УДК 519.6

МЕТОД РЕДУКЦІЇ МОДЕЛІ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ СИСТЕМ ЕЛЕКТРОННОЇ ОПТИКИ

Мочурад Л. І. – асистент кафедри систем штучного інтелекту Національного університету «Львівська політехніка», Львів, Україна.

АНОТАЦІЯ

Актуальність. Бурхливий розвиток нанотехнологій висуває нові вимоги щодо систем електронної оптики. У сучасних електронно-оптичних системах помічена значна кількість електродів складної конфігурації з наявною геометричною симетрією. При розрахунку електростатичних полів відповідних систем вимагають високої точності обчислень. Це можна забезпечити шляхом розробки нових та вдосконаленням існуючих алгоритмів розрахунку потенціальних полів.

Мета. Метою даної роботи є розробка методу редукції моделі для розрахунку електростатичних полів сучасних систем електронної оптики.

Метод. Для підтвердження дієвості запропонованого у роботі методу розглянуто знаходження параметрів електростатичного поля конкретної модельної системи. Показано, що конфігурація поверхонь електродів володіє абелевою циклічною групою симетрії четвертого порядку. Знайдено матрицю перетворення Фур'є для даної групи. Вдалось, використовуючи метод редукції моделі, на основі апарату теорії груп перейти від системи чотирьох інтегральних рівнянь до послідовності чотирьох незалежних інтегральних рівнянь, де інтегрування ведеться по ¼ сукупної граничної поверхні. Максимальне (повторне) врахування наявної симетрії граничної поверхні при математичному моделюванні електростатичного поля дозволяє, в свою чергу, суттєво понизити порядок моделі – перейти до інтегрування, наприклад, по 1/16, 1/64 граничної поверхні.

Результати. У роботі, не зменшуючи загальності, на прикладі конкретної модельної системи здійснено розрахунок параметрів електростатичного поля. Для наочного представлення якого використано поверхні рівного потенціалу. Результати чисельного моделювання приведені при різній варіації відомих значень потенціалу на граничних поверхнях електродів. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні сучасних систем електронної оптики.

Висновки. Розроблено метод редукції моделі для розрахунку електростатичних полів електронно-оптичних систем, який базується на граничних інтегральних рівняннях теорії потенціалу у поєднанні з апаратом теорії груп, що на відміну від існуючих методів дозволяє значно спростити громіздкість процедури чисельного аналізу параметрів електростатичного поля максимально врахувавши наявну симетрію в геометрії граничних поверхонь, уникнути числової нестійкості обчислень та отримати вищу точність розрахунків. Розширено клас систем електронної оптики, що допускають математичне моделювання на основі методу інтегральних рівнянь.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: модельна система, метод інтегральних рівнянь, абелева група симетрії, циркулянтна матриця, перетворення Фур'є, еквіпотенціальна поверхня.

АБРЕВІАТУРИ

СЕО – системи електронної оптики;
СЛАР – системи лінійних алгебричних рівнянь;
ІР – інтегральні рівняння;
МІР – метод інтегральних рівнянь;
ЕП – еквіпотенціальна поверхня.

НОМЕНКЛАТУРА

A' – циркулянтна матриця;
e – тотожне перетворення;
F – матриця перетворення Фур'є;
f_i – граничні значення потенціалу на i-му електроді;
h – відстань між пластинами;
S_i – конгруентні складові сукупної поверхні S;
$U()$ – значення потенціалу в будь-якій точці;
ρ_i – шукана поверхнева густина розподілу зарядів на i-тій пластині;
τ_k – k-тий елемент абелевої групи симетрії;
τ_y – дзеркальне відображення відносно площини $\{XZ\}$;
τ_z – дзеркальне відображення відносно площини $\{XY\}$;
β – поворот на кут $\pi/2$;
Δ – визначає розміри пластини.

ВСТУП

На сьогоднішній час, СЕО використовують для формування та керування пучками заряджених електродів у відповідних потенціальних полях. Від якості сформованого пучка залежить роздільна здатність електронних мікроскопів, прецизійність систем електронної вакуумної літографії, енергетичні характеристики прискорювачів частинок тощо [1, 2]. Проектування СЕО базується на математичному моделюванні поля створюваного сукупністю заряджених електродів. Помічено [3], що більшості СЕО притаманна геометрична симетрія. Задачу математичного моделювання електростатичного поля можна значно спростити шляхом врахування наявної геометричної симетрії електродів [4].

Об'єктом дослідження є електростатичні поля сучасних СЕО.

Аналіз таких систем дозволяє зробити висновок про наявність значної кількості електродів складної конфігурації з наявною геометричною симетрією.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-4

Предметом дослідження є математичні моделі та методи математичного моделювання електростатичних полів.

Метою роботи є розробити метод редукції моделі для розрахунку електростатичних полів СЕО з наявною геометричною симетрією у конфігурації поверхонь електродів.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо, не зменшуючи загальності, модельну СЕО конфігурація поверхонь електродів якої представлена на рис. 1.

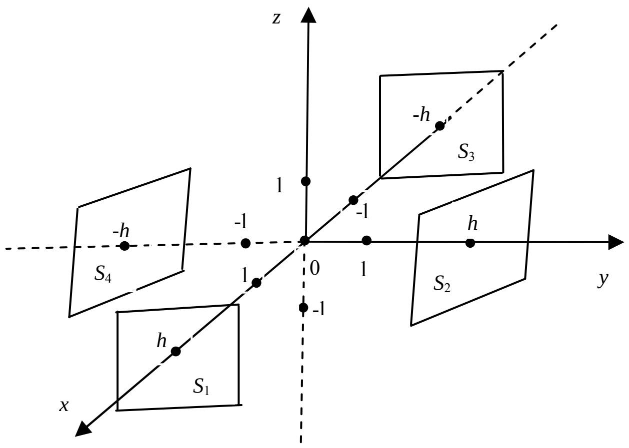


Рисунок 1 – Досліджувана модельна система

Вважатимемо, що електростатичне поле цієї системи створюється системою чотирьох безмежно тонких, ідеально провідних електродів, які у своїй сукупності утворюють деяку багатозв'язну поверхню $S := \bigcup_{i=1}^{4} S_i$. Довільні S_i не мають спільних точок і є розімкненими. До кожного електроду прикладається відомий потенціал, який є постійною величиною. Задача розрахунку електростатичного поля розглядуваної системи еквівалентна системі чотирьох наступних ІР:

$$\iint_{\Delta} \frac{\rho_1(y, z)}{\sqrt{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} dydz + \iint_{\Delta} \frac{\rho_2(x, z)}{\sqrt{(x-h)^2+(h-y_0)^2+(z-z_0)^2}} dxdz +$$
$$\iint_{\Delta} \frac{\rho_3(y, z)}{\sqrt{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+4h^2}} dydz + \iint_{\Delta} \frac{\rho_4(x, z)}{\sqrt{(x-h)^2+(-h-y_0)^2+(z-z_0)^2}} dxdz =$$
$$f_1(y_0, z_0), (y_0, z_0) \in S_1;$$

$$\iint_{\Delta} \frac{\rho_1(y, z)}{\sqrt{(h-x_0)^2+(y-h)^2+(z-z_0)^2}} dydz + \iint_{\Delta} \frac{\rho_2(x, z)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(z-z_0)^2}} dxdz +$$
$$\iint_{\Delta} \frac{\rho_3(y, z)}{\sqrt{(-h-x_0)^2+(y-h)^2+(z-z_0)^2}} dydz + \iint_{\Delta} \frac{\rho_4(x, z)}{\sqrt{(x-x_0)^2+4h^2+(z-z_0)^2}} dxdz =$$
$$= f_2(x_0, z_0), (x_0, z_0) \in S_2;$$

$$\iint_{\Delta} \frac{\rho_1(y, z)}{\sqrt{4h^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} dydz + \iint_{\Delta} \frac{\rho_2(x, z)}{\sqrt{(x+h)^2+(h-y_0)^2+(z-z_0)^2}} dxdz +$$
$$\iint_{\Delta} \frac{\rho_3(y, z)}{\sqrt{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} dydz + \iint_{\Delta} \frac{\rho_4(x, z)}{\sqrt{(x+h)^2+(-h-y_0)^2+(z-z_0)^2}} dxdz =$$
$$= f_3(y_0, z_0), (y_0, z_0) \in S_3;$$

$$\iint_{\Delta} \frac{\rho_1(y, z)}{\sqrt{(x_0-h)^2+(y+h)^2+(z-z_0)^2}} dydz + \iint_{\Delta} \frac{\rho_2(x, z)}{\sqrt{(x-x_0)^2+4h^2+(z-z_0)^2}} dxdz +$$
$$\iint_{\Delta} \frac{\rho_3(y, z)}{\sqrt{(-h-x_0)^2+(y+h)^2+(z-z_0)^2}} dydz + \iint_{\Delta} \frac{\rho_4(x, z)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(z-z_0)^2}} dxdz =$$
$$= f_4(x_0, z_0), (x_0, z_0) \in S_4.$$

Тут $\Delta = [-l, l] \times [-l, l]$, $f_i \left(i = \overline{1,4}\right)$ – на кожному із чотирьох електродів приймають постійні значення і є відомими.

2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Синтез сучасних СЕО складної структури, які б відповідали необхідним вимогам, практично не можливий без етапу попереднього математичного моделювання та чисельного аналізу. Останнє, суттєво розширює границі можливого пошуку оптимальної конструкції СЕО, дає можливість оцінити параметри такої

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-4

системи, фізичне вимірювання яких або трудомістке, або неможливе для необхідної точності [5].

Відомо [5, 6], що поле фізичної моделі ЕОС задовольняє деяке рівняння Лапласа разом з граничними умовами, щодо електричних потенціалів, які задають на поверхнях електродів. Враховуючи складну тривимірну геометрію СЕО точне розв'язування такого рівняння є дуже складне або взагалі неможливе.

Електростатичні поля ЕОС з наявною значною кількістю електродів складної конфігурації досліджуються переважно за допомогою чисельних методів [4–6]. Ефективним при цьому виявляється використання МІР [7]. Показано [8, 9], що даний метод у багатьох випадках є більш економним, ніж скінченно-різницеві методи, які використовуються на практиці. Проте, якщо гранична поверхня має складну конфігурацію, а також висуваються високі вимоги до точності обчислень, то в результаті дискретизації відповідного граничного ІР виникає необхідність чисельного розв'язування СЛАР великих порядків з щільно заповненими матрицями. Це суттєво ускладнює традиційне застосування МІР та приводить до числової нестійкості обчислень. Тому клас крайових задач, які піддаються чисельному аналізу, як правило, обмежується задачами з циліндричною або осьовою симетрією, при якій граничне ІР записується по деякому контуру, або розв'язуванням ІР для кусково-гладких замкнених граничних поверхонь простої структури [10]

З іншого боку, у пучку заряджених частинок сучасних СЕО використовують електроди, які мають складну геометрію та симетрично розташовані відносно деякої осі. Задачу математичного моделювання сучасних СЕО можна суттєво спростити максимально врахувавши наявну симетрію в конфігурації поверхонь електродів. Максимальне врахування геометричної симетрії передбачає виділення такої конгруентної складової поверхні, на основі якої, використовуючи апарат теорії груп, можна суттєво понизити порядок моделі.

Отже, усунення завад на шляху розроблення та оптимізації параметрів сучасних СЕО на основі аналізу стану проблеми можна забезпечити шляхом розробки методу редукції моделі для розрахунку потенціальних полів, створюваних великою кількістю заряджених електродів складної конфігурації.

3 МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

З метою врахування геометричної симетрії сукупної поверхні S, зауважимо, що вона володіє абелевою циклічною групою симетрії четвертого порядку $\{\tau_i\}_{i=1}^4 = \{e, \beta, \beta^2, \beta^3\}$.

Так як невідомі функції ρ_i залежать лише від двох змінних, то очевидно, що

$$\tau_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \tau_3 = \tau_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_4 = \tau_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \tau_1^{-1} = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \tau_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \tau_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі перейдемо до нового базису: $\rho_i' = \rho_i\left(\tau_i^{-1}\right)$, $i = \overline{1, 4}$. Тоді

$$\rho_1'(y, z) = \rho_1(y, z),\quad \rho_2'(y, z) = \rho_2(-x, z),$$
$$\rho_3'(y, z) = \rho_3(-y, z),\quad \rho_4'(y, z) = \rho_4(x, z),$$
$$f_1'(y_0, z_0) = f_1(y_0, z_0),\quad f_2'(y_0, z_0) = f_2(-x_0, z_0),$$
$$f_3'(y_0, z_0) = f_3(-y_0, z_0),\quad f_4'(y_0, z_0) = f_4(x_0, z_0).$$

Введемо позначення:

$$a = \frac{1}{\sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}},$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{(y+h)^2 + (h-y_0)^2 + (z-z_0)^2}},$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + 4h^2}},$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{(y-h)^2 + (h+y_0)^2 + (z-z_0)^2}}.$$

Звідси вихідну систему чотирьох ІР можна подати у вигляді

$$\iint\limits_{\Delta} \sum_{j=1}^{4} A_{ij}'\rho_j'(y, z)\,dydz = f_i(y_0, z_0), \tag{1}$$

де $i = \overline{1, 4}$; $(y_0, z_0) \in S_1$; а A' набуває вигляду

$$A' := \left(a_{ij}'\right)_{i,j=1}^4 = \begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{Vmatrix}.$$

Характери групи $\{e, \beta, \beta^2, \beta^3\}$ визначаються за формулою [6, 11]:

$$\chi_m\left(\tau^k\right) = e^{2\pi i k(m-1)/p},\ k = \overline{0, 3};\ m = \overline{1, 4};\ p = 4.$$

Тоді таблиця характерів матиме вигляд:

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-4

	e	β	β^2	β^3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	i	-1	$-i$
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	$-i$	-1	i

Отже, матриця перетворення Фур'є для даної групи симетрії є наступною:

$$F = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{Vmatrix}.$$

За цією матрицею проведемо заміну

$$\overline{\rho_i}(y, z) = \sum_{j=1}^{4} F_{ij} \rho'_j(y, z), \; i = \overline{1, 4}. \qquad (2)$$

У результаті від системи (1) перейдемо до послідовності чотирьох незалежних ІР вигляду:

$$\iint_{\Delta} [a + b + c + d] \overline{\rho_1}(y, z) dydz = \overline{f}_1(y_0, z_0),$$

$$\iint_{\Delta} [a - ib - c + id] \overline{\rho_2}(y, z) dydz = \overline{f}_2(y_0, z_0),$$

$$\iint_{\Delta} [a - b + c - d] \overline{\rho_3}(y, z) dydz = \overline{f}_3(y_0, z_0),$$

$$\iint_{\Delta} [a + ib - c - id] \overline{\rho_4}(y, z) dydz = \overline{f}_4(y_0, z_0),$$

де $(y_0, z_0) \in S_1$, $\overline{f}_i(y_0, z_0) = \sum_{j=1}^{4} F'_{ij} f'_i(y_0, z_0)$.

З цих рівнянь знаходимо функції $\overline{\rho_i}(y, z)$. Далі підставивши їх в систему (2), знаходимо $\rho'_i(y, z), i = \overline{1, 4}$. Значення потенціалу в будь-якій точці $P(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in R^3$ обчислюємо за формулою:

$$U(P) = \iint_{\Delta} \left[\frac{\rho'_1(y, z)}{\sqrt{(h - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \right.$$
$$+ \frac{\rho'_2(y, z)}{\sqrt{(y + x_0)^2 + (h - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} +$$
$$+ \frac{\rho'_3(y, z)}{\sqrt{(h + x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} +$$
$$\left. + \frac{\rho'_4(y, z)}{\sqrt{(y - x_0)^2 + (h + y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \right] dydz. \qquad (3)$$

У роботі шляхом використання перетворення Фур'є, зведено інтегральний оператор по дискретній змінній до діагонального вигляду, що дало можливість перейти від системи чотирьох ІР (1), заданих на всій граничній поверхній S, до послідовності чотирьох незалежних, заданих на конгруентній складовій S_1. Це дозволило зменшити порядок розглядуваної моделі.

Проте очевидно, що S_1 також володіє абелевою групою симетрії четвертого порядку $\{\tau_k\}, k = \overline{1, 4}$, елементами якої є: $\tau_1 = e$, $\tau_2 = \tau_z$, $\tau_3 = \tau_y$ і $\tau_4 = \tau_z \cdot \tau_y$.

Нехай $S_1 = \bigcup_{j=1}^{4} S_{1j}$ – погоджене з групою $\{\tau_k\}, k = \overline{1, 4}$ розбиття S_1 на конгруентні складові. Тоді кожне із отриманих попередньо чотирьох незалежних ІР можна в свою чергу також звести до розв'язування послідовності чотирьох незалежних ІР, де інтегрування ведеться по складовій S_{11}.

Повторне врахування геометричної симетрії в конфігурації поверхонь електродів дозволило понизити порядки матричних рівнянь, які апроксимують інтегральні у 256 разів, що є в 16 разів більше попереднього. Це дає можливість уникнути нестійкості обчислень.

Очевидно, що S_{11} також володіє геометричною симетрією, тобто дана ітераційна процедура врахування симетрії на основі апарату теорії груп може бути продовжена з метою розширення класу СЕО, що допускають чисельний аналіз на основі МІР. Це дає можливість проводити розрахунок параметрів електростатичного поля створюваного сукупністю заряджених електродів складної конфігурації з високою точністю обчислень, що є важливим при проектуванні сучасних СЕО.

4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

У роботі розроблено програмне забезпечення, для розрахунку електростатичних полів класів СЕО з наявною геометричною симетрією поверхонь електродів на основі запропонованого методу редукції моделі. Проведено ряд чисельних експериментів для модельної СЕО конфігурація поверхонь електродів якої представлена на рис. 1. Граничні значення потенціалу вибиралися довільними, симетричні та антисиметричні – для перевірки достовірності отриманих результатів. При числовому розв'язуванні ІР використано найбільш економний метод колокації за умови кусково-постійної апроксимації шуканої густини розподілу зарядів. СЛАР розв'язано методом Гауса, який вима-

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-4

гає $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$, $n \to \infty$ арифметичних операцій, де n – розмірність СЛАР.

Для графічного зображення розподілу потенціалу електростатичного поля використано ЕП – поверхні, у всіх точках яких потенціал має одне і те ж значення [12]. Зазвичай у такий спосіб експериментально вивчаються потенціальні поля, а лінії напруженості будуються як ортогональні лінії до ЕП.

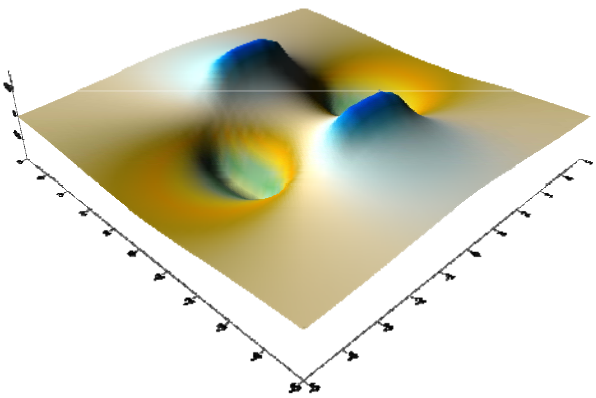
5 РЕЗУЛЬТАТИ

Для розглядуваної системи (див. рис. 1), якщо $h=1$, $l=1$ при варіації граничних значень потенціалу на електродах на рис. 2 подано розрахований згідно з (3) розподіл рівного потенціалу, при використанні кусково-постійної апроксимації густини інтегрального рівняння і кількості невідомих $n=500$. У результаті вдалось перейти до розв'язування послідовності шістнадцяти незалежних ІР.

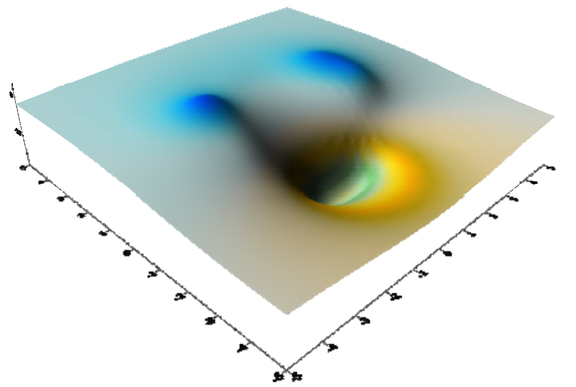
Похибка обчислень при проведених розрахунках становить 0,1%. Отримані результати відповідають фізиці досліджуваного явища.

6 ОБГОВОРЕННЯ

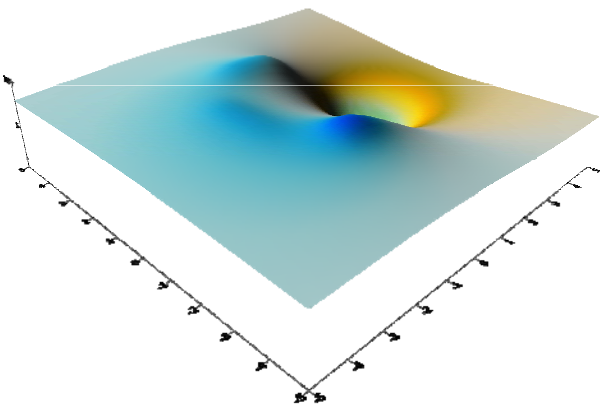
Розрахунок електростатичного поля з використанням запропонованого методу редукції моделі здійснено на прикладі однієї модельної задачі електростатики, гранична поверхня електродів якої володіє абелевою групою симетрії скінченного порядку. В основі чисельної процедури розв'язування ІР лежить метод колокації з кусково-постійною апроксимацією шуканої густини, апроксимації вищих порядків наведені у роботах [7, 9]. Запропонований алгоритм розрахунку електростатичного поля СЕО дозволив, наприклад, при тій же точності обчислень, перейти до розв'язування СЛАР порядку 500×500 замість – 8000×8000. У результаті суттєво спрощено обчислення. На відміну від існуючих методів це дозволило уникнути нестійкості при розв'язку складної тривимірної задачі. Отримані при цьому результати чисельних експериментів мають місце і для цілого класу СЕО, геометрична форма яких включає симетричні складові. При цьому граничні значення потенціалу можуть бути довільними, антисиметричні вибирались з метою отримання явно виражених в перерізі асимп-



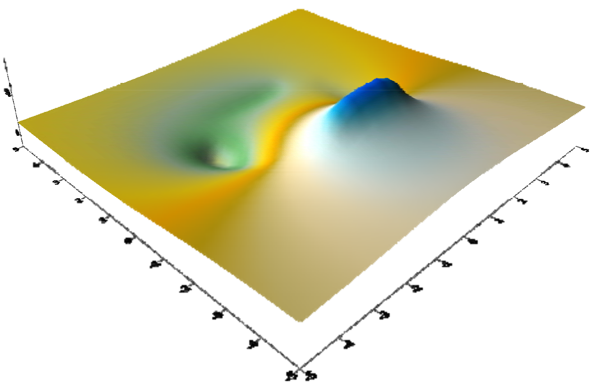
а



б



в



г

Рисунок 2 – ЕП:
а – випадок, що відповідає антисиметричним граничним значенням потенціалу на електродах: а – $f_1 = f_3 = 1$, $f_2 = f_4 = -1$; б – $f_1 = 1$, $f_2 = 10$, $f_3 = -100$, $f_4 = 20$; в – $f_1 = 10$, $f_2 = 10$, $f_3 = 10$, $f_4 = -1$; г – $f_1 = 1$, $f_2 = -1$, $f_3 = 100$, $f_4 = 10$

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-4

тот, на яких потенціал рівний нулю. Недоліком запропонованого методу є неможливість поширити його на випадок коли геометрична форма містить лише асиметричні складові.

Значення потенціалу отримані при розв'язуванні розглядуваної у роботі просторової задачі порівнювались з результатами отриманими при досліджені плоского наближення відповідної просторової конструкції [13]. Похибка при цьому склала 1%, що підтвердило попередньо встановлений у праці [13] закон зміни похибки і вказало на достовірність отриманих результатів розрахунків електростатичних полів відповідних систем.

ВИСНОВКИ

У роботі вперше розроблено метод редукції моделі для розрахунку електростатичних полів сучасних СЕО. Це дозволило суттєво понизити порядок досліджуваної модельної системи. Шляхом покрокового врахування наявної геометричної симетрії в конфігурації поверхонь електродів порядок зменшено в 4, 16, 64 рази, що дало можливість спростити весь обсяг обчислень. На відміну від традиційного використання МІР, отримано стійкість при розв'язуванні складної тривимірної задачі електростатики.

Вперше розроблено програмне забезпечення, у якому реалізовано процедури розрахунків електростатичних полів класів СЕО з наявною геометричною симетрією поверхонь електродів на основі запропонованого у роботі підходу, це дозволило отримати результати з високою точністю обчислень, що є важливим при проектуванні сучасних СЕО. Розширено клас систем, що допускають математичне моделювання потенціальних полів на основі методу ІР.

Отримала подальший розвиток методологія чисельного аналізу складних електростатичних полів із наявною геометричною симетрією поверхонь електродів.

ПОДЯКИ

Роботу підтримує науково-дослідний проект Національного університету «Львівська політехніка» кафедри обчислювальної математики та програмування «Обгрунтування та застосування обчислювальних методів для розв'язання класичних та прикладних задач» (номер держреєстрації 0117U001850; 2017–2021 рр.) та науковий напрямок «Аналіз великих даних» кафедри систем штучного інтелекту цього ж університету.

ЛІТЕРАТУРА / ЛИТЕРАТУРА

1. Мікроскопія в нанотехнологіях: монографія / [В. С. Антонюк, Г. С. Тимчик, О. В. Верцанова та ін.]. – К. : НТУУ «КПІ», 2014. – 260 с.
2. Okayawa S. A new type of quadrupole lens for electron-beam lithography. In: Nuclear instruments & methods in physics research / S. Okayawa. – North Holland : Elsevier Science Publishers B. V., 1990. – P. 488–495.
3. Глумова М. В. Чисельне моделювання фізичних процесів у вісесиметричних електронно-променевих приладах / М. В. Глумова // Автореферат на здобуття наукового ступеня канд. фіз.-мат. наук. – Харків, 2000. – 17 с.
4. Мочурад Л. І. Ефективний підхід до розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи / Л. І. Мочурад, П. Я. Пукач // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2017. – Вип. 3 (62), Т. 1. – С. 155–165.
5. Hawkes P. Principles of Electron Optics / P. Hawkes, E. Kasper, A. Kirkland. – Vol. 2: Applied Geometrical Optics 2nd Edition. – Academic Press, 2017.– 766 p.
6. Sybil' Yu. Three-dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface / Yu. Sybil' // Matematichni Studii. – 1997. – No. 8. – P. 79–96.
7. Мельник И. В. Использование метода интегральных уравнений для численного моделирования оптических свойств диодных систем высоковольтного тлеющего разряда с анодной плазмой / И. В. Мельник // Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. – 2001. – Т. 6. – С. 80–85.
8. Mochurad L. I. Flat variant of substantially spatial problem of electrostatics and some aspects of its solution, related to specifics of input information / L. I. Mochurad, B. A. Ostudin // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2011. – № 2 (105). – P. 98–110.
9. On the use of an integral approach for the numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation in a doubly conneted planar domain / [R. Chapko, B. Tomas Johansson, Yu. Savka] // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2014. – Vol. 22, Issue 1. – P. 130–149.
10. Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп / Ж.-П. Серр. – М. : РХД, 2003. – 132 с.
11. Бомба А. Я. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення для двозв'язних областей з вільними поверхнями / А. Я. Бомба, В. І. Гаврилюк, Д. О. Пригорницький // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільськ. нац. ун-т. – 2008. – Вип. 1. – С. 33–41.
12. Mochurad L.I. Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis / L. I. Mochurad, Y. S. Harasym, B. A. Ostudin // International Journal of Computing. – 2009. – Vol. 8, № 2. – P. 149–156.

Received 16.12.2018.
Accepted 27.12.2018.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-4

УДК 519.6

МЕТОД РЕДУКЦИИ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКИ

Мочурад Л. И. – ассистент кафедры систем искусственного интеллекта Национального университета «Львовская политехника», Украина.

АННОТАЦИЯ

Актуальность. Бурное развитие нанотехнологий выдвигает новые требования к системам электронной оптики. В современных электронно-оптических системах замечена значительное количество электродов сложной конфигурации с имеющейся геометрической симметрией. При расчете электростатических полей соответствующих систем требующих высокой точности вычислений. Это можно обеспечить путем разработки новых и совершенствования существующих алгоритмов расчета потенциальных полей.

Цель. Целью данной работы является разработка метода редукции модели для расчета электростатических полей современных систем электронной оптики.

Метод. Для подтверждения действенности предложенного в работе метода рассмотрено нахождения параметров электростатического поля конкретной модельной системы. Показано, что конфигурация поверхностей электродов обладает абелевой циклической группой симметрии четвертого порядка. Найдено матрицу преобразования Фурье для данной группы. Удалось, исполь-стовуючы метод редукции модели, на основе аппарата теории групп перейти от системы четырех интегральных уравнений к последовательности четырех независимых интегральных уравнений, где интегрирование ведется по ¼ совокупной предельной поверхности. Максимальное (повторное) учета имеющейся симметрии предельной поверхности при математическом моделировании электростатического поля позволяет, в свою очередь, существенно снизить порядок модели – перейти к интегрированию, например, по 1/16, 1/64 предельной поверхности.

Результаты. В работе, не уменьшая общности, на примере конкретной модельной системы осуществлен расчет параметрив электростатического поля. Для наглядного представления которого использовано поверхности равного потенциала. Результаты численного моделирования приведены при различной вариации известных значений потенциала на предельных поверхностях электродов. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании современных систем электронной оптики.

Выводы. Разработан метод редукции модели для расчета электростатических полей электронно-оптических систем, основанный на граничных интегральных уравнениях теории потенциала в сочетании с аппаратом теории групп, в отличие от существующих методов позволяет значительно упростить громоздкость процедуры численного анализа параметров электростатического поля максимально учитывая имеющуюся симметрию в геометрии предельных поверхностей, избежать числовой неустойчивости вычислений и получить высокую точность расчетов. Расширен класс систем электронной оптики, допускающих математическое моделирование на основе метода интегральных уравнений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: модельная система, метод интегральных уравнений, абелева группа симметрии, циркулянтная матрица, преобразование Фурье, эквипотенциальные поверхности.

UDC 519.6

METHOD OF REDUCTION MODEL FOR CALCULATION OF ELECTROSTATIC FIELDS OF ELECTRONIC OPTICS SYSTEMS

Mochurad L. I. – Assistant of the Department of Artificial Intelligence Systems of the Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine.

ABSTRACT

Context. The rapid development of nanotechnology puts forward new requirements for electronic optics systems. In modern electron-optical systems, a significant amount of complex electrodes with a geometric symmetry is observed. When calculating the electrostatic fields of the corresponding systems require high accuracy of calculations. This can be achieved by developing new and improving existing algorithms for calculating potential fields.

Objective. The goal of the work is to develop the method for reducing the model for calculating the electrostatic fields of modern systems of electronic optics.

Method. In order to confirm the efficiency of the proposed method, the finding of the parameters of the electrostatic field of a particular model system is considered. It is shown that the configuration of surfaces of electrodes has an Abelian cyclic group of symmetry of the fourth order. Fourier transform matrix for this group is found. It was succeeded, using the method of reduction of the model, to base the apparatus of group theory on the basis of the system of four integral equations to a sequence of four independent integral equations, where integration is carried out on ¼ of the aggregate boundary surface. The maximum (repeated) consideration of the existing symmetry of the boundary surface in the mathematical modeling of the electrostatic field allows, in turn, to significantly reduce the order of the model – to go to the integration, for example, 1/16, 1/64 of the boundary surface.

Results. In work, without decreasing the universality, on the example of a particular model system, the calculation of parameters of the electrostatic field was carried out. For the visual representation of which surfaces of equal potential are used. The results of numerical simulation are given at a different variation of the known potential values on the boundary surfaces of the electrodes. The obtained results can be used for the design of modern electronic optics systems.

Conclusions. The method of reduction of the model for calculating the electrostatic fields of electron-optical systems is based on the boundary integral equations of the theory of potentials in combination with the apparatus of group theory, which, unlike existing methods, allows to simplify the procedure of numerical analysis of electrostatic field parameters maximally taking into account the

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-4

available symmetry in geometry boundary surfaces, avoid numerical instability of calculations and get higher accuracy of calculations. The class of electronic optics systems that allow mathematical modeling based on the method of integral equations is expanded.

KEYWORDS: model system, method of integral equations, abelian group of symmetry, circular matrix, Fourier transform, equipotential surface.

REFERENCES

1. Antonyuk V. C., Timchik G. C., Vertsanov O. V. and others Microscopy in nanotechnology, monograph. Kiev, NTUU «KPI», 2014 – 260 p.
2. Okayawa S. A new type of quadrupole lens for electron-beam lithography. In: Nuclear instruments & methods in physics research. North Holland, Elsevier Science Publishers B. V., 1990, pp. 488–495.
3. Glumova M. V. Numerical simulation of physical processes in axial-symmetric electron-beam devices, *Abstract for obtaining a scientific degree of the candidate phys.-mat. sciences.* Kharkiv, 2000, 17 p.
4. Mochurad L. I., Pukach P. Ya. An Effective Approach to Calculation of the Electrostatic Field of a Quadrupole Lens, *Visn. of the Kherson National Technical University,* 2017, V. 3 (62), Vol. 1, pp. 155–165.
5. Hawkes P., Kasper E., Kirkland A. Principles of Electron Optics, Vol. 2: Applied Geometrical Optics 2nd Edition. Academic Press, 2017, 766 p.
6. Sybil' Yu. Three-dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface, *Matematichni Studii*, 1997, No. 8, pp. 79–96.
7. Melnik I. V. Using the method of integral equations for numerical modeling of the optical properties of diode systems of a high-voltage glow discharge with an anode plasma, *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine,* 2001, Vol. 6, pp. 80–85.
8. Mochurad L. I., Ostudin B. A. Flat variant of substantially spatial problem of electrostatics and some aspects of its solution, related to specifics of input information, *Journal of Numerical and Applied Math*ematics, 2011, No. 2(105), pp. 98–110.
9. Chapko R., Tomas Johansson B., Savka Yu. On the use of an integral approach for the numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation in a doubly conneted planar domain, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2014, Vol. 22, Issue 1, pp. 130–149.
10. Serre J.-P. Linear representations of finite groups. Moscow, RHD, 2003, 132 p.
11. Bomba A. Ya., Gavrilyuk V. I. , Pogornitsky D. O. Numerical solution of inverse nonlinear boundary value problems on quasi-conformal mappings for bipartite regions with free surfaces, *Mathematical and computer modeling. Ser.: Physics and Mathematics*. Kamyanets-Podilsky, 2008, Vol. 1, pp. 33–41.
12. Mochurad L. I., Harasym Y. S., Ostudin B. A. Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis, *International Journal of Computing,* 2009, Vol. 8, No. 2, pp. 149–156.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-4