УДК 519.62

МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ ФУНКЦІЇ ГРІНА

Сидоров М. В. – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна.

АНОТАЦІЯ

Актуальність. Розглянуто питання побудови двобічного ітераційного процесу знаходження додатного розв'язку першої крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку на основі використання метода функцій Гріна. Об'єктом дослідження є перша крайова задача для нелінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку. Мета роботи – користуючись методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах розробити метод двобічних наближень розв'язання поставленої задачі.

Метод. За допомогою функції Гріна вихідна нелінійна крайова задача для звичайного диференціального рівняння замінюється еквівалентним інтегральним рівнянням Гаммерштейна, що розглядається у просторі неперервних функцій, який напівупорядковано за допомогою конуса невід'ємних функцій. Інтегральне рівняння подається у вигляді нелінійного операторного рівняння з гетеротонним оператором. Для нього знаходиться сильно інваріантний конусний відрізок, кінці якого є початковими наближеннями для двох ітераційних послідовностей, перша з яких, монотонно зростаючи, наближає точний розв'язок задачі знизу, а друга, монотонно спадаючи, – зверху. Наведено дві умови існування єдиного додатного розв'язку розглядуваної крайової задачі та двобічної збіжності до нього послідовних наближень. Також наведено загальні рекомендації з побудови сильно інваріантного конусного відрізка. Розроблений метод має просту обчислювальну реалізацію і зручну для використання на практиці апостеріорну оцінку похибки.

Результати. Розроблений метод програмно реалізовано та досліджено при розв'язанні тестових задач. Результати обчислювального експерименту проілюстровано графічною та табличною інформаціями.

Висновки. Проведені експерименти підтвердили працездатність та ефективність розробленого метода і дозволяють рекомендувати його для використання на практиці при розв'язання задач математичного моделювання нелінійних процесів. Перспективи подальших досліджень можуть полягати у розробленні двобічних методів розв'язання задач для рівнянь з частинними похідними та нестаціонарних задач, використовуючи напівдискретні методи (наприклад, метод прямих Роте).

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійна крайова задача для звичайного диференціального рівняння, додатний розв'язок, сильно інваріантний конусний відрізок, гетеротонний оператор, двобічні наближення, функція Гріна.

НОМЕНКЛАТУРА

$C[-1,1]$ – банахів простір неперервних на відрізку $[-1,1]$ функцій;

$G(x,s)$ – функція Гріна крайової задачі;

$\mathcal{K}_+$ – конус невід'ємних функцій у $C[-1,1]$;

$K(u_0)$ – множина функцій з $\mathcal{K}_+$ таких, що $\alpha u_0 \leqslant u \leqslant \beta u_0$, де $\alpha, \beta > 0$;

T – гетеротонний оператор;

$\hat{T}$ – оператор, супровідний для гетеротонного оператора T;

u^* – точний розв'язок крайової задачі;

$\|u\| = \max\limits_{x \in [-1,1]} |u(x)|$ – норма у просторі $C[-1,1]$;

$u_0(x) = \int\limits_{-1}^{1} G(x,s)ds$;

$< v^0, w^0 >$ – сильно інваріантний для гетеротонного оператора T конусний відрізок;

$\{v^{(k)}\}$ – послідовність нижніх наближень;

v^* – границя послідовності нижніх наближень;

$\{w^{(k)}\}$ – послідовність верхніх наближень;

w^* – границя послідовності верхніх наближень;

$\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ – гамма-функція;

$\kappa > 0$ – параметр в одновимірному операторі Гельмгольця $u'' - \kappa^2 u$;

θ – нульовий елемент банахового простора;

$\leqslant$ – знак напівупорядкованості у $C[-1,1]$, що вводиться конусом $\mathcal{K}_+$.

ВСТУП

На сьогодні у науці спостерігається підвищений інтерес до процесів, що протікають у нелінійних середовищах. Лінійні математичні моделі таких процесів завжди є лише певними наближеннями, а тому все більше уваги приділяється саме нелінійним математичним моделям і стає актуальною проблема розробки нових та вдосконалення існуючих методів їх чисельного аналізу.

Об'єктом дослідження є перша крайова задача для нелінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6

Задачі для таких нелінійних диференціальних рівнянь часто виникають при математичному моделюванні об'єктів та систем різної природи, зокрема стаціонарних процесів, що розглядаються у хімічній кінетиці, біології, теорії горіння тощо [1–4].

Предметом дослідження є метод двобічних наближень розв'язання нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Відомі різні методи чисельного аналізу нелінійних крайових задач, зокрема, методи скінченних різниць, скінченних елементів [1, 5] або послідовних наближень з двобічним характером збіжності [7–10]. При застосування методу двобічних наближень будується дві послідовності функцій, які з обох боків (зверху і знизу) збігаються до точного розв'язку задачі, що дозволяє на кожній ітерації мати апостеріорну оцінку похибки, а отже, і практично зручний критерій закінчення ітерацій. Тому, на нашу думку, саме остання група методів є найбільш привабливою з точки зору обчислювальної математики.

Метою роботи є розробка на основі використання функції Гріна методу двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь і дослідження його роботи при розв'язанні тестових задач.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У роботі розглядаються дві нелінійні крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь:

$$-u'' = f(x,u)\,,\ x\in(-1,1)\,, \tag{1}$$

$$u(x)>0\,,\ x\in(-1,1)\,, \tag{2}$$

$$u(-1)=0\,,\ u(1)=0\,, \tag{3}$$

та

$$-u''+\kappa^2 u = f(x,u)\,,\ x\in(-1,1)\,, \tag{4}$$

$$u(x)>0\,,\ x\in(-1,1)\,, \tag{5}$$

$$u(-1)=0\,,\ u(1)=0\,, \tag{6}$$

де $f(x,u)$ – неперервна і додатна при $x\in(-1,1)$, $u>0$ функція.

Оператор u'' є одновимірним випадком оператора Лапласа, а оператор $u''-\kappa^2 u$ є одновимірним випадком оператора Гельмгольця. Рівняння вигляду (1), (2) часто зустрічаються в механіці, теорії горіння та теорії масоперенесення з хімічними реакціями, коли розглядувані нелінійні стаціонарні процеси, можуть бути описані функціями однієї незалежної змінної [11].

2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Історично першим методом з двобічним характером збіжності до шуканого розв'язку був метод, запропонований у 1919 р. С. О. Чаплигіним [12]. Цей метод базується на теоремі про диференціальні нерівності і дозволяє бувати послідовності нижніх та верхніх розв'язків до розв'язку задачі Коші для нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь. Подальший розвиток двобічних ітераційних методів пов'язано з використання теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [13].

Ця теорія була розроблена і застосована до з'ясування питань існування і єдиності додатного розв'язку операторних рівнянь з ізотонними і гетеротонними операторами у роботах [7, 8, 14]. Доведення теорем існування та єдиності базувалося на побудові ітераційних послідовностей, які б двобічно збігалися до нерухомої точки оператора, але автори розглядали ці ітераційні процеси як допоміжний засіб при доведенні теорем і обчислювальні застування не було розвинуто. Деякі узагальнення теорії гетеротонних операторів та їх застосування до знаходження наближених розв'язків крайових задач з вільною межею для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь було зроблено у [15]. У [10, 16] розглядаються рівняння і нерівності, у яких оператори не мають властивості монотонності, і для них будуються двобічні монотонні ітераційні процеси.

Перша крайова задача для рівняння (1) на відрізку $[0,1]$ розглядалася у [7, 8] і слугувала для ілюстрації розробленої у цих роботах теорії. Рівняння (1) на відрізку $[0,1]$ також розглядалося у роботах [17, 18], де було отримано умови існування єдиного додатного розв'язку для випадку, коли права частина рівняння не визначена при $u=0$, і розглянуто деякі приклади застосування отриманих результатів до дослідження розв'язності рівнянь зі степеневими нелінійностями. Рівняння (1) на $[0,1]$ з $f(x,u)=\lambda(u^p+u^{-q})$ у [19] було досліджено на розв'язність, з'ясовано, зокрема, що існує єдиний додатний розв'язок першої крайової задачі при $p,q<1$ і наведено результати побудови двобічних наближень при $\mu=1$, $p=\dfrac{1}{2}$, $q=\dfrac{1}{5}$. Але у цій роботі немає дослідження проблеми побудови початкового наближення. Крайові задачі для рівняння (4) не розглядалися.

Робота продовжує дослідження, розпочаті у [20] і спрямована на їх узагальнення та розповсюдження на рівняння вигляду (4).

3 МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

Для дослідження розв'язності кожної з задач (1)–(3) та (4)–(6) і чисельного знаходження їх розв'язку побудуємо метод двобічних наближень, використовуючи методи теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [7, 8, 14].

Кожна з задач (1)–(3), (4)–(6) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна (7)

$$u(x)=\int_{-1}^{1}G(x,s)\,f(s,u(s))ds\,, \tag{7}$$

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6

де для задачі (1)–(3) функція Гріна $G(x,s)$ має вигляд

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{(1+x)(1-s)}{2}, & -1\le x\le s,\\ \dfrac{(1+s)(1-x)}{2}, & s\le x\le 1,\end{cases} \tag{8}$$

а для задачі (4)–(6)

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}\kappa(1+x)\operatorname{sh}\kappa(1-s)}{\kappa\operatorname{sh}2\kappa}, & -1\le x\le s,\\ \dfrac{\operatorname{sh}\kappa(1+s)\operatorname{sh}\kappa(1-x)}{\kappa\operatorname{sh}2\kappa}, & s\le x\le 1.\end{cases} \tag{9}$$

Позначимо $u_0(x)$ розв'язок задачі (1)–(3) чи (4)–(6) для випадку, коли $f(x,u)\equiv 1$, тобто

$$u_0(x)=\int_{-1}^{1}G(x,s)ds.$$

Для задачі (1)–(3) маємо

$$u_0(x)=\frac{1}{2}(1-x^2), \tag{10}$$

а для задачі (4)–(6)

$$u_0(x)=\frac{2}{\kappa^2\operatorname{ch}\kappa}\operatorname{sh}\frac{\kappa(1+x)}{2}\operatorname{sh}\frac{\kappa(1-x)}{2}. \tag{11}$$

Рівняння (7) розглядатимемо у банаховому просторі $C[-1,1]$ функцій, неперервних на відрізку $[-1,1]$. Норма у $C[-1,1]$ вводиться за правилом $\|u\|=\max\limits_{x\in[-1,1]}|u(x)|$. Виділимо у $C[-1,1]$ конус $\mathcal{K}_+=\{u\in C[-1,1]:u(x)\ge 0,\ x\in[-1,1]\}$ невід'ємних функцій. За допомогою конуса $\mathcal{K}_+$ у просторі $C[-1,1]$ введемо напівупорядкованість за правилом:

для $u,v\in C[-1,1]$ $u\leqslant v$, якщо $v-u\in\mathcal{K}_+$,

тобто

$u\leqslant v$, якщо $u(x)\le v(x)$ для всіх $x\in[-1,1]$.

Якщо існує класичний розв'язок задачі (1)–(3) чи (4)–(6), тобто така функція $u^*\in C^2(-1,1)\cap C[-1,1]$, яка задовольняє рівняння (1) чи (4) і умови (2), (3) чи (5), (6) відповідно, то ця функція також задовольняє і інтегральне рівняння (7). Якщо ж класичний розв'язок відсутній, то рівняння (7) можна покласти в основу означення узагальненого розв'язку задачі (1)–(3) чи (4)–(6).

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6

Означення. Розв'язком (узагальненим) крайової задачі (1)–(3) чи (4)–(6) називатимемо функцію $u^*\in\mathcal{K}_+$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (7).

З рівнянням (7) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор T, що діє у $C[-1,1]$ за правилом

$$T(u)(x)=\int_{-1}^{1}G(x,s)f(s,u(s))ds. \tag{12}$$

Кожна з функцій Гріна (8), (9) є неперервною.

Оператор T вигляду (12) є додатним, тобто залишає інваріантним конус $\mathcal{K}_+$: $T(\mathcal{K}_+)\subset\mathcal{K}_+$. Дійсно, кожна з функцій Гріна (8), (9) неперервна і невід'ємна у квадраті $-1\le x,s\le 1$. Тоді для будь-якої $u\in C[-1,1]$ підінтегральна функція у (12) неперервна і невід'ємна при $-1\le x,s\le 1$, а отже, функція $T(u)(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[-1,1]$, тобто з $u\in\mathcal{K}_+$ випливає, що $T(u)\in\mathcal{K}_+$.

Оператор T вигляду (12) також є u_0-додатним, де функція $u_0(x)$ для задач (1)–(3) і (4)–(6) визначається відповідно рівностями (10) і (11). Позначимо через $K(u_0)$ множину функцій з $\mathcal{K}_+$ таких, що $\alpha u_0\leqslant u\leqslant\beta u_0$, де $\alpha,\beta>0$. Тоді u_0-додатність оператора T означає, що $T(u)\in K(u_0)$ для всіх $u\in\mathcal{K}_+\setminus\{\theta\}$.

Ця властивість випливає з оцінки вигляду

$$\varphi(s)u_0(x)\le G(x,s)\le\psi(s)u_0(x),\ -1\le x,s\le 1,$$

де $\varphi(s)$, $\psi(s)$ – невід'ємні неперервні на $[-1,1]$ функції, відмінні від тотожного нуля.

Для функції Гріна вигляду (8) ці функції дорівнюють

$$\varphi(s)=\frac{1}{2}\min\{s+1,1-s\},\ \psi(s)=1,$$

а для функції Гріна вигляду (9) матимемо

$$\varphi(s)=\frac{\kappa}{2\operatorname{sh}^2\kappa}\min\{\operatorname{sh}\kappa(s+1),\operatorname{sh}\kappa(1-s)\},$$

$$\psi(s)=\frac{\kappa\operatorname{ch}\dfrac{\kappa(s+1)}{2}\operatorname{ch}\dfrac{\kappa(1-s)}{2}}{\operatorname{sh}\kappa}.$$

Тоді для довільної $u\in\mathcal{K}_+\setminus\{\theta\}$ отримаємо, що

$$\alpha u_0(x)\le\int_{-1}^{1}G(x,s)f(s,u(s))ds\le\beta u_0(x),$$

де

$$\alpha=\int_{-1}^{1}\varphi(s)f(s,u(s))ds>0,$$

$$\beta = \int_{-1}^{1} \psi(s) f(s,u(s))ds > 0 .$$

Отже, $T(u) \in K(u_0)$, що і означає u_0-додатність оператора T вигляду (12).

Ефективне дослідження рівняння (7) (а отже, і задач (1)–(3), (4)–(6)) і побудова двобічних наближень до їх додатних розв'язків стає можливим, якщо функція $f(x,u)$ має властивість монотонності.

Припустимо, що функція $f(x,u)$ дозволяє діагональне подання $f(x,u) = \hat{f}(x,u,u)$, де неперервна за сукупністю змінних x, v, w невід'ємна функція $\hat{f}(x,v,w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $x \in (-1, 1)$. Тоді оператор T вигляду (12) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v,w)(x) = \int_{-1}^{1} G(x,s)\hat{f}(s,v(s),w(s))ds . \qquad (13)$$

Оператори T і $\hat{T}$ є цілком неперервними.

Якщо функція $f(x,u)$ монотонно зростає за u для всіх $x \in (-1, 1)$, то можна обрати $\hat{f}(x,v,w) = f(x,v)$, а для монотонно спадної за u для всіх $x \in (-1, 1)$ функції $f(x,u)$ можна покласти $\hat{f}(x,v,w) = f(x,w)$.

У конусі $\mathcal{K}_+$ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $< v^0, w^0 >$ умовами $\hat{T}(v^0,w^0) \geqslant v^0$, $\hat{T}(w^0,v^0) \leqslant w^0$, які для оператора $\hat{T}$, що визначається рівністю (13), набувають вигляду: для всіх $x \in [-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} G(x,s)\hat{f}(s,v^0(s),w^0(s))ds \ge v^0(x) , \qquad (14)$$

$$\int_{-1}^{1} G(x,s)\hat{f}(s,w^0(s),v^0(s))ds \le w^0(x) . \qquad (15)$$

Сформуємо ітераційний процес за схемою $v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)},w^{(k)})$, $w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)},v^{(k)})$, яка у розглядуваному випадку набуває вигляду:

$$v^{(k+1)}(x) = \int_{-1}^{1} G(x,s)\hat{f}(s,v^{(k)}(s),w^{(k)}(s))ds , \qquad (16)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_{-1}^{1} G(x,s)\hat{f}(s,w^{(k)}(s),v^{(k)}(s))ds , \qquad (17)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$v^{(0)}(x) = v^0(x) , \; w^{(0)}(x) = w^0(x) . \qquad (18)$$

З огляду на сильну інваріантність конусного відрізка $< v^0, w^0 >$ та гетеротонність оператора T, для якого оператор $\hat{T}$ є супровідним, можна зробити висновок про те, що послідовність $\{v^{(k)}(x)\}$ не спадає за конусом $\mathcal{K}_+$, а послідовність $\{w^{(k)}(x)\}$ не зростає за конусом $\mathcal{K}_+$. Оскільки конус $\mathcal{K}_+$ у $C[-1, 1]$ є нормальним (і навіть гострим), а оператор $\hat{T}$ є цілком неперервним, то існують границі $v^*(x)$ і $w^*(x)$ цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant v^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant v^* \leqslant$$
$$\leqslant w^* \leqslant \ldots \leqslant w^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0 .$$

Тут можливі два випадки: $v^* < w^*$ і $v^* = w^*$. У другому випадку $u^* := v^* = w^*$ – єдина на конусному відрізку $< v^0, w^0 >$ нерухома точка оператора T, а отже, u^* – єдиний на $< v^0, w^0 >$ додатний розв'язок крайової задачі (1)–(3) чи (4)–(6).

Функції $v^*(x)$ і $w^*(x)$ є розв'язком системи рівнянь $v = \hat{T}(v,w)$, $w = \hat{T}(w,v)$, яка для наших задач має вигляд:

$$v(x) = \int_{-1}^{1} G(x,s)\hat{f}(s,v(s),w(s))ds , \qquad (19)$$

$$w(x) = \int_{-1}^{1} G(x,s)\hat{f}(s,w(s),v(s))ds . \qquad (20)$$

Умовою того, що $v^* = w^*$, є вимога, щоб система (19), (20) не мала на $< v^0, w^0 >$ таких розв'язків, що $v \neq w$.

Отже, справджується така теорема.

Теорема 1. Нехай $< v^0, w^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (12) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (13) і система рівнянь (19), (20) не має на $< v^0, w^0 >$ розв'язків таких, що $v \neq w$. Тоді ітераційний процес (16)–(18) збігається у нормі простору $C[-1, 1]$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (1)–(3) чи (4)–(6), причому має місце ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant v^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant u^* \leqslant$$
$$\leqslant \ldots \leqslant w^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0 . \qquad (21)$$

Ланцюг нерівностей (21) як раз і характеризує ітераційний процес (16)–(18) як двобічний.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6

Умова, щоб система (19), (20) не мала на $< v^0, w^0 >$ таких розв'язків, що $v \neq w$, незважаючи на простоту формулювання, є не дуже простою може для перевірки на практиці.

Умовою, яка забезпечує те, що система рівнянь (19), (20) не має на сильно інваріантному конусному відрізку $< v^0, w^0 >$ розв'язків таких, що $v \neq w$, є умова u_0-псевдоувігнутості гетеротонного оператора T вигляду (12) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (13) [8]. Додатний гетеротонний оператор T називається u_0-псевдоувігнутим, якщо $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$ для будь-яких $v,\, w \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ і для будь-яких $v,\, w \in K(u_0)$ і $\tau \in (0, 1)$ знайдеться таке $\eta = \eta(v, w, \tau) > 0$, що

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geqslant \tau(1+\eta)\hat{T}(v, w).$$

Виконання цієї нерівності забезпечить наступна умова на функцію $\hat{f}(x, w, v)$: для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(x, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}(x, v, w),\ x \in (-1, 1). \tag{22}$$

Тоді приходимо до такого результату.

Теорема 2. Нехай $< v^0, w^0 > \subset K(u_0)$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (12) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (13) і має місце умова (22). Тоді ітераційний процес (16)–(18) двобічно збігається у нормі простору $C[-1, 1]$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (1)–(3) чи (4)–(6).

За наближений розв'язок крайової задачі (1)–(3) чи (4)–(6) на k-й ітерації приймаємо функцію

$$u^{(k)}(x) = \frac{w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x)}{2}. \tag{23}$$

З огляду на нерівності (21) дістанемо, що на кожній k-й ітерації ми маємо апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку (23):

$$\left\| u^* - u^{(k)} \right\| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [-1, 1]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)). \tag{24}$$

Отже, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{x \in [-1, 1]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon \tag{25}$$

і з точністю ε можна вважати, що

$$u^*(x) \approx u^{(k)}(x).$$

Сильно інваріантний конусний відрізок $< v^0, w^0 >$ можна розглядати як апріорну оцінку невідомого точного розв'язку u^*, але його побудова при практичній реалізації двобічних ітераційних методів є певною проблемою. Дамо загальні рекомендації з її вирішення.

Оскільки $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$ для будь-яких $v,\, w \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$, то кінці сильно інваріантного конусного відрізка $< v^0, w^0 >$ можна шукати у вигляді $v^0(x) = \alpha u_0(x)$, $w^0(x) = \beta u_0(x)$, де $0 < \alpha < \beta$. Тоді нерівності (14), (15) набувають вигляду: для всіх $x \in [-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} G(x, s) \hat{f}(s, \alpha u_0(s), \beta u_0(s)) ds \geq \alpha u_0(x), \tag{26}$$

$$\int_{-1}^{1} G(x, s) \hat{f}(s, \beta u_0(s), \alpha u_0(s)) ds \leq \beta u_0(x). \tag{27}$$

Оскільки $G(-1, s) = G(1, s) = 0$ і $u_0(-1) = u_0(1) = 0$, то ці нерівності в точках $x = -1$, $x = 1$ виконуються як рівності. Крім того, точки $x = -1$, $x = 1$ є простими нулями для функцій $G(x, s)$ і $u_0(x)$, а отже, для кожного $s \in [-1, 1]$ існують скінченні додатні границі $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{G(x, s)}{u_0(x)}$, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{G(x, s)}{u_0(x)}$. Тоді функція $\dfrac{G(x, s)}{u_0(x)}$, довизначена при $x = -1$, $x = 1$ за неперервністю, буде неперервною у квадраті $-1 \leq x, s \leq 1$, а функції

$$h_1(x; \alpha, \beta) = \int_{-1}^{1} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} \hat{f}(s, \alpha u_0(s), \beta u_0(s)) ds,$$

$$h_2(x; \alpha, \beta) = \int_{-1}^{1} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} \hat{f}(s, \beta u_0(s), \alpha u_0(s)) ds$$

будуть неперервними при $x \in [-1, 1]$. Звідси випливає, що нерівності (26), (27) можна записати у вигляді

$$\alpha \leq \min_{x \in [-1, 1]} h_1(x; \alpha, \beta),\ \beta \geq \max_{x \in [-1, 1]} h_2(x; \alpha, \beta). \tag{28}$$

Для більш швидкої збіжності ітерацій величина

$$\max_{x \in [-1, 1]} (w^0(x) - v^0(x)) = (\beta - \alpha) M,$$

де $M = \max\limits_{x \in [-1, 1]} u_0(x)$, має бути якомога меншою, тому при практичній реалізації ітераційного процесу (16)–(18) слід взяти найбільше α і найменше β, що задовольняють нерівності (28).

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6

4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Обчислювальний експеримент було проведено для задач (1)–(3), (4)–(6) для правої частини

$$f(x,u)=\lambda u^p+\mu u^{-q}, \tag{29}$$

де $p, q>0$, $\lambda, \mu>0$.

Для функції $f(x,u)$ вигляду (29) обираємо $\hat{f}(x,v,w)=\lambda v^p+\mu w^{-q}$ і відповідні оператори (12), (13) матимуть вигляд

$$T(u)(x)=\int_{-1}^{1} G(x,s)[\lambda u(s)^p+\mu u(s)^{-q}]ds,$$

$$\hat{T}(v,w)(x)=\int_{-1}^{1} G(x,s)[\lambda v(s)^p+\mu w(s)^{-q}]ds,$$

де функція Гріна $G(x,s)$ в залежності від типу задачі має вигляді (8) чи (9).

Умова псевдоувігнутості (22), записана для функції $f(x,u)$ вигляду (29), призводить до нерівності

$$\lambda\tau(\tau^{p-1}-1)v^p+\mu\tau(\tau^{q-1}-1)w^{-q}>0,$$

яка виконуватиметься для всіх $\tau\in(0,1)$, $v, w>0$, якщо $0<p<1$, $0<q<1$.

Кінці сильно інваріантного конусного відрізка $<v^0, w^0>$ шукатимемо у вигляді $v^0(x)=\alpha u_0(x)$, $w^0(x)=\beta u_0(x)$, де $0<\alpha<\beta$, а функція $u_0(x)$ в залежності від типу задачі має вигляді (10) або (11). Далі знаходимо

$$h_1(x;\alpha,\beta)=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{G(x,s)}{u_0(x)}\{\lambda[\alpha u_0(s)]^p+\mu[\beta u_0(s)]^{-q}\}ds=$$

$$=\lambda\alpha^p\Psi(x)+\frac{\mu}{\beta^q}\Theta(x),$$

$$h_2(x;\alpha,\beta)=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{G(x,s)}{u_0(x)}\{\lambda[\beta u_0(s)]^p+\mu[\alpha u_0(s)]^{-q}\,ds=$$

$$=\lambda\beta^p\Psi(x)+\frac{\mu}{\alpha^q}\Theta(x),$$

де

$$\Psi(x)=\int_{-1}^{1}\frac{G(x,s)}{u_0(x)}[u_0(s)]^p\,ds,$$

$$\Theta(x)=\int_{-1}^{1}\frac{G(x,s)}{u_0(x)}[u_0(s)]^{-q}\,ds.$$

Позначимо

$$m_1=\min_{x\in[-1,1]}\Psi(x)=\Psi(\pm1),$$

$$M_1=\max_{x\in[-1,1]}\Psi(x)=\Psi(0),$$

$$m_2=\min_{x\in[-1,1]}\Theta(x)=\Theta(0),$$

$$M_2=\max_{x\in[-1,1]}\Theta(x)=\Theta(\pm1).$$

Тоді нерівності (28) для знаходження α, β набувають вигляду

$$\alpha\le\lambda m_1\alpha^p+\mu m_2\beta^{-q},\quad \beta\ge\lambda M_1\beta^p+\mu M_2\alpha^{-q}. \tag{30}$$

Ітераційний процес (16)–(18) у розглядуваному випадку набуде вигляду

$$v^{(k+1)}(x)=\int_{-1}^{1}G(x,s)\left\{\lambda[v^{(k)}(s)]^p+\frac{\mu}{[w^{(k)}(s)]^q}\right\}ds, \tag{31}$$

$$w^{(k+1)}(x)=\int_{-1}^{1}G(x,s)\left\{\lambda[w^{(k)}(s)]^p+\frac{\mu}{[v^{(k)}(s)]^q}\right\}ds, \tag{32}$$

$$k=0,1,2,\ldots,$$

$$v^{(0)}(x)=\alpha u_0(x),\ w^{(0)}(x)=\beta u_0(x). \tag{33}$$

Отже, якщо $0<p<1$, $0<q<1$, то кожна з задач (1)–(3), (4)–(6), де функція $f(x,u)$ має вигляд (29), при будь-яких $\lambda, \mu>0$ має єдиний додатний розв’язок $u^*(x)$, до якого двобічно збігається ітераційний процес (31)–(33).

Для того, що побудувати наближений розв’язок задачі (1)–(3) чи (4)–(6) треба знайти α, β ($0<\alpha<\beta$) як розв’язок системи нерівностей (30) (найбільше значення α і найменше значення β будуть розв’язком відповідної системи) і взявши деяке $\varepsilon>0$ (точність обчислень) реалізувати ітераційний процес (31)–(33) до виконання нерівності (25). Наближений розв’язок задачі далі визначиться за формулою (23).

Чисельна реалізація процесу (31)–(33) була виконана в мові PYTHON. Для обчислювальних експериментів було обрано $\varepsilon=10^{-5}$, інтеграли у (31), (32) обчислювались з точністю 10^{-7} за адаптивною процедурою на основі квадратури Гаусса з попереднім кусково-лінійним інтерполюванням з тією ж точністю функцій $v^{(k)}(x)$, $w^{(k)}(x)$.

5 РЕЗУЛЬТАТИ

Результати розв’язання задач (1)–(3) і (4)–(6) для функції $f(x,u)$ вигляду (29) при $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{3}$ і $\lambda=\mu=1$ наведено в табл. 1–4 і на рис. 1–4.

Для задачі (1)–(3) знаходимо

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6

$$m_1 = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \; M_1 = \frac{3\pi - 4}{6\sqrt{2}},$$

$$m_2 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)} - \frac{3}{2}\right), \; M_2 = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt[3]{4}\,\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)},$$

де $\Gamma(z)$ – гамма-функція.

Розв'язок системи (30) для обраних значень параметрів наведено на рис. 1.

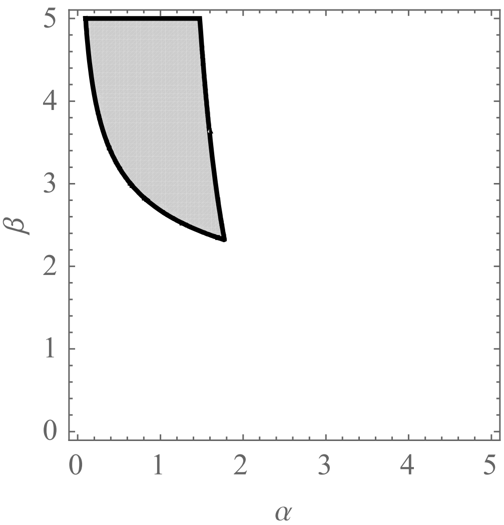

Рисунок 1 – Розв'язок системи (30) для задачі (1)–(3)

Як бачимо з рис. 1, найбільше значення α і найменше значення β відповідають розв'язку відповідної системи рівнянь. Отже, знаходимо

$$\alpha = 1{,}77442, \; \beta = 2{,}31997.$$

Для досягнення точності $\varepsilon = 10^{-5}$ зроблено 11 ітерацій. У табл. 1 наведено значення оцінки похибки

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2}\max_{x\in[-1,\,1]}(w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)),$$

де k – номер ітерації.

Таблиця 1 – Значення оцінки похибки ε_k для задачі (1)–(3)

k	0	1	2	3	4
ε_k	$0{,}14\cdot 10^{0}$	$0{,}55\cdot 10^{-1}$	$0{,}22\cdot 10^{-1}$	$0{,}91\cdot 10^{-2}$	$0{,}37\cdot 10^{-2}$
k	5	6	7	8	9
ε_k	$0{,}15\cdot 10^{-2}$	$0{,}61\cdot 10^{-3}$	$0{,}25\cdot 10^{-3}$	$0{,}10\cdot 10^{-3}$	$0{,}41\cdot 10^{-4}$
k	10	11			
ε_k	$0{,}17\cdot 10^{-4}$	$0{,}68\cdot 10^{-5}$			

На рис. 2 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ наближень (штрихована лінія), $k = 0, 1, ..., 11$.

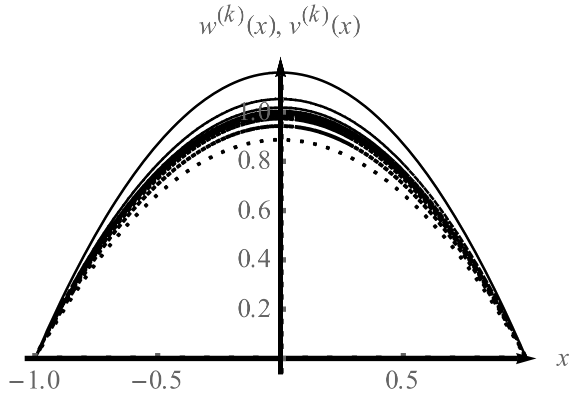

Рисунок 2 – Графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ та нижніх $v^{(k)}(x)$ наближень до розв'язку задачі (1)–(3)

У табл. 2 наведено значення наближеного розв'язку $u^{(11)}(x)$ задачі (1)–(3) на сітці, що складається з вузлів $x_i = -1 + 0{,}1i$, $i = 0, 1, ..., 20$.

Таблиця 2 – Значення наближеного розв'язку $u^{(11)}(x)$ задачі (1)–(3) на сітці з кроком 0,1

x_i	–1	–0,9	–0,8	–0,7	–0,6	–0,5
$u^{(11)}(x_i)$	0	0,19119	0,35981	0,50828	0,63706	0,74622
x_i	–0,4	–0,3	–0,2	–0,1	0	0,1
$u^{(11)}(x_i)$	0,83573	0,90547	0,95536	0,98533	0,99532	0,98533
x_i	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$u^{(11)}(x_i)$	0,95536	0,90547	0,83573	0,74622	0,63706	0,50828
x_i	0,8	0,9	1			
$u^{(11)}(x_i)$	0,35981	0,19119	0			

Кожна ітерація виконувалась в середньому за 145 с, загальний час роботи програми склав 25,6 хв.

Для задачі (4)–(6) при $\kappa = 1$ знаходимо

$$m_1 = 0{,}45314, \; M_1 = 0{,}54209,$$

$$m_2 = 1{,}52557, \; M_2 = 1{,}88901.$$

Розв'язок системи (30) для обраних значень параметрів наведено на рис. 3.

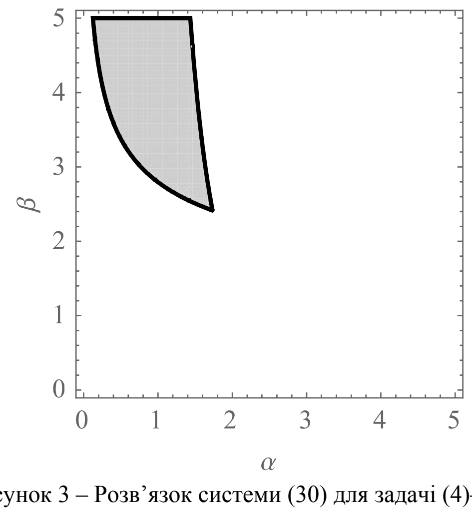

Рисунок 3 – Розв'язок системи (30) для задачі (4)–(6)

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6

Як бачимо з рис. 3, найбільше значення α і найменше значення β відповідають розв'язку відповідної системи рівнянь. Отже, обираємо

$$\alpha = 1,73378\,,\ \beta = 2,41482\,.$$

Для досягнення точності $\varepsilon = 10^{-5}$ зроблено 11 ітерацій. У табл. 3 наведено значення оцінки похибки

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2}\max_{x\in[-1,\,1]}(w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x))\,,$$

де k – номер ітерації.

Таблиця 3 – Значення оцінки похибки ε_k для задачі (4)–(6)

k	0	1	2	3	4
ε_k	$0,12\cdot10^{0}$	$0,46\cdot10^{-1}$	$0,18\cdot10^{-1}$	$0,72\cdot10^{-2}$	$0,28\cdot10^{-2}$
k	5	6	7	8	9
ε_k	$0,11\cdot10^{-2}$	$0,45\cdot10^{-3}$	$0,18\cdot10^{-3}$	$0,70\cdot10^{-4}$	$0,28\cdot10^{-4}$
k	10	11			
ε_k	$0,11\cdot10^{-4}$	$0,43\cdot10^{-5}$			

На рис. 4 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ наближень (штрихована лінія), $k = 0, 1, ..., 11$.

У табл. 4 наведено значення наближеного розв'язку $u^{(11)}(x)$ задачі (4)–(6) на сітці, що складається з вузлів $x_i = -1 + 0,1i$, $i = 0, 1, ..., 20$.

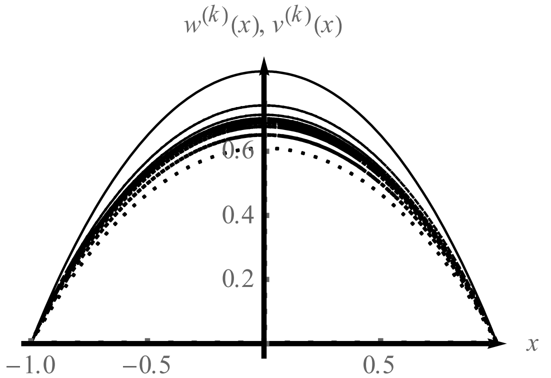

Рисунок 4 – Графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ та нижніх $v^{(k)}(x)$ наближень до розв'язку задачі (1)–(3)

Таблиця 4 – Значення наближеного розв'язку $u^{(11)}(x)$ задачі (4)–(6) при $\kappa = 1$ на сітці з кроком 0,1

x_i	–1	–0,9	–0,8	–0,7	–0,6	–0,5
$u^{(11)}(x_i)$	0	0,14516	0,26799	0,37268	0,46105	0,53427
x_i	–0,4	–0,3	–0,2	–0,1	0	0,1
$u^{(11)}(x_i)$	0,59319	0,63842	0,67041	0,68949	0,69583	0,68949
x_i	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$u^{(11)}(x_i)$	0,67041	0,63842	0,59319	0,53427	0,46105	0,37268
x_i	0,8	0,9	1			
$u^{(11)}(x_i)$	0,26799	0,14516	0			

Кожна ітерація виконувалась в середньому за 150 с, загальний час роботи програми склав 27,7 хв.

6 ОБГОВОРЕННЯ

Аналіз результатів показує, що метод двобічних наближень виявляється ефективним чисельним методом розв'язання крайових задач вигляду (1)–(3) і (4)–(6). Серед його переваг слід зазначити зручну апостеріорну оцінку похибки вигляду (24) і критерій закінчення ітерацій (25) та простий у реалізації алгоритм. Аналізуючи табл. 1 і 3 бачимо, що для тестової задачі у наближеному розв'язку встановлюється вірний знак після коми приблизно за дві-три ітерації.

Розглядаючи відношення $\dfrac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$, $k = 0, 1, ..., 10$, за даними табл. 1, отримаємо, що $\dfrac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \approx 0,407$, а за даними табл. 3, $\dfrac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \approx 0,396$, що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з відповідним показником. При цьому, переходячи до задачі (4)–(6), швидкість збіжності збільшилась.

Рис. 2 і 4 наочно демонструють двобічний характер збіжності побудованих ітераційних послідовностей $\{v^{(k)}(x)\}$ та $\{w^{(k)}(x)\}$ відповідно до ланцюга нерівностей (21): на кожній k-й ітерації невідомий точний розв'язок $u^*(x)$ задачі знаходиться вище наближення $v^{(k)}(x)$ і нижче наближення $w^{(k)}(x)$.

ВИСНОВКИ

В роботі розв'язана задача побудови двобічних наближень до додатного розв'язку першої крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку з одновимірними оператором Лапласа і оператором Гельмгольця.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у тому, що отримав подальший розвиток метод двобічних наближень розв'язання нелінійних операторних рівнянь з гетеротонним оператором у частині його застосування до крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, при цьому для рівнянь з оператором Гельмгольця цей метод застосовується вперше. Розроблений метод має низку переваг, таких як зручна апостеріорна оцінка похибки наближеного розв'язку та простий обчислювальний алгоритм. Це виділяє його серед інших чисельних методів розв'язання нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь і робить привабливим для застосування у інженерній практиці.

Практична значимість отриманих результатів полягає в тому, що запропонований метод добре показ себе при розв'язанні тестових задач, дозволяє швидку програмну реалізацію, що дозволить проводити багатоінваріантні обчислювальні експерименти при розв'язанні практичних задач математичного моделювання нелінійних процесів.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6

Обмеженість використання методу може бути пов'язана з умовами, накладеними на поведінку функції $f(x,u)$, що викладені у теоремах 1 і 2, а також з проблемою побудови сильно інваріантного конусного відрізка $< v^0, w^0 >$.

Перспективами подальших досліджень є розповсюдження розробленого у роботі методу двобічних наближень на крайові задачі для рівнянь еліптичного типу та на початково-крайові задачі для параболічних та гіперболічних рівнянь, використовуючи напівдискретні методи (наприклад, метод прямих Роте).

ПОДЯКИ

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки в межах наукових досліджень, що проводяться кафедрою.

ЛІТЕРАТУРА / ЛИТЕРАТУРА

1. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations / C. V. Pao. – New York : Plenum Press, 1992. – 794 p. DOI: 10.1007/978-1-4615-3034-3
2. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.
3. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей / А. Д. Мышкис. – 3-е изд., испр. – М. : КомКнига, 2007. – 192 с.
4. Франк-Каменецкий Д. А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике / Д. А. Франк-Каменецкий. – М. : Интеллект, 2008. – 408 с.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1989. – 616 с.
6. Chen G. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations / G. Chen, J. Zhou, W.-M. Ni // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. – 2000. – Vol. 10, № 7. – P. 1565–1612. DOI: 10.1142/S0218127400001006
7. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. – М. : Физматгиз, 1962. – 394 с.
8. Опойцев В. И. Нелинейные операторы в пространствах с конусом / В. И. Опойцев, Т. А. Хуродзе. – Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.
9. Колосов А. И. Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений / А. И. Колосов, С. В. Колосова, М. В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – № 2. – С. 50–57.
10. Двосторонні наближені методи / [Б. А. Шувар, М. І. Копач, С. М. Ментинський, А. Ф. Обшта]. – Івано-Франковськ : ВДВ ЦІТ, 2007. – 515 с.
11. Зайцев В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М. : Физматлит, 2001 – 576 с.
12. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений / С. А. Чаплыгин. – М. : Гостехиздат, 1950. – 102 с.
13. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств / Б. З. Вулих. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 260 с.
14. Amann H. Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces / H. Amann // SIAM Review. – 1976. – Vol. 18, № 4. – P. 620–709. DOI: 10.1137/1018114
15. Колосов А. И. Нелинейные краевые задачи со свободной границей для обыкновенных дифференциальных уравнений математической физики: дис. … доктора физ.-мат. наук : 01.01.03 / Колосов Анатолий Иванович. – Москва, 1991. – 267 с.
16. Курпель Н. С. Двусторонние операторные неравенства и их применение / Н. С. Курпель, Б. А. Шувар. – К. : Наук. думка, 1980. – 268 с.
17. Zhao Z. Uniqueness of positive solutions for singular nonlinear second-order boundary-value problems / Z. Zhao // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 1994. – Vol. 23, № 6. – P. 755–765. DOI: 10.1016/0362-546X(94)90217-8.
18. O'Regan D. Singular second order boundary value problems / D. O'Regan // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 1990. – Vol. 15, № 12. – P. 1097–1109. DOI: 10.1016/0362-546X(90)90046-J.
19. Rus M.-D. The method of monotone iterations for mixed monotone operators : Ph.D. Thesis Summary / M.-D. Rus. – Cluj-Napoca, 2010. – 45 p.
20. Вороненко М. Д. Конструктивне дослідження нелінійний крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь / М. Д. Вороненко, М. В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2018. – № 1 (80). – С. 48–54.

Received 26.09.2018.
Accepted 20.11.2018.

УДК 519.62

МЕТОД ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Сидоров М. В. – канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина.

АННОТАЦИЯ

Актуальность. Рассмотрены вопросы построения двустороннего итерационного процесса нахождения положительного решения первой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на основе использования метода функций Грина. Объектом исследования является первая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Цель работы – пользуясь методами теории нелинейных операторов у полуупорядоченных пространствах разработать метод двусторонних приближений решения поставленной задачи.

Метод. С помощью функции Грина исходная нелинейная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения заменяется эквивалентным интегральным уравнением, рассматриваемом в пространстве непрерывных функций, полуупорядоченном с помощью конуса неотрицательных функций. Интегральное уравнение представляется в виде нелинейного операторного уравнения с гетеротонным оператором. Для него находится сильно инвариантный конусный отрезок, концы которого служат начальными приближениями для двух итерационных последовательностей, первая из которых, монотонно возрастая, приближает точное решение задачи снизу, а вторая, монотонно убывая, – сверху. Приведены два условия существования единственного положительного решения рассматриваемой краевой задачи и двусторонней сходимости к нему последовательных приближений. Также приведены общие рекомендации по построению сильно инвариантного конусного отрезка. Разработанный метод имеет простую вычислительную реализацию и удобную для использования на практике апостериорную оценку погрешности.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6

Результаты. Разработанный метод программно реализован и исследован при решении тестовых задач. Результаты вычислительного эксперимента проиллюстрированы графической и табличной информациями.

Выводы. Проведенные эксперименты подтвердили работоспособность и эффективность разработанного метода и позволяют рекомендовать его для использования на практике при решении задач математического моделирования нелинейных процессов. Перспективы дальнейших исследований могут заключаться в разработке двусторонних методов решения задач для уравнений в частных производных и нестационарных задач, используя полудискретные методы (например, метод прямых Роте).

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: нелинейная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения, положительное решение, сильно инвариантный конусный отрезок, гетеротонный оператор, двусторонние приближения, функция Грина.

UDC 519.62

METHOD OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS OF THE SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BASED ON THE GREEN'S FUNCTION USE

Sidorov M. V. – PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics of Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, Ukraine.

ABSTRACT

Context. The questions of constructing a two-sided iterative process for finding a positive solution of the first boundary value problem for an ordinary second-order differential equation on the basis of the method of Green's functions are considered. The object of the study is the first boundary value problem for an ordinary second-order differential equation The purpose of the paper is to develop a method of two-sided approximations of the problem solution by using the methods of the nonlinear operators theory in semi-ordered spaces.

Method. With the Green's function help the original nonlinear boundary value problem for an ordinary differential equation is replaced by an equivalent integral equation, considered in the space of continuous functions, which is semi-ordered by means of the cone of nonnegative functions. The integral equation is represented as a nonlinear operator equation with a heterotone operator. For this equation a strongly invariant conic segment, the ends of which serve as initial approximations for two iterative sequences, is sought. The first of the sequences, monotonically increasing, approximates the exact solution of the problem from below, and the second one, monotonically decreasing, approximates it from above. Two conditions for the existence of a unique positive solution of the boundary value problem under consideration and two-sided convergence of successive approximations to it are given. General recommendations on the construction of a strongly invariant conic segment are also given. The developed method has a simple computational implementation and a posteriori error estimate, convenient for use in practice.

Results. The developed method was programmed and investigated in solving test problems. The results of the computational experiment are illustrated graphically and with the help of tables.

Conclusions. The conducted experiments have confirmed the efficiency and effectiveness of the developed method and allow to recommend it for use in practice for solving the problems of mathematical modeling of nonlinear processes. The prospects for further research may include the development of two-sided methods for solving problems for partial differential equations and non-stationary problems using semi-discrete methods (for example, the Rothe's method of lines).

KEYWORDS: nonlinear boundary value problem for an ordinary differential equation, positive solution, strongly invariant conical segment, heterotone operator, two-sided approximations, Green's function.

REFERENCES

1. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York, Plenum Press, 1992, 794 p. DOI: 10.1007/978-1-4615-3034-3
2. Samarskij A. A., Mihajlov A. P. Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery. 2-e izd., ispr. Moscow, Fizmatlit, 2001, 320 p.
3. Myshkis A. D. Jelementy teorii matematicheskih modelej. 3-e izd., ispr. Moscow, KomKniga, 2007, 192 p.
4. Frank-Kameneckij D. A. Osnovy makrokinetiki. Diffuzija i teploperedacha v himicheskoj kinetike. Moscow, Intellekt, 2008, 408 p.
5. Samarskij A. A. Teorija raznostnyh shem. 3-e izd., ispr. Moscow, Nauka, 1989, 616 p.
6. Chen G., Zhou J., Ni W.-M. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations, *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering,* 2000, Vol. 10, No. 7, pp. 1565–1612. DOI: 10.1142/S0218127400001006
7. Krasnosel'skij M. A. Polozhitel'nye reshenija operatornyh uravnenij. Moscow, Fiz-matgiz, 1962, 394 p.
8. Opojcev V. I., Hurodze T. A. Nelinejnye operatory v prostranstvah s konusom. Tbilisi, Izd-vo Tbilis. un-ta, 1984, 246 p.
9. Kolosov A. I., Kolosova S. V., Sidorov M. V. Konstruktivnoe issledovanie kraevyh zadach dlja nelinejnyh differencial'nyh uravnenij, *Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Serija: fiziko-matematichni nauki*, 2012, No. 2, pp. 50–57.
10. Shuvar B. A., Kopach M. I., Mentins'kij S. M., Obshta A. F Dvostoronni nablizheni metodi. Ivano-Frankovs'k, VDV CIT, 2007, 515 p.
11. Zajcev V. F., Poljanin A. D. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam. Moscow, Fizmatlit, 2001, 576 p.
12. Chaplygin S. A. Novyj metod priblizhennogo integrirovanija differencial'nyh uravnenij. Moscow, Gostehizdat, 1950, 102 p.
13. Vulih B. Z. Vvedenie v teoriju poluuporjadochennyh prostranstv. Moscow, GIFML, 1961, 260 p.
14. Amann H. Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces, *SIAM Review,* 1976, Vol. 18, No. 4, pp. 620–709. DOI: 10.1137/1018114
15. Kolosov A. I. Nelinejnye kraevye zadachi so svobodnoj granicej dlja obyknovennyh differencial'nyh urav-nenij matematicheskoj fiziki: dis. … doktora fiz.-mat. nauk : 01.01.03 / Kolosov Anatolij Ivanovich. Mosow, 1991, 267 p.
16. Kurpel' N. S., Shuvar B. A. Dvustoronnie operatornye neravenstva i ih primenenie. Kyiv, Nauk. dumka, 1980, 268 p.
17. Zhao Z. Uniqueness of positive solutions for singular nonlinear second-order boundary-value problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications,* 1994, Vol. 23, No. 6, pp. 755–765. DOI: 10.1016/0362-546X(94)90217-8.
18. O'Regan D. Singular second order boundary value problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications,* 1990, Vol. 15, No. 12, pp. 1097–1109. DOI: 10.1016/0362-546X(90)90046-J.
19. Rus M.-D. The method of monotone iterations for mixed monotone operators : Ph.D. Thesis Summary. Cluj-Napoca, 2010, 45 p.
20. Voronenko M. D., Sidorov M. V. Konstruktivne doslidzhennja nelinijnij krajovih zadach dlja zvichajnih diferencial'nih rivnjan', *Radiojelektronika i informatika,* 2018, No. 1 (80), pp. 48–54.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6