електродинаміки НАНУ: зб. наук. праць. – 2004. – № 3(9) – С. 10–14.
12. *Рибін О. І.* Аналіз лінійних систем в області трансформант перетворення Уоша-Адамара / Рибін О. І., Ткачук А. П. // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2006. – № 33. – С. 14–23.
13. *Рибін О. І.* Аналіз лінійних систем в області кратного перетворення EIWAL / Рибін О. І., Ткачук А. П. // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2006. – № 33. – С. 31–38.
14. *Рыбин А. И.* Анализ линейных систем в области трансформант собственных частот преобразования RTF / Рыбин А И., Ткачук А. П. // Радиоэлектроника. – 2006. – № 11. – С. 56–63. – (Изв. выш. учеб. заведений).
15. *Ильясова Ю. Х.* Анализ линейных систем в области преобразования RTF при не минимальных разносных уравнения / Ильясова Ю. Х., Шарпан О. Б. // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2007. – № 35. – С. 23–29.
16. *Jan J.* Metody restaurace obrazu a jejich moznosti / Jan J. // Vybrane odborne a vedecke prace VUT v Brne. Falculta electrotechnicka. – 1991. – S. 7–72.
17. *Рыбин А. И.* Алгоритм условной деконволюции в частной области / Рыбин А. И., Королёв В. Ю. // Радиоэлектоника. – 2000. – № 4. – С. 51–55. – (Изв. выш. учеб. заведений).
18. *Рыбин А. И.* Реставрация образов в частной области методом взвешенной фильтрации / Рыбин А. И., Королёв В. Ю. // Радиоэлектроника. – 2001. – № 4. – С. 51–56. – (Изв. выш. учеб. заведений).
19. *Рибін О.* Реставрація образів методом умовної деконволюції в області просторових частот / Рибін О., Корольов В. // Вісник Технічного університету Поділля. – 2000. – № 1. – С. 145–147.

Надійшла 14.10.2008
Після доробки 12.12.2008

Рыбин А. И., Наталенко С. С., Нижебецкая Ю. Х.

СВОЙСТВА ПЕРЕОБРАЗОВАНИЯ RTF

Проводится сравнение точности дискретных преобразований RTF (Root domain Transfer Function) и Фурье при использовании операций дифференцирования и интегрирования. Отмечена целесообразность использования неминимальных разностных формул дифференцирования при использовании преобразования RTF.

Ключевые слова: обработка сигналов, перобразование Фурье, собственное число, дифференцирование, интегрирование.

Rybin O. I., Natalenko S. S., Nizhebetska Yu. H.

RTF TRANSFORM PROPERTIES

Precision of discrete RTF (Root domain Transfer Function) and Fourier transform is compared using the differentiation and integration operations. Expedience of using nonminimum difference formulae of differentiation in the RTF transform is stated.

Key words: signal processing, Fourier transform, eigenvalue, differentiation, integration.

УДК 519.832.4

Романюк В. В.

Канд. техн. наук, доцент Хмельницького національного університету

ПРИНЦИП ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ СТРАТЕГІЙ ПЕРШОГО ГРАВЦЯ В ОДНОМУ ПІДКЛАСІ НЕСТРОГО ОПУКЛИХ АНТАГОНІСТИЧНИХ ІГОР

На прикладі двох нестрого опуклих антагоністичних ігор, де другий гравець має єдину оптимальну чисту стратегію, доведено, що існує підклас нестрого опуклих антагоністичних ігор, у якому за відомим методом не можуть бути визначені оптимальні імовірності вибору істотних чистих стратегій першого гравця. Показано, що для їх визначення достатньо скористатись концепцією сідлової точки у відомому принципі оптимальності з використанням відповідної правої нерівності.

Ключові слова: антагоністична гра, опукла гра, оптимальна стратегія, оптимальна імовірність.

ВСТУП

Чимало конфліктно-керованих явищ і процесів, які виникають повсякчас у будь-якому соціумі, можуть бути наближено змодельовані у вигляді безкоаліційних, та, зокрема, антагоністичних ігор. Клас $\mathcal{U}$ опуклих антагоністичних ігор часто використовується для моделювання процедур формування оптимальних рішень в умовах як деяких соціально-екологічних систем типу «хижак – жертва» [1, 2], так і конкурентних ринкових відносин між двома комерційними об'єктами [3, 4]. Ядро $K(x, y)$ гри класу $\mathcal{U}$ зазвичай задається на одиничному квадраті $U = X \times Y \subset \mathbb{R}^2$, де $x \in X$ є чистою стратегією першого гравця, $y \in Y$ є чистою стратегією другого гравця, а множини $X = [0;1]$ та $Y = [0;1]$ є множинами усіх чистих стратегій першого та другого гравців відповідно. Така орієнтація ядра гри дозволяє легко переходити до аналізу інших опуклих антагоністичних ігор [5, 6], ядра яких задаються, взагалі кажучи, на борелевих підмножинах простору $\mathbb{R}^2$. Умова

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}K(x, y) \geq 0 \quad \forall x \in X, \ \forall y \in Y, \tag{1}$$

яка визначає клас $\mathcal{U}$, є передумовою того, що часто в іграх такого класу другий гравець має єдину оптимальну стратегію, яка є чистою [7, 8; 9, с. 125]. Ця чиста стратегія $y_{\text{opt}} \in [0;1]$ знаходиться [9, с. 125] як аргумент зовнішнього екстремуму

$$\{y_{\text{opt}}\} \in \arg \min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y) = \\ = \arg \min_{y \in [0;1]} \max_{x \in [0;1]} K(x, y). \tag{2}$$

Тоді, отримавши оптимальне значення гри

$$V_{\text{opt}} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y) = \min_{y \in [0;1]} \max_{x \in [0;1]} K(x, y), \tag{3}$$

оптимальні стратегії першого гравця знаходяться за коренями $x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle} \in [0;1]$ та $x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle} \in [0;1]$ рівняння [9, с. 126]

$$V_{\text{opt}} = K(x, y_{\text{opt}}), \tag{4}$$

яке складається відносно змінної x.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

Відомо [9, с. 126], що імовірність $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle})$ обирання чистої істотної стратегії $x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}$, як і ймовірність $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle})$ обирання чистої істотної стратегії $x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}$, є розв'язком рівняння [9, с. 126]

$$p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle})r_1 + p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle})r_2 = \\ = p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle})r_1 + [1 - p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle})]r_2 = \\ = [1 - p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle})]r_1 + p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle})r_2 = 0, \tag{5}$$

складеного відносно змінної $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle})$ або $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}) = 1 - p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle})$, де

$$r_1 = \left.\frac{dK(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}, y)}{dy}\right|_{y = y_{\text{opt}}}, \tag{6}$$

$$r_2 = \left.\frac{dK(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}, y)}{dy}\right|_{y = y_{\text{opt}}}. \tag{7}$$

Проте у роботах [10, 11] показано, що існують ігри класу $\mathcal{U}$, в яких ймовірності $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}) \in [0;1]$ і $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}) \in [0;1]$ як корені рівняння (5) не існують. Як у таких випадках знаходити оптимальні стратегії першого гравця

$$\mathbf{X}_{\text{opt}} = \{X_{\text{opt}}, \{p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}), p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle})\}\}, \tag{8}$$

де $X_{\text{opt}} = \{x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}, x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}\}$, на даний момент ніде не описано. Тому завданням даного дослідження є формування та доведення положень, за якими знаходяться усі оптимальні стратегії першого гравця (8) в тих іграх класу $\mathcal{U}$, де імовірності $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}) \in [0;1]$ і $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}) \in [0;1]$ неможливо визначити з рівняння (5).

ПРИНЦИП ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ІМОВІРНОСТЕЙ ВИБОРУ ІСТОТНИХ ЧИСТИХ СТРАТЕГІЙ ПЕРШОГО ГРАВЦЯ

Спочатку розглянемо наступний приклад. Нехай поверхня

$$K(x, y) = ax^2 + bx + gxy + cy + k \tag{9}$$

з ненульовими коефіцієнтами a, b, g, c та довільною сталою k є ядром антагоністичної неперервної гри, яку задамо на одиничному квадраті $U = X \times Y \subset \mathbb{R}^2$. Спробуємо розв'язати цю гру для $a > 0$, коли парабола (9) як функція від змінної x має точку глобального мінімуму, а максимум досягається на одному з кінців одиничного сегменту $X = [0;1]$. Для визначеності візьмемо також коефіцієнти $b > 0$, $g < 0$, $c < 0$. Оскільки максимум ядра (9) по змінній x залежить від знаку виразу $a + b + gy$, то покладемо ще й суму $a + b + g = 0$. Тоді нерівність $a + b + gy > 0$ виконуватиметься при $y < -\frac{a+b}{g} = 1$. Нерівність $a + b + gy < 0$ буде виконана при $y > -\frac{a+b}{g} = 1$, але оскільки у нас $y \in Y = [0;1]$, то така нерівність неможлива. Отже, максимумом ядра (9) по змінній x на одиничному сегменті $X = [0;1]$ є

$$\max_{x \in X} K(x, y) = \max_{x \in [0;1]} K(x, y) = \\ = \max_{x \in [0;1]} (ax^2 + bx + gxy + cy + k) = \\ = \max\{K(0, y), K(1, y)\} = \\ = \begin{cases} K(1, y) = a + b + gy + cy + k, & y < 1; \\ K(0, y) = K(1, y) = cy + k, & y = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, що мінімум прямої (10) на одиничному сегменті $Y = [0;1]$ є значенням гри (3):

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y) = \min_{y \in [0;1]} \max_{x \in [0;1]} K(x, y) = \\ = \min\left\{\inf_{y \in [0;1)} (a + b + gy + cy + k), \min_{y \in \{1\}} (cy + k)\right\} = \\ = \min\{K(1, 1), K(0, 1)\} = \\ = K(1, 1) = K(0, 1) = c + k = V_{\text{opt}}. \tag{11}$$

Мінімум (11) при цьому досягається у єдиній оптимальній стратегії $y_{\text{opt}} = 1$ другого гравця.

Коренями відповідного рівняння (4)

$$\begin{aligned} V_{\text{opt}} &= c + k = K(1, 1) = K(0, 1) = \\ &= ax^2 + bx + gx + c + k = \\ &= x(ax + b + g) + c + k = x(ax - a) + c + k = \\ &= K(x, 1) = K(x, y_{\text{opt}}) \end{aligned} \tag{12}$$

є $x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle} = 0$ та $x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle} = 1$. Далі знаходимо значення (6) і (7):

$$\begin{aligned} r_1 &= \left.\frac{dK(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}, y)}{dy}\right|_{y = y_{\text{opt}}} = \left.\frac{dK(0, y)}{dy}\right|_{y = 1} = \\ &= \left.\frac{d(cy + k)}{dy}\right|_{y = 1} = c, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= \left.\frac{dK(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}, y)}{dy}\right|_{y = y_{\text{opt}}} = \left.\frac{dK(1, y)}{dy}\right|_{y = 1} = \\ &= \left.\frac{d(a + b + gy + cy + k)}{dy}\right|_{y = 1} = g + c. \end{aligned} \tag{14}$$

Тоді рівняння (5) відносно, скажімо, імовірності $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}) = p_{\text{opt}}(0)$ набуває вигляду

$$\begin{aligned} &p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle})r_1 + p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle})r_2 = \\ &p_{\text{opt}}(0) \cdot c + p_{\text{opt}}(1) \cdot (g + c) \\ &= p_{\text{opt}}(0) \cdot c + [1 - p_{\text{opt}}(0)] \cdot (g + c) = \\ &= g + c - p_{\text{opt}}(0) \cdot g = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

З останньої рівності у виразі (15) отримуємо

$$p_{\text{opt}}(0) = \frac{g + c}{g}. \tag{16}$$

Але за вихідних умов щодо коефіцієнтів $g < 0$ та $c < 0$ виходить, що число $\frac{g + c}{g} > 1$, тобто $p_{\text{opt}}(0) > 1$ й імовірність $p_{\text{opt}}(0)$ слід вважати такою, що не визначається з рівняння (15). Зрозуміло, що й імовірність $p_{\text{opt}}(1)$ тут також не визначається з відповідного рівняння (5), так як

$$p_{\text{opt}}(1) = 1 - p_{\text{opt}}(0) = 1 - \frac{g + c}{g} = -\frac{c}{g} < 0. \tag{17}$$

Множину тих ігор класу $\mathcal{U}$, в яких корені $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle})$ і $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle})$ рівняння (5) не належать одиничному сегменту $[0;1]$, тобто не можуть бути імовірностями, об'єднаємо у клас $\mathcal{P}$. Зауважимо, що, звичайно ж, сюди увійдуть не тільки ігри з ядрами у класі параболічних поверхонь, які просто більш зручні для демонстрації прикладів, а й усі ті опуклі антагоністичні ігри, для яких корінь $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle})$ рівняння (5) не буде імовірністю. Таким чином, в іграх підкласу $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ за стандартною схемою знаходження [5; 9, с. 126; 12; 13] сідлових точок $\langle \mathbf{X}_{\text{opt}}, y_{\text{opt}} \rangle$ з використанням співвідношень (2)–(7) неможливо визначити жодну оптимальну стратегію першого гравця (8).

Для того, щоб зрозуміти, як знаходити імовірності для оптимальної стратегії першого гравця (8) в іграх підкласу $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$, достатньо згадати означення рівноважної ситуації $\langle x_{\text{opt}}, y_{\text{opt}} \rangle$ у чистих стратегіях [9, с. 32–34], де $x_{\text{opt}} \in X$: ситуація $\langle x_{\text{opt}}, y_{\text{opt}} \rangle$ називається рівноважною або сідловою точкою, якщо $\forall x \in X$ та $\forall y \in Y$ виконується подвійна нерівність

$$K(x, y_{\text{opt}}) \le K(x_{\text{opt}}, y_{\text{opt}}) \le K(x_{\text{opt}}, y). \tag{18}$$

На цій основі ситуацію $\langle \mathbf{X}_{\text{opt}}, y_{\text{opt}} \rangle$ називають рівноважною [9, с. 98; 11, с. 85], якщо $\forall x^{\langle 1 \rangle} \in X$ та $\forall x^{\langle 2 \rangle} \in X$ при $x^{\langle 1 \rangle} \ne x^{\langle 2 \rangle}$, $\forall y \in Y$, $\forall p(x^{\langle 1 \rangle}) \in [0;1]$ та $\forall p(x^{\langle 2 \rangle}) \in [0;1]$ при $p(x^{\langle 1 \rangle}) + p(x^{\langle 2 \rangle}) = 1$, де $p(x)$ є імовірністю обирання чистої стратегії x, виконана подвійна нерівність [9, с. 98; 11, с. 85; 14, с. 172]

$$\begin{aligned} &K(x^{\langle 1 \rangle}, y_{\text{opt}})p(x^{\langle 1 \rangle}) + K(x^{\langle 2 \rangle}, y_{\text{opt}})p(x^{\langle 2 \rangle}) \le \\ &\le V_{\text{opt}} = K(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}, y_{\text{opt}})p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}) + K(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}, y_{\text{opt}})p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}) \le \\ &\le K(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}, y)p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}) + K(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}, y)p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}). \end{aligned} \tag{19}$$

З подвійної нерівності (19) випливає, що, знаючи V_{opt} та y_{opt}, імовірності $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle})$ і $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle})$ можна визначити з відповідної правої нерівності

$$\begin{aligned} V_{\text{opt}} &= K(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}, y_{\text{opt}})p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}) + K(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}, y_{\text{opt}})p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}) \le \\ &\le K(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}, y)p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}) + K(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}, y)p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}) = \\ &= K(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}, y)p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}) + K(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}, y)[1 - p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle})] = \\ &= K(x_{\text{opt}}^{\langle 1 \rangle}, y)[1 - p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle})] + K(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}, y)p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2 \rangle}). \end{aligned} \tag{20}$$

Повернемося до поданого прикладу гри класу $\mathcal{P}$ з ядром (9) за умов $a > 0$, $b > 0$, $a + b + g = 0$ та $c < 0$. Маємо нерівність (20) відносно імовірності $p_{\text{opt}}(0)$:

$$\begin{aligned} V_{\text{opt}} &= c + k = K(0, 1)p_{\text{opt}}(0) + K(1, 1)p_{\text{opt}}(1) \le \\ &\le K(0, y)p_{\text{opt}}(0) + K(1, y)p_{\text{opt}}(1) = \\ &= (cy + k)p_{\text{opt}}(0) + (a + b + gy + cy + k)[1 - p_{\text{opt}}(0)] = \\ &= (cy + k)p_{\text{opt}}(0) - (cy + k)p_{\text{opt}}(0) + \\ &+ a + b + gy + cy + k - (a + b + gy)p_{\text{opt}}(0) = \\ &= gy - g + cy + k - (gy - g)p_{\text{opt}}(0), \end{aligned} \tag{21}$$

звідки, перенісши імовірність $p_{\text{opt}}(0)$ у ліву частину, дістаємо

$$\begin{aligned} (gy - g)p_{\text{opt}}(0) &= g(y - 1)p_{\text{opt}}(0) \le gy - g + cy - c = \\ &= g(y - 1) + c(y - 1) = (g + c)(y - 1). \end{aligned} \tag{22}$$

При $y \neq 1$, тобто при $y \neq y_{\text{opt}}$, з урахуванням співвідношення $g(y-1) > 0$ з нерівності (22) випливає, що

$$p_{\text{opt}}(0) \le \frac{(g+c)(y-1)}{g(y-1)} = \frac{g+c}{g}. \tag{23}$$

При $y = y_{\text{opt}} = 1$ матимемо

$$\begin{aligned} V_{\text{opt}} &= K(0,1)p_{\text{opt}}(0) + K(1,1)p_{\text{opt}}(1) = \\ &= (c+k)p_{\text{opt}}(0) + (c+k)p_{\text{opt}}(1) = \\ &= (c+k)[p_{\text{opt}}(0) + p_{\text{opt}}(1)] = c+k, \end{aligned} \tag{24}$$

що виключає залежність оптимального значення гри від $p_{\text{opt}}(0)$ чи $p_{\text{opt}}(1)$. Тому, оскільки число $\frac{g+c}{g} > 1$, із нерівності (23) остаточно отримуємо імовірність

$$p_{\text{opt}}(0) \in [0;1]. \tag{25}$$

Тут уже неважко показати, що у розглянутій грі імовірність $p_{\text{opt}}(1)$ теж є довільною. Звичайно, можна використати те, що $p_{\text{opt}}(1) = 1 - p_{\text{opt}}(0)$, або ж, діючи з початку,

$$\begin{aligned} V_{\text{opt}} &= c + k \le K(0,y)p_{\text{opt}}(0) + K(1,y)p_{\text{opt}}(1) = \\ &= (cy+k)[1 - p_{\text{opt}}(1)] + (a+b+gy+cy+k)p_{\text{opt}}(1) = \\ &= cy + k + (gy - g)p_{\text{opt}}(1) = \\ &= cy + k + g(y-1)p_{\text{opt}}(1), \end{aligned} \tag{26}$$

$$c - cy = -c(y-1) \le g(y-1)p_{\text{opt}}(1), \tag{27}$$

$$p_{\text{opt}}(1) \ge \frac{-c(y-1)}{g(y-1)} = -\frac{c}{g}, \tag{28}$$

звідки з урахуванням нерівності $-\frac{c}{g} < 0$ та (24) отримується імовірність

$$p_{\text{opt}}(1) \in [0;1]. \tag{29}$$

Підсумком усього вищезазначеного є твердження про те, що в іграх класу $\mathscr{P}$ оптимальні стратегії першого гравця (8) при відомій множині $X_{\text{opt}} = \{x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}, x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}\}$ складаються з тієї множини $\mathscr{A}$ розв'язків нерівності (20) відносно імовірності $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle})$ або $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle})$, яка задовольняє рівності

$$\begin{aligned} V_{\text{opt}} &= K(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}, y_{\text{opt}})p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}) + K(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}, y_{\text{opt}})p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}) = \\ &= K(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}, y_{\text{opt}})p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}) + K(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}, y_{\text{opt}})[1 - p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle})] = \\ &= K(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}, y_{\text{opt}})[1 - p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle})] + \\ &+ K(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}, y_{\text{opt}})p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}). \end{aligned} \tag{30}$$

Розглянемо ще такий граничний приклад з ядром (9). Нехай все ще коефіцієнт $a > 0$, але коефіцієнти $b < 0$, $g > 0$, $c > 0$, причому $a + b = 0$. Тоді нерівність $a + b + gy > 0$ виконується при $y > 0$, і максимум ядра (9) по змінній x на одиничному сегменті $X = [0;1]$

$$\begin{aligned} &\max_{x \in X} K(x,y) = \max_{x \in [0;1]} K(x,y) = \\ &= \max_{x \in [0;1]} (ax^2 + bx + gxy + cy + k) = \\ &= \max\{K(0,y), K(1,y)\} = \\ &= \begin{cases} K(0,y) = K(1,y) = cy + k, \ y = 0; \\ K(1,y) = gy + cy + k, \ y > 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{31}$$

Мінімум прямої (31) на одиничному сегменті $Y = [0;1]$

$$\begin{aligned} &\min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x,y) = \min_{y \in [0;1]} \max_{x \in [0;1]} K(x,y) = \\ &= \min\left\{ \min_{y \in \{0\}} (cy + k), \inf_{y \in (0;1]} (a + b + gy + cy + k) \right\} = \\ &= \min\{K(1,0), K(0,0)\} = \\ &= K(1,0) = K(0,0) = k = V_{\text{opt}} \end{aligned} \tag{32}$$

досягається у єдиній оптимальній стратегії $y_{\text{opt}} = 0$ другого гравця. Коренями відповідного рівняння (4)

$$\begin{aligned} V_{\text{opt}} &= k = K(0,0) = ax^2 + bx + k = \\ &= x(ax + b) + k = x(ax - a) + k = \\ &= K(x,0) = K(x, y_{\text{opt}}) \end{aligned} \tag{33}$$

є $x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle} = 0$ та $x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle} = 1$. Оскільки значення (6) і (7) залишаються рівними (13) та (14) відповідно, то і тут із відповідного рівняння (15) отримаємо значення (16) та (17), які не є імовірностями. Тому така гра належить класу $\mathscr{P}$.

Знаходимо множину $\mathscr{A}$ розв'язків нерівності (20) відносно імовірності $p_{\text{opt}}(0)$:

$$\begin{aligned} V_{\text{opt}} &= k = K(0,0)p_{\text{opt}}(0) + K(1,0)p_{\text{opt}}(1) \le \\ &\le K(0,y)p_{\text{opt}}(0) + K(1,y)p_{\text{opt}}(1) = \\ &= (cy+k)p_{\text{opt}}(0) + (gy+cy+k)[1 - p_{\text{opt}}(0)] = \\ &= (cy+k)p_{\text{opt}}(0) - (cy+k)p_{\text{opt}}(0) + \\ &+ gy + cy + k - gyp_{\text{opt}}(0) = \\ &= gy + cy + k - gyp_{\text{opt}}(0), \end{aligned} \tag{34}$$

$$gyp_{\text{opt}}(0) \le (g+c)y. \tag{35}$$

При $y \neq y_{\text{opt}} = 0$ з урахуванням співвідношення $gy > 0$ з нерівності (35) випливає, що

$$p_{\text{opt}}(0) \le \frac{(g+c)y}{gy} = \frac{g+c}{g}. \tag{36}$$

При $y = y_{\text{opt}} = 0$ матимемо

$$\begin{aligned} V_{\text{opt}} &= K(0,0)p_{\text{opt}}(0) + K(1,0)p_{\text{opt}}(1) = \\ &= kp_{\text{opt}}(0) + (a+b+k)p_{\text{opt}}(1) = kp_{\text{opt}}(0) + kp_{\text{opt}}(1) = \\ &= k[p_{\text{opt}}(0) + p_{\text{opt}}(1)] = k, \end{aligned} \tag{37}$$

тобто множина (36) розв'язків нерівності (20) задовольняє рівності (30). Тому остаточно після (31)–(37) отримуємо імовірність (25) та, що очевидно, імовірність (29) для оптимальної стратегії першого гравця (8) у цій грі.

Таким чином, принцип визначення оптимальних імовірностей вибору істотних чистих стратегій першого гравця в іграх класу $\mathcal{P}$ полягає не у розв'язуванні рівняння (5), а у розв'язуванні нерівності (20) відносно змінної $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle})$ або $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle})$ з урахуванням співвідношення $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}) + p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}) = 1$. Далі необхідно кожен елемент множини розв'язків нерівності (20) перевірити на те, чи він задовольняє рівності (30). Якщо так, то цей елемент і буде шуканою імовірністю вибору відповідної істотної чистої стратегії першого гравця, а сукупність усіх таких елементів $\mathcal{A}$ фактично складатиме множину усіх оптимальних імовірнісних мір $\{p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}), p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle})\}$ в оптимальній стратегії (8).

ВИСНОВОК

Як показано прикладами двох опуклих антагоністичних ігор класу $\mathcal{U}$, який визначається на основі нерівності (1), існує підклас $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ цих ігор, де корені рівняння (5) $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle})$ і $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle})$ як імовірності не існують. Тому ігри класу $\mathcal{P}$ слід розв'язувати не з використанням рівняння (5) зі значеннями (6) і (7), а з використанням основи принципу оптимальності теорії антагоністичних ігор, який виражається у концепції сідлових точок за допомогою подвійної нерівності (18) або, точніше, подвійної нерівності (19). При цьому імовірності $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle})$ та $p_{\text{opt}}(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle})$ для оптимальних стратегій першого гравця (8) при відомій множині $X_{\text{opt}} = \{x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}, x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}\}$ знаходяться з тієї множини $\mathcal{A}$ розв'язків нерівності (20), яка задовольняє рівності (30). Практичне значення запропонованого принципу визначення оптимальних стратегій першого гравця у відповідних нестрого опуклих антагоністичних іграх полягає у тому, що знайдена за цим принципом множина оптимальних ситуацій у грі є повною, а це розкриває більші можливості перед першим гравцем у його діях щодо зрівноваження чистої оптимальної стратегії другого гравця. Тоді і вирішення відповідних конфліктних явищ та процесів, які описуватимуться за допомогою розглянутого підкласу нестрого опуклих антагоністичних ігор, буде більш логічним, справедливим і раціональним.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kumkov S. I.* Optimal strategies in a differential game with incomplete information / S. I. Kumkov, V. S. Patsko // Tr. Inst. Mat. Mekh. – 1995. – No. 3. – P. 104–131.
2. *Savinov V. B.* A differential pursuit game with one pursuer and several evaders / V. B. Savinov // Tr. Inst. Mat. Mekh. – 1995. – No. 3. – P. 147–171.
3. *Romanuke V. V.* Convex game on the unit square with the payoff function that is the second power of the weighted strategies difference / V. V. Romanuke // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2008. – № 1(11). – С. 14–18.
4. *Romanuke V. V.* The nine solution forms of a continuous strictly convex-concave antagonistic game / V. V. Romanuke // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. – 2008. – № 5, т. 3. – С. 30–37.
5. *Пинелис И. Ф.* Критерии полной определенности для вогнуто-выпуклых игр / И. Ф. Пинелис // Матем. заметки. – 1991. – № 49:3. – С. 73–76.
6. *Мащенко С. О.* Локальні умови слабкої індивідуальної оптимальності рівноваг / С. О. Мащенко // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2008. – № 1. – С. 127–136.
7. *Романюк В. В.* Розв'язки однієї строго випуклої гри на одиничному квадраті з добутком чистих стратегій / В. В. Романюк // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2007. – № 2. – С. 174–179.
8. *Романюк В. В.* Загальні розв'язки трьох нескінченних антагоністичних строго випуклих ігор / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. – 2008. – № 3, т. 3. – С. 158–165.
9. *Воробьёв Н. Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков / Воробьёв Н. Н. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 272 с.
10. *Романюк В. В.* Представлення одинадцяти випадків загального розв'язку однієї нестрого випуклої гри / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2008. – № 4. – С. 184–191.
11. *Романюк В. В.* Загальні розв'язки однієї неперервної антагоністичної гри / В. В. Романюк // Науково-теоретичний журнал Хмельницького економічного університету «Наука й економіка». – 2007. – Випуск 4 (8). – С. 73–100.
12. *Romanuke V. V.* The convex game on the unit square with the kernel, that is the sum of the weighted strategies and their weighted product / V. V. Romanuke // Математическое моделирование, обратные задачи, информационно-вычислительные технологии: сборник статей VII Международной научно-технической конференции. Ч. II. – Пенза : РИО ПГСХА, 2007. – С. 73–77.
13. *Романюк В. В.* До питання загального розв'язку однієї нескінченної антагоністичної гри / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2008. – № 2. – С. 34–38.
14. *Романюк В. В.* Чотири опорних співвідношення для чотирьох видів розв'язку однієї строго випуклої неперервної антагоністичної гри / В. В. Романюк // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2008. – № 1. – С. 169–174.

Надійшла 16.01.2009
Після доробки 17.07.2009

Романюк В. В.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ ПЕРВОГО ИГРОКА В ОДНОМ ПОДКЛАССЕ НЕСТРОГО ВЫПУКЛЫХ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР

На примере двух нестрого выпуклых антагонистических игр, где второй игрок имеет единственную оптимальную чистую стратегию, доказано, что существует подкласс нестрого выпуклых антагонистических игр, в котором известным методом не могут быть определены оптимальные вероятности выбора существенных чистых стратегий пер-

вого игрока. Показано, что для их определения достаточно воспользоваться концепцией седловой точки в известном принципе оптимальности с использованием соответствующего правого неравенства.

Ключевые слова: антагонистическая игра, выпуклая игра, оптимальная стратегия, оптимальная вероятность.

Romanuke V. V.

METHOD OF DETERMINATION OF THE FIRST PLAYER OPTIMAL STRATEGIES IN A SUBCLASS OF THE NONSTRICTLY CONVEX ANTAGONISTIC GAMES

By the example of two nonstrictly convex antagonistic games, where the second player has the single optimal pure strategy, it has been asserted, that there exists a subclass of nonstrictly convex antagonistic games, in which by the known method there cannot be determined the optimal probabilities of selecting the essential pure strategies of the first player. It has been demonstrated that to determine them, it is sufficient to employ the saddle point concept in the known optimality principle by applying the corresponding right-side inequality.

Key words: antagonistic game, convex game, optimal strategy, optimal probability.

УДК 51.001.57+004.652.4+004.827

Шаховська Н. Б.

Канд. техн. наук, доцент Національного університету «Львівська політехніка»

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ПРОСТОРУ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ АЛГЕБРАЇЧНОЇ СИСТЕМИ

Проаналізовано проблеми опрацювання розрізнених даних. Побудовано формальну модель простору даних та уведено операції над ним.

Ключові слова: простір даних, сховище даних, база даних, алгебраїчна система, пошук даних, групування даних, інтелектуальний агент, джерело даних.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ В ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ

У різних галузях науки спостерігається експоненційний ріст обсягів експериментальних даних. Складність використання таких даних виникає внаслідок їхньої природної різнорідності (зберігання у різних системах, призначення для різних задач, різні методи опрацювання та зберігання тощо). Розрив, який збільшується між джерелами даних і сервісами, приводить до необхідності пошуку нових шляхів організації рішення задач над множинними розподіленими колекціями даних і програм, які концентруються в спеціалізованих центрах даних і обчислювальних ресурсах.

Традиційно при рішенні певних задач фахівці використовують звичні для них джерела інформації і формулюють завдання з огляду на лише на такі джерела. Очевидна неповнота інформації, яку вдається охопити при такому підході. Безліч джерел даних і сервісів, що існують в Інтернеті, їхня розмаїтість викликають потребу в радикальній зміні такого традиційного підходу. Сутність цієї зміни полягає в тому, що задачі повинні формулюватися незалежно від існуючих джерел інформації, і лише після такого формулювання повинна здійснюватися ідентифікація релевантних завданню джерел, приведення їх до виду, необхідного для розв'язання задачі, інтеграція, ідентифікація сервісів, які дозволяють реалізувати окремі частини абстрактного процесу рішення завдання.

Для прийняття адекватних рішень у певній галузі необхідно, щоб дані, які надходять із різних джерел і використовуються для прийняття керівних рішень, задовольняли такі вимоги:

– були повними, несуперечливими та надходили вчасно;

– були інформативними, оскільки вони застосовуватимуться для прийняття рішень;

– були однакової структури, щоб мати можливість завантажити їх у єдине сховище даних та проаналізувати;

– зберігалися в однакових моделях даних та були незалежними від платформи розроблення, щоб мати можливість використання цих даних іншими засобами.

Сьогодні найгостріші проблеми керування інформацією виникають в організацій (наприклад, готелів, баз відпочинку, оздоровчих закладів, туристичних агентств), робота яких полягає в опрацюванні великої кількості різнотипних, взаємонезалежних джерел даних. Такий тип системи отримав назву *простір даних*. На відміну від систем інтеграції даних, що також пропонують загальноприйнятий доступ до різ-