K. Madsen, H. B. Nielsen. – IMM, DTU, 2002. – 82 p.
4. *Большаков, А. А.* Методы обработки многомерных данных и временных рядов : [учебное пособие для вузов] / А. А. Большаков, Р. Н. Каримов. – М. : Горячая линия – Телеком, 2007. – 520 с. : ил.
5. *Петросян, Л. А.* Теория игр: [учеб. пособие для ун-тов] / Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. – М. : Высшая школа ; Книжный дом «Университет», 1998. – 304 с. : ил.
6. *Романюк, В. В.* Мінімаксний підхід у реалізації стохастичного параметра з невідомим імовірнісним розподілом на інтервалі ненульової міри / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 65–71.

7. *Романюк, В. В.* Оцінювання вірогідності розподілу статистичних частот випадкової величини з невідомим математичним сподіванням і дисперсією / В. В. Романюк // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків : НТУ «ХПІ», 2010. – № 21. – С. 152–161.
8. *Воробьёв, Н. Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков / Воробьёв Н. Н. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 272 с.
9. *Романюк, В. В.* Модель визначення оптимального рішення проектувальника у задачі про розрахунок повздовжньої стійкості двох елементів будівельної конструкції при дії на них нормованого стискаючого зусилля / В. В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. – № 1. – С. 42–56.
10. *Оуэн, Г.* Теория игр : [пер. с англ.] / Оуэн Г. – 2-е изд. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.
11. *Романюк, В. В.* Рекомендації щодо використання нерівноважної симетричної ситуації у діадичній грі як моделі охорони навколишнього середовища з трьома суб'єктами забруднення довкілля / В. В. Романюк // Екологічна безпека та природокористування. – 2010. – Вип. 5. – С. 144–159.
12. *Романюк, В. В.* Практична реалізація стратегії у найвигіднішій симетричній ситуації у діадичній грі з трьома суб'єктами забруднення водойми / В. В. Романюк // Екологічна безпека. – 2009. – № 4 (8). – С. 49–56.
13. *Романюк, В. В.* Метод реалізації принципу оптимальності у матричних іграх без сідлової точки / В. В. Романюк // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск: Інформатика та моделювання. – Харків : НТУ «ХПІ», 2008. – № 49. – С. 146–154.
14. *Романюк, В. В.* Метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з відомою кількістю партій гри / В. В. Романюк // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2009. – № 2. – С. 45–52.

Надійшла 19.10.2010

Романюк В. В.
РЕШЕНИЕ НЕЧЕТКОЙ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ $2 \times 2$-ИГРЫ

Представлена концепция решения антагонистической $2 \times 2$-игры, элементы матрицы которой задаются в форме неодноэлементных множеств. Показано, что решением такой нечеткой игры может быть специальное пересечение решений всех обычных $2 \times 2$-игр, элементы матриц которых образуют эти множества. Для случаев, когда такое пересечение окажется пустым, предлагается использование нечеткого решения нечеткой $2 \times 2$-игры. При условии неприемлемости подобного решения строится бескоалиционная метаигра, решение которой будет содержать оптимальные поведения обоих игроков в исходной нечеткой $2 \times 2$-игре.

**Ключевые слова:** моделирование в условиях неопределенности, принятие решений в условиях неопределенности, нечеткая $2 \times 2$-игра, бескоалиционная метаигра, оптимальное поведение.

Romanuke V. V.
SOLVING THE FUZZY ANTAGONISTIC $2 \times 2$-GAME

There has been represented a concept of solving the antagonistic $2 \times 2$-game, whose matrix elements are defined in the form of non-one-element sets. It has been revealed that the solution of such fuzzy game may be a special intersection of solutions of all ordinary $2 \times 2$-games, whose matrices elements constitute those sets. For cases when such intersection appears to be empty, it is suggested to use a fuzzy solution of a fuzzy $2 \times 2$-game. If this solution is unacceptable, a noncooperative metagame is constructed, the solution of which will contain the optimal behavior of both players in the initial fuzzy $2 \times 2$-game.

**Key words:** modeling within uncertainty, decision making within uncertainty, fuzzy $2 \times 2$-game, noncooperative metagame, optimal behavior.

*УДК 519.816+519.712.6*

Федюкович В. Е.

*Инженер ООО «ИнтроПро» (г. Киев)*

# О НЕОБХОДИМОСТИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ СЕРТИФИКАТА СХЕМЫ DAA

Выполнен анализ схемы DAA. Обнаружено, что схема допускает совместные действия Эмитента и Проверяющего с целью получить дополнительную информацию о Пользователе, которые не обнаруживаются Пользователем, следующим протоколу. Предложена дополнительная проверка Пользователем DAA сертификата, полученного от Эмитента, позволяющая обнаружить такую атаку и прекратить протокол.

**Ключевые слова:** DAA, анонимность, аутентификация, протокол доказательства знания, TPM.

## ВВЕДЕНИЕ

Аппаратное обеспечение персонального компьютера состоит, с момента его появления, из унифицированных блоков, что допускает его самостоятельную сборку. Обратная сторона максимально упрощенной процедуры сборки заключается в фактическом отсутствии механизмов контроля целостности аппаратного обеспечения, что затрудняет обнаружение вмешательства на аппаратном уровне. Такое вмешательство, в свою очередь, может приводить к утечке конфиденциальных данных при их обработке на таком компьютере. Контроль целостности аппаратного и программного обеспечения компьютера является одной из основных целей, решаемых в рамках Trusted Computing