

АНАЛИЗ И СРАВНЕНИЕ ДВУХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГИПЕРЭРЛАНГОВСКИМИ ВХОДНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Тарасов В. Н. – д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, Российская Федерация.

АННОТАЦИЯ

Актуальность. Рассмотрена задача вывода решения для среднего времени ожидания в очереди в замкнутой форме для обычной системы с гиперэрланговскими входными распределениями второго порядка и системы со сдвинутыми гиперэрланговскими входными распределениями.

Цель работы. Получение решения для основной характеристики системы – среднего времени ожидания требований в очереди для системы массового обслуживания типа G/G/1 с обычными и со сдвинутыми с гиперэрланговскими входными распределениями второго порядка.

Метод. Для решения поставленной задачи использован классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, который позволяет получить решение для среднего времени ожидания для рассматриваемых систем в замкнутой форме. Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли занимает важную часть теории систем G/G/1. Для практического применения полученных результатов использован известный метод моментов теории вероятностей.

Результаты. Впервые получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для обеих систем, с помощью которых выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди для вышеуказанных систем в замкнутой форме. Такой подход позволяет рассчитать среднее время ожидания для указанных систем в математических пакетах для широкого диапазона изменения параметров трафика. Все остальные характеристики систем являются производными от среднего времени ожидания.

Выводы. Показано, что гиперэрланговский закон распределения второго порядка, как и гиперэкспоненциальный, являющийся трехпараметрическим, может определяться как двумя первыми моментами, так и тремя первыми моментами. Выбор такого закона распределения вероятностей обусловлен тем, что его коэффициент вариации охватывает более широкий диапазон, чем у гиперэкспоненциального распределения. Для сдвинутого гиперэрланговского закона распределения коэффициент вариации охватывает еще более широкий диапазон, чем у обычного. Введение сдвинутых во времени распределений расширяет область применения СМО с учетом известного факта из теории массового обслуживания, что среднее время ожидания связано с коэффициентами вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания квадратичной зависимостью. Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для системы массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями второго порядка позволяет получить решение в замкнутой форме и это решение публикуется впервые. Полученное решение дополняет и расширяет известную формулу теории массового обслуживания для среднего времени ожидания требований в очереди для системы массового обслуживания типа G/G/1.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: гиперэрланговский закон распределения, интегральное уравнение Линдли, метод спектрального разложения, преобразование Лапласа.

АББРЕВИАТУРЫ

ИУЛ – интегральное уравнение Линдли;

СМО – система массового обслуживания;

G/G/1 – СМО с произвольными законами распределений интервалов между поступлениями требований и времени обслуживания;

ФРВ – функция распределения вероятностей.

НОМЕНКЛАТУРА

$a(t)$ – функция плотности распределения интервалов между поступлениями требований;

$A^*(s)$ – преобразование Лапласа функции $a(t)$;

$b(t)$ – функция плотности распределения времени обслуживания;

$B^*(s)$ – преобразование Лапласа функции $b(t)$;

$C(u)$ – ФРВ случайной величины $\tilde{u} = \tilde{x} - \tilde{t}$;

c_λ – коэффициент вариации интервалов поступлений требований;

c_μ – коэффициент вариации времени обслуживания;

D_λ – дисперсия случайного интервала между поступлениями;

D_μ – дисперсия времени обслуживания;

HE_2 – гиперэрланговский закон распределения второго порядка;

HE_2^- – сдвинутое гиперэрланговское распределение;

H_2 – гиперэкспоненциальный закон распределения второго порядка;

\bar{I} – среднее значение периода простоя;

\bar{I}^2 – второй начальный момент периода простоя;

p – параметр гиперэрланговского закона распределения входного потока;

q – параметр гиперэрланговского закона распределения времени обслуживания;

\bar{W} – среднее время ожидания в очереди;
 $w^*(s)$ – преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания;
 $w(y)$ – ФРВ времени ожидания требования в очереди;
 \tilde{x} – случайное время обслуживания требования;
 \tilde{t} – случайный интервал времени между поступлениями требований;
 z – любое число из интервала $(-1, 1)$.
 λ – интенсивность входного потока;
 λ_1, λ_2 – параметры гиперэрланговского закона распределения входного потока;
 μ – интенсивность обслуживания;
 μ_1, μ_2 – параметры гиперэрланговского закона распределения времени обслуживания;
 ρ – коэффициент загрузки системы;
 $\bar{\tau}_\lambda$ – средний интервал между поступлениями требований;
 $\bar{\tau}_\mu$ – среднее время обслуживания;
 $\Phi_+(s)$ – преобразование Лапласа ФРВ времени ожидания;
 $\psi_+(s)$ – первая компонента спектрального разложения;
 $\psi_-(s)$ – вторая компонента спектрального разложения;
 $\chi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ с произвольной функцией распределения $C(t)$.

ВВЕДЕНИЕ

Для моделирования трафика современных сетей телекоммуникаций широко используются экспоненциальные распределения, куда входят распределения Вейбулла, гамма, логнормальное, гиперэкспоненциальное, гиперэрланговское и др., у которых при определенных значениях параметров коэффициенты вариации случайных величин больше или равно 1 ($c_\tau \geq 1$) или же меньше 1 ($c_\tau < 1$). Коэффициент вариации, больший 1 свидетельствует о том, что вероятность появления больших значений случайной величины значительно выше, чем у классического экспоненциального распределения, а меньший 1 – наоборот.

Как известно, например, из [1], для системы G/G/1 среднее время ожидания определяется выражением

$$\bar{W} = \frac{D_\lambda + D_\mu + (1-\rho)^2 / \lambda^2}{2(1-\rho)/\lambda} - \frac{\bar{I}^2}{2\bar{I}}. \quad (1)$$

Следовательно, первое слагаемое в правой части (1) связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью. Второе слагаемое в правой части (1) остается в общем случае неизвестным и вполне вероятно, что оно может зависеть от моментов интервалов поступления и

времени обслуживания более высокого порядка, чем первые два. Поэтому при анализе СМО G/G/1 необходимо учитывать не только первые два момента случайных интервалов времен поступления и обслуживания, но и моменты более высокого порядка.

Теперь перейдем к определению гиперэрланговского закона распределения. Распределение с плотностью

$$f(t) = \begin{cases} \sum_i^R \alpha_i \frac{k_i \lambda_i (k_i \lambda_i t)^{k_i-1}}{(k_i-1)!} e^{-k_i \lambda_i t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}, \quad \sum_{i=1}^R \alpha_i = 1$$

называют гиперэрланговским порядка R и обозначают HE_R [1]. Гиперэрланговское распределение представляет собой вероятностную смесь нормированных распределений Эрланга порядка k с функцией плотности

$$f_k(t) = \frac{k\lambda(k\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\lambda t} \text{ и является наиболее общим распределением неотрицательных непрерывных случайных величин, поскольку имеет коэффициент вариации } c_\tau \text{ в интервале от } 0 \text{ до } \infty [5].$$

В данной работе мы ограничимся гиперэрланговским распределением 2-го порядка при $k_i = 2$ с функцией плотности

$$f(t) = 4p\lambda_1^2 t e^{-2\lambda_1 t} + 4(1-p)\lambda_2^2 t e^{-2\lambda_2 t}. \quad (2)$$

в связи с тем, что при $k_i \geq 3$ дальнейшие выкладки становятся чрезвычайно трудоемкими.

Как будет показано ниже, коэффициент вариации для такого распределения $c_\tau > 1/\sqrt{2}$. Распределение (2) в научной литературе обозначают через HE_2 . Оно содержит три параметра $0 < p < 1$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ и таким образом, позволяет аппроксимировать произвольные входные распределения на уровне трех первых моментов с использованием известного метода моментов. Ниже будет показано, что распределение HE_2 , как и H_2 однозначно может определяться как двумя, так и тремя первыми моментами.

Объектом исследования является СМО типа G/G/1.

Предметом исследования является среднее время ожидания в обычной системе $HE_2/HE_2/1$ и в системе $HE_2/HE_2/1$ со сдвинутыми гиперэрланговскими входными распределениями.

Целью работы является получение решения в замкнутой форме для основной характеристики системы – среднего времени ожидания требований в очереди для обычной системы массового обслуживания $HE_2/HE_2/1$ и $HE_2/HE_2/1$ со сдвинутыми с гиперэрланговскими входными распределениями второго порядка.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе ставится задача нахождения решения для времени ожидания требований в очереди в СМО

HE₂/HE₂/1 и построения механизма аппроксимации произвольных законов распределений гиперэрланговским.

Для исследования системы G/G/1 как известно, например, из [1–4], используется интегральное уравнение Линдли. Одна из форм уравнения Линдли выглядит так:

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u) dC(u), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Важно заметить, что такая интегральная форма уравнения Линдли имеет место только для неотрицательных значений аргумента y , т.к. для отрицательных значений аргумента функция $W(y) \equiv 0$.

При кратком изложении метода решения ИУЛ будем придерживаться подхода и символики автора [1], как это было проделано в работах автора [6, 7] с гиперэкспоненциальными входными распределениями. Для этого через $A^*(s)$ и $B^*(s)$ обозначим преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов между поступлениями и времени обслуживания соответственно. Суть решения ИУЛ методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1$ представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от s . Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложение: $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$, где $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ некоторые рациональные функции от s , которые можно разложить на множители. Функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям согласно [1]:

1. для $\text{Re}(s) > 0$ функция $\psi_+(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости;
2. для $\text{Re}(s) < D$ функция $\psi_-(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости, D – некоторая положительная константа, определяемая из условия:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} < \infty.$$

Кроме того, функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны обладать следующими свойствами:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1. \quad (4)$$

Построение функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ с учетом условий (3) и (4) будет продемонстрировано ниже.

2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Используемый в работе метод спектрального разложения решения ИУЛ впервые подробно представлен в классике теории массового обслуживания [1], а впоследствии применялся во многих работах, включая [2, 3]. Другой подход к решению ИУЛ использован в [4]. Здесь вместо термина «спектральное разложение» использована факторизация, а вместо функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ – компоненты факторизации $\omega_+(z, t)$ и $\omega_-(z, t)$ функции $1 - z \cdot \chi(t)$. Такой подход для получения конечных результатов для системы HE₂/HE₂/1 менее удобен, чем подход, описанный в [1] и проиллюстрированный многочисленными примерами.

Метод спектрального разложения решения ИУЛ также применен для исследования систем с гиперэкспоненциальными входными распределениями в работах [6–8]. В то же время, научной литературе, включая веб-ресурсы специализированных журналов [13, 14], автору не удалось обнаружить результаты по времени ожидания для СМО с гиперэрланговскими входными распределениями 2-го порядка общего вида (2).

Кроме того, в научной литературе нет упоминаний о СМО со сдвинутыми входными распределениями, или же другими словами СМО с запаздыванием во времени. Впервые результаты по СМО с запаздыванием для классической системы M/M/1 со сдвинутыми экспоненциальными распределениями опубликованы в работе автора [9]. Результаты [9] позволили развить теорию метода спектрального разложения решения ИУЛ на смеси сдвинутых вправо от нулевой точки нормированных распределений Эрланга, т.е. на сдвинутое гиперэрланговское распределение. Таким образом, в основу данной статьи легли работы [1, 6, 9].

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В СМО HE₂/HE₂/1, интервалы между соседними требованиями входного потока распределены по закону:

$$a(t) = 4p\lambda_1^2 t e^{-2\lambda_1 t} + 4(1-p)\lambda_2^2 t e^{-2\lambda_2 t}, \quad (5)$$

а время обслуживания –

$$b(t) = 4q\mu_1^2 t e^{-2\mu_1 t} + 4(1-q)\mu_2^2 t e^{-2\mu_2 t}. \quad (6)$$

Преобразование Лапласа функции (5) имеет вид:

$$A^*(s) = p \left(\frac{2\lambda_1}{s + 2\lambda_1} \right)^2 + (1-p) \left(\frac{2\lambda_2}{s + 2\lambda_2} \right)^2, \quad (7)$$

а функции (6) –

$$B^*(s) = q \left(\frac{2\mu_1}{s + 2\mu_1} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{s + 2\mu_2} \right)^2. \quad (8)$$

Перейдем к определению спектрального разложения решения ИУЛ в виде отношения двух рациональных функций $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ в случае распределений (5) и (6) с учетом преобразований Лапласа (7) и (8), а сами функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ в отдельности могут быть определены только после получения полного разложения. Получим следующее выражение для отношения:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[p \left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 - s} \right)^2 + (1-p) \left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2 - s} \right)^2 \right] \times \left[q \left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1 + s} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2 + s} \right)^2 \right] - 1.$$

Первый сомножитель в правой части в квадратных скобках равен:

$$\begin{aligned} & \left[p \left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 - s} \right)^2 + (1-p) \left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2 - s} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{p(16\lambda_1^2\lambda_2^2 - 16\lambda_1^2\lambda_2s + 4\lambda_1^2s^2)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2} + \\ & + \frac{(1-p)(16\lambda_1^2\lambda_2^2 - 16\lambda_1\lambda_2^2s + 4\lambda_2^2s^2)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2} = \\ & = \frac{a_0 - a_1s + a_2s^2}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2}, \end{aligned}$$

здесь использованы промежуточные параметры $a_0 = 16\lambda_1^2\lambda_2^2$, $a_1 = 16\lambda_1\lambda_2[p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2]$, $a_2 = 4[p\lambda_1^2 + (1-p)\lambda_2^2]$.

Аналогично представим второй сомножитель:

$$\begin{aligned} & \left[q \left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1 + s} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2 + s} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{q(16\mu_1^2\mu_2^2 + 16\mu_1^2\mu_2s + 4\mu_1^2s^2)}{(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2} + \\ & + \frac{(1-q)(16\mu_1^2\mu_2^2 + 16\mu_1\mu_2^2s + 4\mu_2^2s^2)}{(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2} = \\ & = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2}, \end{aligned}$$

здесь использованы промежуточные параметры $b_0 = 16\mu_1^2\mu_2^2$, $b_1 = 16\mu_1\mu_2[q\mu_1 + (1-q)\mu_2]$, $b_2 = 4[q\mu_1^2 + (1-q)\mu_2^2]$.

Тогда искомое выражение для спектрального разложения будет иметь вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{(a_0 - a_1s + a_2s^2)(b_0 + b_1s + b_2s^2)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2} - \frac{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2}. \quad (9)$$

Многочлен в числителе в правой части разложения (9) как правило всегда имеет один нуль $s=0$ [1]. В данном случае свободный член разложения также равен 0: $a_0b_0 - 256\lambda_1^2\lambda_2^2\mu_1^2\mu_2^2 \equiv 0$. В числителе дроби в правой части разложения получили многочлен восьмой степени $-s(c_7 - c_6s + c_5s^2 - c_4s^3 - c_3s^4 - c_2s^5 - c_1s^6 - c_0)$, коэффициенты которого равны:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0b_1 - a_1b_0 - 256\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2[\lambda_1\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) - \mu_1\mu_2(\lambda_1 + \lambda_2)], \\ c_1 &= a_0b_2 - a_1b_1 + a_2b_0 - 64[\lambda_1^2\lambda_2^2(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \mu_1^2\mu_2^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)] - 256\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2 \times \\ & \times (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_1 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 - \lambda_2\mu_2 + \mu_1\mu_2), \\ c_2 &= a_2b_1 - a_1b_2 - 64\{[\lambda_1^2\lambda_2^2 + \mu_1\mu_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)] \times \\ & \times (\mu_1 + \mu_2) - (\lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2)(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \mu_1^2\mu_2^2(\lambda_1 + \lambda_2)\} + 256\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2), \\ c_3 &= a_2b_2 - 16[\lambda_1^2\lambda_2^2 + \mu_1^2\mu_2^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\mu_1^2 + \mu_2^2)] + \\ & + 64[(\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2)(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2) - \\ & - \lambda_1\lambda_2(\mu_1^2 + \mu_2^2) - \mu_1\mu_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 4\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2], \\ c_4 &= 16[(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1\lambda_2 + 4\mu_1\mu_2) - (\mu_1 + \mu_2) \times \\ & \times (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 4\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1^2 + \mu_2^2)], \\ c_5 &= 16[(\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2) - \lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \\ & - 4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2)], \\ c_6 &= 4(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2). \end{aligned} \quad (10)$$

Данные коэффициенты получены с помощью выполнения символьных операций математического пакета Mathcad над числителем разложения (9), т.к. в числителе разложения получается 90 слагаемых, и вручную обработать и привести подобные члены после раскрытия скобок довольно проблематично. Возможно поэтому эта задача решалась впервые.

Выделим многочлен в числителе разложения

$$s^7 - c_6s^6 - c_5s^5 - c_4s^4 - c_3s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0, \quad (11)$$

т.к. определение его корней и работа с ними является важным моментом метода спектрального разложения решения ИУЛ.

Исследование многочлена (11) с коэффициентами (9) с использованием формул Виетта подтверждает наличие четырех отрицательных действительных корней либо двух отрицательных действительных

корней и двух комплексно сопряженных корней с отрицательными вещественными частями, а также трех положительных действительных корней либо одного положительного и двух комплексно сопряженных корней с положительными вещественными частями. Исследуем знак младшего коэффициента многочлена (11). После несложных преобразований получим

$$c_0 = 256\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2 \{ \mu_1\mu_2 [p\lambda_2 + (1-p)\lambda_1] + \lambda_1\lambda_2 [q\mu_2 + (1-q)\mu_1] \},$$

следовательно, $c_0 > 0$. С учетом знака минус в многочлене перед коэффициентом c_0 , формулы Виетта не противоречат факту наличия четырех отрицательных корней у многочлена (11). В общем же случае, наличие таких корней следует из существования и единственности спектрального разложения [1] или же факторизации [4].

Обозначив корни многочлена (11) с отрицательными вещественными частями для удобства через $-s_1, -s_2, -s_3, -s_4$, а с положительными вещественными частями через s_5, s_6, s_7 , отношение $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ окончательно можно разложить на следующие множители:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)(s-s_5)(s-s_6)(s-s_7)}{(2\lambda_1-s)^2(2\lambda_2-s)^2(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}.$$

Поэтому с учетом условий (3), (4) за функцию $\psi_+(s)$ примем

$$\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}{[(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2]},$$

т.к. нули многочлена (11): $s=0, -s_1, -s_2, -s_3, -s_4$, и полюсы $s=-2\mu_1, s=-2\mu_2$ лежат в области $\text{Re}(s) \leq 0$, а за функцию

$$\psi_-(s) = -(2\lambda_1-s)^2(2\lambda_2-s)^2 / [(s-s_5)(s-s_6)(s-s_7)].$$

Теперь выполнение условия (3) для построенных функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ очевидно. Это подтверждает и рисунок, где отображены нули и полюсы отношения $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ на комплексной s -плоскости для исключения ошибок построения спектрального разложения. На рисунке полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

Теперь остается проверить выполнение условий (4): имеем $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1$; $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\psi_-(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{-24s}{24s} = -1$, следовательно, условия (4) для построения спектрального разложения также выполнены.

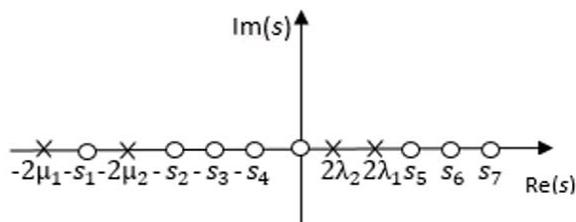


Рисунок 1 – Нули и полюсы функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ для системы HE₂/HE₂/1

Далее по методике спектрального разложения определим постоянную

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}{(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2} = \frac{s_1s_2s_3s_4}{16\mu_1^2\mu_2^2}.$$

Постоянная K определяет вероятность того, что поступающее в систему требование заставит ее свободной. Функция $\psi_+(s)$ позволяет найти преобразование Лапласа ФРВ времени ожидания $W(y)$:

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{s_1s_2s_3s_4(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2}{16\mu_1^2\mu_2^2s(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}.$$

Следовательно, преобразованием Лапласа для функции плотности времени ожидания будет функция $s \cdot \Phi_+(s)$, т.е.

$$W^*(s) = \frac{s_1s_2s_3s_4(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2}{16\mu_1^2\mu_2^2s(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}. \quad (12)$$

Среднее время ожидания в очереди равно значению производной от преобразования Лапласа (12) функции плотности со знаком минус в точке $s=0$:

$$-\left. \frac{dW^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}.$$

Окончательно, среднее время ожидания в очереди для СМО HE₂/HE₂/1:

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}. \quad (13)$$

Из выражения (13) также можно определить дисперсию времени ожидания. Вторая производная от преобразования (13) в точке $s=0$ дает второй начальный момент времени ожидания, что позволяет определить дисперсию времени ожидания. Учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания [10], тем самым получим возможность его определения через дисперсию. Это является важным результатом для анализа трафика, чувствительного к задержкам.

Теперь перейдем к задаче аппроксимации закона распределения (5) по аналогии с [11, 12] с использованием двух первых моментов. Для этого воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до второго порядка для распределения (5):

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}, \quad (14)$$

$$\overline{\tau_\lambda^2} = \frac{3}{2} \left[\frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{(1-p)}{\lambda_2^2} \right]. \quad (15)$$

Рассматривая равенства (14) и (15) как запись метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (5) λ_1, λ_2, p . Система двух уравнений (14), (15) при этом является недоопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации:

$$c_\lambda^2 = \frac{\overline{\tau_\lambda^2} - (\bar{\tau}_\lambda)^2}{(\bar{\tau}_\lambda)^2}, \quad (16)$$

как связующее условие между (14) и (15). Кроме того, коэффициент вариации будем использовать в расчетах в качестве входного параметра системы.

Исходя из вида уравнения (14) положим

$$\lambda_1 = 2p/\bar{\tau}_\lambda, \quad \lambda_2 = 2(1-p)/\bar{\tau}_\lambda \quad (17)$$

и потребуем выполнения условия (16). Подставив выражения (14), (15) и частное решение (17) в (16) и решив уравнение относительно параметра p , выберем

одно нужное значение: $p = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2(1+c_\lambda^2)-3}{8(1+c_\lambda^2)}}$. Отсюда

следует, что коэффициент вариации $c_\lambda > 1/\sqrt{2}$. Таким образом, получено частное решение недоопределенной системы уравнений (14) и (15) методом подбора. Аналогично поступив с законом распределения (6), определяем его неизвестные параметры μ_1, μ_2, q .

Такой же подход к аппроксимации законов распределения гиперэкспоненциальным распределением применен в работах автора [5–7]. Таким образом, гиперэрланговский закон распределения может определяться полностью двумя первыми моментами и перекрывать весь диапазон изменения коэффициента вариации от $1/\sqrt{2}$ до ∞ , что шире, чем у гиперэкспоненциального распределения $(1, \infty)$.

Учитывая тот факт, что распределение HE_2 является трехпараметрическим, аппроксимацию можно выполнить и на уровне трех первых моментов. Для этого запишем выражения для начального момента третьего порядка, полученное через преобразование Лапласа (7):

$$\overline{\tau_\lambda^3} = \frac{3p}{\lambda_1^3} + \frac{3(1-p)}{\lambda_2^3}. \quad (18)$$

Теперь присоединив уравнение (18) к уравнениям моментов (14) и (15) и решив систему трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными в пакете Mathcad находим все три параметра. Как показано в работе [5] на примере гиперэкспоненциальных входных рас-

пределений, аппроксимация с использованием двух первых моментов в отличие от трех моментов, может занижать величину среднего времени ожидания до 10% в зависимости от загрузки и величины третьего момента.

Перейдем к исследованию системы $HE_2/HE_2/1$ со сдвинутыми входными распределениями, т.е. к системе с запаздыванием во времени.

Рассмотрим систему, образованную двумя потоками с функциями плотностей распределения интервалов вида:

– для входного потока

$$a(t) = 4p\lambda_1^2(t-t_0)e^{-2\lambda_1(t-t_0)} + 4(1-p)\lambda_2^2(t-t_0)e^{-2\lambda_2(t-t_0)}, \quad (19)$$

– для времени обслуживания

$$b(t) = 4q\mu_1^2(t-t_0)e^{-2\mu_1(t-t_0)} + 4(1-q)\mu_2^2(t-t_0)e^{-2\mu_2(t-t_0)}. \quad (20)$$

Такую систему обозначим через $HE_2^-/HE_2^-/1$.

Нас интересует среднее время ожидания для системы $HE_2^-/HE_2^-/1$.

Утверждение. Спектральное разложение $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ для системы с запаздыванием $HE_2^-/HE_2^-/1$ имеет точно такой же вид, что и для обычной системы $HE_2/HE_2/1$:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)(s-s_5)(s-s_6)(s-s_7)}{(2\lambda_1-s)^2(2\lambda_2-s)^2(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}.$$

Доказательство. Для системы $HE_2^-/HE_2^-/1$ спектральное разложение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} &= \left[p \left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1-s} \right)^2 + (1-p) \left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2-s} \right)^2 \right] e^{t_0 s} \times \\ &\times \left[q \left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1+s} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2+s} \right)^2 \right] e^{-t_0 s} - 1 = \\ &= \left[p \left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1-s} \right)^2 + (1-p) \left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2-s} \right)^2 \right] \times \\ &\times \left[q \left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1+s} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2+s} \right)^2 \right] - 1. \end{aligned}$$

Здесь показатели степени у экспонент обнуляются и тем самым операция сдвига в спектральном разложении полностью нивелируется. Таким образом, спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для двух систем совпадают. Утверждение доказано.

Теперь мы можем воспользоваться для новой системы результатами для обычной системы $HE_2/HE_2/1$, но прежде необходимо определить числовые характеристики распределений (19) и (20). Для этого воспользуемся свойством преобразования Лапласа про-

изводить моменти. Преобразование Лапласа функции (19) имеет вид:

$$A^*(s) = \left[p \left(\frac{2\lambda_1}{s+2\lambda_1} \right)^2 + (1-p) \left(\frac{2\lambda_2}{s+2\lambda_2} \right)^2 \right] \cdot e^{-t_0 s}.$$

Значение первой производной функции $A^*(s)$ со знаком минус в точке $s=0$ равно

$$-\left. \frac{dA^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0.$$

Отсюда среднее значение интервалов между соседними требованиями будет равно

$$\bar{\tau}_\lambda = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0. \quad (21)$$

Значение второй производной функции $A^*(s)$ в точке $s=0$ дает второй начальный момент интервала поступления

$$\bar{\tau}_\lambda^2 = t_0^2 + 2t_0 \left[\frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2} \right] + \frac{3p}{2\lambda_1^2} + \frac{3(1-p)}{2\lambda_2^2}. \quad (22)$$

Отсюда определим квадрат коэффициента вариации интервалов поступления:

$$c_\lambda^2 = \frac{\lambda_1^2 - 2p\lambda_1\lambda_2 + p(1-2p)(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{2[t_0\lambda_1\lambda_2 - p(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1]^2}. \quad (23)$$

Аналогично определяем среднее время обслуживания

$$\bar{\tau}_\mu = q\mu_1^{-1} + (1-q)\mu_2^{-1} + t_0, \quad (24)$$

второй начальный момент времени обслуживания

$$\bar{\tau}_\mu^2 = t_0^2 + 2t_0 \left[\frac{q}{\mu_1} + \frac{(1-q)}{\mu_2} \right] + \frac{3q}{2\mu_1^2} + \frac{3(1-q)}{2\mu_2^2}, \quad (25)$$

и квадрат коэффициента вариации времени обслуживания:

$$c_\mu^2 = \frac{\mu_1^2 - 2q\mu_1\mu_2 + q(1-2q)(\mu_1 - \mu_2)^2}{2[t_0\mu_1\mu_2 - q(\mu_1 - \mu_2) + \mu_1]^2}. \quad (26)$$

Рассматривая выражения (21)–(23) как запись метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (5) λ_1, λ_2, p . Система двух уравнений (21), (22) при этом является недоопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации (23) в виде связующего условия. Исходя из вида уравнения (21), положим

$$\lambda_1 = 2p / (\bar{\tau}_\lambda - t_0), \quad \lambda_2 = 2(1-p) / (\bar{\tau}_\lambda - t_0) \quad (27)$$

и потребуем выполнения условия (23). Подставив выражения (21), (22) и частное решение (27) в (23), решаем полученное уравнение четвертой степени относительно параметра p , с учетом условия $0 < p < 1$, а затем определяем из (27) параметры λ_1 и λ_2 .

Поступая аналогично с выражениями (24)–(26), определяем неизвестные параметры распределения (20) q, μ_1, μ_2 с учетом условия $0 < q < 1$. Таким образом, алгоритм расчета среднего времени ожидания при заданных входных параметрах $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu, t_0$ сводится к последовательному решению указанных уравнений. Далее определяем коэффициенты многочлена (11) и находим нужные корни с отрицательными вещественными частями $-s_1, -s_2, -s_3, -s_4$. Подставив абсолютные значения этих корней в выражение (13) определяем среднее время ожидания. Наличие таких корней обусловлено существованием и единственностью спектрального разложения. Проведенные многочисленные эксперименты только подтверждают данный факт.

Теперь оценим влияние параметра сдвига $t_0 > 0$ на числовые характеристики распределений (19) и (20). Нас интересует прежде всего квадрат коэффициента вариации, т.к. среднее время ожидания в системе G/G/1 связано с коэффициентами вариаций квадратичной зависимостью (1).

Квадрат коэффициента вариации для распределения (5) равен

$$c_\lambda^2 = \frac{\lambda_1^2 - 2p\lambda_1\lambda_2 + p(1-2p)(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{2[\lambda_1 - p(\lambda_1 - \lambda_2)]^2}. \quad (28)$$

Сравнивая выражения (23) и (28) убеждаемся, что операция сдвига во времени уменьшает коэффициент вариации интервалов поступлений в $1 + \frac{t_0\lambda_1\lambda_2}{[\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p]}$ раз. Аналогично обстоит дело и с коэффициентом вариации времени обслуживания – уменьшение в $1 + \frac{t_0\mu_1\mu_2}{[\mu_1(1-q) + \mu_2 q]}$ раз. Следовательно, система с запаздыванием обеспечивает меньшее время ожидания по сравнению с обычной системой при одинаковой загрузке ρ . Это замечательный результат в теории СМО!

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Ниже в таблицах 1 и 2 приведены результаты расчетов в пакете Mathcad среднего времени ожидания для системы HE₂/HE₂/1 по полученной расчетной формуле (13) для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0, 1; 0, 5; 0, 9$.

Таблица 1 – Результаты для времени ожидания при коэффициентах вариаций (c_λ, c_μ) , меньших 1

Входные параметры		Среднее время ожидания	
ρ	(c_λ, c_μ)	Для системы $HE_2/HE_2/1$	Для системы $E_2/E_2/1$
0,1	(0,71;0,71)	0,02	0,02
0,5	(0,71;0,71)	0,40	0,39
0,9	(0,71;0,71)	4,40	4,36

Таблица 2 – Результаты для времени ожидания при коэффициентах вариаций (c_λ, c_μ) , больших 1

Входные параметры		Среднее время ожидания	
ρ	(c_λ, c_μ)	Для системы $HE_2/HE_2/1$	Для системы $H_2/H_2/1$
0,1	(2;2)	0,34	0,45
	(4;4)	1,68	1,78
	(8;8)	7,16	7,11
0,5	(2;2)	3,98	4,04
	(4;4)	16,53	16,13
	(8;8)	66,73	64,18
0,9	(2;2)	36,21	36,20
	(4;4)	145,31	144,83
	(8;8)	580,56	577,86

Коэффициент загрузки в данном случае определяется отношением средних интервалов $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$. Расчеты проведены для нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$. В табл. 1 приведены результаты для коэффициентов вариаций (c_λ, c_μ) , меньших 1, а в табл. 2 – больших 1. При этом для сравнения использованы известные результаты для СМО $E_2/E_2/1$ и $H_2/H_2/1$ соответственно.

В таблице 3 приведены результаты расчета для системы $HE_2^- / HE_2^- / 1$.

Таблица 3 – Результаты экспериментов для СМО $HE_2^- / HE_2^- / 1$ и $HE_2/HE_2/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания			
ρ	$(c_\lambda; c_\mu)$	Для системы $HE_2^- / HE_2^- / 1$			Для системы $HE_2/HE_2/1$
		$t_0=0,9$	$t_0=0,5$	$t_0=0,1$	
0,1	(0,71;0,71)	0,01	0,01	0,02	0,02
	(2;2)	0,29	0,32	0,33	0,34
	(4;4)	1,21	1,55	1,66	1,68
	(8;8)	4,93	6,48	7,05	7,16
0,5	(0,71;0,71)	0,27	0,31	0,39	0,40
	(2;2)	2,32	3,15	3,82	3,98
	(4;4)	9,35	12,94	15,85	16,53
	(8;8)	37,50	52,13	63,96	66,73
0,9	(0,71;0,71)	3,06	4,11	4,39	4,40
	(2;2)	24,42	33,36	35,88	36,21
	(4;4)	97,71	133,3	143,8	145,31
	(8;8)	390,90	532,7	574,5	580,56

С уменьшением значения параметра t_0 среднее время ожидания в системе $HE_2^- / HE_2^- / 1$ стремится к среднему времени ожидания в системе $HE_2/HE_2/1$, что подтверждает полную адекватность и достоверность полученных результатов.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Как видно из таблиц 1 и 2, результаты в обоих случаях достаточно близки к известным результатам. Данные табл. 3 подтверждают адекватность и достоверность проведенных выше математических выкладок.

Выражение (13), полученное впервые с использованием классического метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, справедливо для определения среднего времени ожидания как для обычной системы $HE_2/HE_2/1$, так и для системы с запаздыванием $HE_2^- / HE_2^- / 1$. Оно расширяет и дополняет известную формулу (1), а также расширяет область применения СМО за счет уменьшения коэффициентов вариаций интервалов поступления и времени обслуживания до $1/\sqrt{2}$ – для обычной системы, и до 0 – для системы с запаздыванием и тем самым позволяет перекрывать диапазон их изменения от 0 до ∞ .

6 ОБСУЖДЕНИЕ

В работе получено аналитическое решение для среднего времени ожидания для системы $HE_2/HE_2/1$ с использованием символьных операций пакета Mathcad. Это же решение позволяет его использовать для системы с запаздыванием $HE_2^- / HE_2^- / 1$. Используя предложенный подход, помимо среднего времени ожидания, можно определить дисперсию и моменты высших порядков времени ожидания.

Полученный результат, с одной стороны, дополняет систему $H_2/H_2/1$, а с другой стороны, расширяет диапазон изменения коэффициентов вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания от $1/\sqrt{2}$ до ∞ . Для убедительности, данные расчетов для системы $HE_2/HE_2/1$ сравниваются с результатами для систем $E_2/E_2/1$ и $H_2/H_2/1$, что демонстрирует их достаточную близость.

ВЫВОДЫ

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что впервые получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемых систем и с помощью спектральных разложений выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди для этих систем в замкнутой форме. Эти выражения расширяют и дополняют формулу (1) для среднего времени ожидания для систем $G/G/1$ с произвольными законами распределений входного потока и времени обслуживания.

Практическое значение работы заключается в том, что полученные результаты с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика,

где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого необходимо знать числовые характеристики интервалов входящего трафика и времени обслуживания на уровне двух первых моментов, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика [8].

Перспективы дальнейших исследований проматриваются в продолжении исследования систем G/G/1 с другими общими входными распределениями и в расширении и дополнении формулы (1) для среднего времени ожидания.

ЛІТЕРАТУРА / LITERATURA

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания ; пер. с англ. под редакцией В. И. Неймана / Л. Клейнрок. – М. : Машиностроение, 1979. – 432 с.
2. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems / N. Brannstrom. – Applied to HS-DSSS. Lulea university of technology, 2004. – 79 p.
3. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods / W. Whitt // Operation Research. – 1982. – № 1. – P. 125–147.
4. Бочаров П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М. : Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
5. Алиев Т. И. Основы моделирования дискретных систем / Т. И. Алиев. – СПб : СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.
6. Тарасов В.Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями / В. Н. Тарасов // Проблемы передачи информации. – 2016. – № 1. – С. 16–26.
7. Тарасов В.Н. Определение среднего времени ожидания требований в управляемой системе массового обслуживания $M2/M2/1$ / В. Н. Тарасов, И. В. Карташевский //

УДК 621.391.1:621.395

АНАЛІЗ І ПОРІВНЯННЯ ДВОХ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ГІПЕРЕРЛАНГІВСЬКИМИ ВХІДНИМИ РОЗПОДІЛАМИ

Тарасов В. Н. – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри програмного забезпечення і управління в технічних системах Поволзького державного університету телекомунікацій та інформатики, Російська Федерація.

АНОТАЦІЯ

Актуальність. Розглянуто задачу виведення рішення для середнього часу очікування в черзі в замкнутій формі для звичайної системи з гіперерлангівськими входними розподілами другого порядку і системи зі зсунутими гіперерлангівськими входними розподілами.

Мета роботи – отримання рішення для основної характеристики системи – середнього часу очікування вимог в черзі для системи масового обслуговування типу G/G/1 зі звичайними із зсунутими з гіперерлангівськими входними розподілами другого порядку.

Метод. Для вирішення поставленого завдання використаний класичний метод спектрального розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндлі, який дозволяє отримати рішення для середнього часу очікування для розглянутих систем у замкнутій формі. Метод спектрального розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндлі займає важливу частину теорії систем G/G/1. Для практичного застосування отриманих результатів використаний відомий метод моментів теорії ймовірностей.

Результати. Вперше отримано спектральні розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндлі для обох систем, за допомогою яких виведені розрахункові вирази для середнього часу очікування в черзі для вищевказаних систем в замкнутій формі. Такий підхід дозволяє розрахувати середній час очікування для зазначених систем в математичних пакетах для широкого діапазону зміни параметрів трафіку. Усі інші характеристики систем є похідними від середнього часу очікування.

Висновки. Показано, що гіперерлангівський закон розподілу другого порядку, як і гіперекспоненційний є трипараметричним, може визначатися як двома першими моментами, так і трьома першими моментами. Вибір такого закону розподілу ймовірностей обумовлений тим, що його коефіцієнт варіації охоплює більш широкий діапазон, ніж у гіперекспоненційному розподілі. Для зсунутого гіперерлангівського закону розподілу коефіцієнт варіації охоплює ще більш широкий діапазон, ніж у звичайного. Введення зсунутих у часі розподілів розширює сферу застосування СМО з урахуванням відомого факту з теорії масового обслуговування, що середній час очікування пов'язаний з коефіцієнтами варіації інтервалів надходжень і часу

Системы управления и информационные технологии. – 2014. – № 3(57). – С. 92–96.

8. Анализ входящего трафика на уровне трех моментов распределений временных интервалов / [В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева, Г. А. Горелов, С. В. Малахов] // Информационные технологии. – 2014. – № 9. – С. 54–59.
9. Тарасов В. Н. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием / В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева, И. А. Блатов // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 11. – С. 51–59.
10. [HTTPS://tools.ietf.org/html/rfc3393](https://tools.ietf.org/html/rfc3393). RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (дата обращения: 26.02.2016).
11. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals / A. Myskja // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers. – 1991. – P. 683–688.
12. Алиев Т. И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания / Т. И. Алиев // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – № 2(84). – С. 88–93.
13. Aras A. K. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment / A. K. Aras, X. Chen, & Y. Liu // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89, No. 1. – P. 81–125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
14. Ghosh, A. & Huang, K. Asymptotically optimal control of N-systems with H_2^* service times under many-server heavy traffic / A. Ghosh, & K. Huang // Queueing Systems. – 2017. – Vol. 86, No. 1. – P. 35–60. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9518-1>

Статья поступила в редакцию 01.06.2018.

Посля доработки 25.06.2018.

обслуговування квадратичною залежністю. Метод спектрального розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндлі для системи масового обслуговування з гіперерлангівськими входними розподілами другого порядку дозволяє отримати рішення в замкнутій формі і це рішення публікується вперше. Отримане рішення доповнює і розширює відому формулу теорії масового обслуговування для середнього часу очікування вимог в черзі для системи масового обслуговування типу G/G/1.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гіперерлангівський закон розподілу, інтегральне рівняння Ліндлі, метод спектрального розкладання, перетворення Лапласа.

UDC 621.391.1:621.395

ANALYSIS AND COMPARISON OF TWO QUEUEING SYSTEMS WITH HYPERERLANGIAN INPUT DISTRIBUTIONS

Tarasov V. N. – Dr. Sc., Professor, Head of Department of Software and Management in Technical Systems of Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation.

ABSTRACT

Context. The problem of finding the solution for the mean waiting time in a closed form for a conventional system with hypererlangian input distributions of second order and for system with shifted hypererlangian input distributions is considered.

Objective is obtaining a solution for the main characteristic of the system—the average waiting time for queuing requirements for a queuing system of the type G/G/1 with normal and with shifted hypererlangian input distributions of the second order.

Method. To solve this problem, we used the classical method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation, which allows one to obtain a solution for the mean waiting time for of the systems under consideration in closed form. The method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation occupies an important part of the theory of systems G/G/1. For the practical application of the results obtained, the well-known method of moments of probability theory is used.

Results. For the first time, spectral decompositions of the solution of the Lindley integral equation for both systems were obtained, with the help of which the calculated expressions for the average waiting time in the queue for the above-mentioned systems in closed form were derived. This approach allows us to calculate the average latency for these systems in mathematical packages for a wide range of traffic parameters. All other characteristics of the systems are the derived from the average waiting time.

Conclusions. It is shown that the hypererlangian distribution law of the second order, like the hyperexponential, which is three-parameter, can be determined by both the first two moments and the first three moments. The choice of such a law of probability distribution is due to the fact that its coefficient of variation covers a wider range than the hyperexponential distribution. For the shifted hypererlangian distribution law, the coefficient of variation covers an even wider range. The introduction of shifted distributions extends the scope of the QS with considering the well-known fact from queuing theory, that the average waiting time is related to the coefficients of variations in the intervals of receipts and the time of service by a quadratic dependence. The method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation for a queuing system with hypererlangian input distributions of the second order makes it possible to obtain a solution in closed form and this solution is published for the first time. The solution obtained supplements and extends the well-known queuing theory formula for the average waiting time in the queue for a queuing system of type G/G/1.

KEYWORDS: hypererlangian distribution law, Lindley integral equation, spectral decomposition method, Laplace transform.

REFERENCES

1. Kleinrock L. Теорія масового обслуговування. Moscow, Mashinostroenie Publ, 1979, 432p.
2. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems. Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004, 79 p.
3. Bocharov P. P., Pechinkin A. V. Теорія масового обслуговування. Moscow, Publishing House of Peoples' Friendship University, 1995, 529 p.
4. Aliev T.I. Osnovy modelirovaniya diskretnykh system. SPb: SPbGU ITMO, 2009, 363 p.
5. Tarasov V. N. Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions. Problems of Information Transmission, 2016, Vol. 52, No. 1, pp. 14–23. DOI:10.1134/S0032946016010038
6. Tarasov V. N., Kartashevskiy I. V. Opredelenie srednego vremeni ozhidaniya trebovaniy v upravliaemoy sisteme massovogo obsluzhivaniya $H_2/H_2/1$, *Sistemy upravleniya i informatsionnye tehnologii*, 2014, No. 3, pp. 92–95.
7. Tarasov V. N., Bahareva N. F., Gorelov G. A., Malakhov S. V. Analiz vkhodiashego trafika na urovne treh momentov raspredeleniy. *Informacionnye tehnologii*, 2014, No. 9, pp. 54–59.
8. RFC 3393 [IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM)] Available at: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. (accessed: 26.02.2016).
9. Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Blatov I. A. Analysis and calculation of queuing system with delay, *Automation and Remote Control*, 2015, No. 11, pp. 1945–1951. DOI: 10.1134/S0005117915110041
10. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods, *Operation Research*, 1982, Vol. 30, No. 1, pp. 125–147.
11. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and datatrafic in a Period of Change. ITC-13. Elsevier Science Publishers*, 1991, pp. 683–688.
12. Aliev T.I. Approksimaciya veroyatnostnykh raspredelenij v modelyah massovogo obsluzhivaniya, *Nauchno-tekhnicheskij vestnik informacionnykh tekhnologij, mekhaniki i optiki*, 2013, No. 2(84), pp. 88–93.
13. Aras A. K., Chen X. & Y. Liu Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 1, pp. 81–125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
14. Ghosh A. & Huang K. Asymptotically optimal control of N-systems with H_2^* service times under many-server heavy traffic, *Queueing Systems*, 2017, Vol. 86: No. 1, pp. 35–60. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9518-1>