

## ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С СДВИНУТЫМИ ЭРЛАНГОВСКИМИ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ ВХОДНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

**Тарасов В. Н.** – д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, Россия.

**Бахарева Н. Ф.** – д-р техн. наук, профессор, заведующая кафедрой информатики и вычислительной техники Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, Россия.

### АННОТАЦИЯ

**Актуальность.** В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 особо актуальны в связи с тем, что до сих пор не существует решения в конечном виде в общем случае. Рассмотрена задача вывода решения для среднего времени ожидания в очереди в замкнутой форме для обычных систем с эрланговскими и экспоненциальными входными распределениями и для этих же систем со сдвинутыми вправо распределениями.

**Цель работы.** Получение решения для основной характеристики системы – среднего времени ожидания требований в очереди для трех видов систем массового обслуживания типа G/G/1 с обычными и со сдвинутыми эрланговскими и экспоненциальными входными распределениями.

**Метод.** Для решения поставленной задачи использован классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, который позволяет получить решение для среднего времени ожидания для рассматриваемых систем в замкнутой форме. Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли играет важную роль в теории систем G/G/1. Для практического применения полученных результатов использован известный метод моментов теории вероятностей.

**Результаты.** Впервые получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для трех видов систем, с помощью которых выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди для вышеуказанных систем в замкнутой форме.

**Выводы.** Введение параметра сдвига во времени в законы распределения входного потока и времени обслуживания для рассматриваемых систем, преобразует их в системы запаздыванием с меньшим временем ожидания. Это связано с тем, что операция сдвига во времени уменьшает величину коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями требований и их времени обслуживания, а как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания требований связано с этими коэффициентами вариаций квадратичной зависимостью. Если система с эрланговскими входными распределениями второго порядка работает только при одном определенном точечном значении коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями требований и их времени обслуживания, то эта же система со сдвинутыми распределениями позволяет оперировать с интервальными значениями коэффициентов вариаций, что расширяет область применения этих систем. Аналогично обстоит дело и со сдвинутыми экспоненциальными распределениями. Кроме того, сдвинутое экспоненциальное распределение содержит два параметра и позволяет аппроксимировать произвольные законы распределения с использованием двух первых моментов. Такой подход позволяет рассчитать среднее время ожидания для указанных систем в математических пакетах для широкого диапазона изменения параметров трафика. Все остальные характеристики систем являются производными от времени ожидания.

Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемых систем позволяет получить решение в замкнутой форме и эти полученные решения публикуются впервые.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** эрланговский и экспоненциальный законы распределения, интегральное уравнение Линдли, метод спектрального разложения, преобразование Лапласа.

### АББРЕВИАТУРЫ

ИУЛ – интегральное уравнение Линдли;  
СМО – система массового обслуживания;  
ФРВ – функция распределения вероятностей.

### НОМЕНКЛАТУРА

$a(t)$  – функция плотности распределения интервалов между поступлениями требований;

$A^*(s)$  – преобразование Лапласа функции  $a(t)$ ;

$b(t)$  – функция плотности распределения времени обслуживания;

$B^*(s)$  – преобразование Лапласа функции  $b(t)$ ;

$c_\lambda$  – коэффициент вариации интервалов поступлений требований;

$c_\mu$  – коэффициент вариации времени обслуживания;

$D_\lambda$  – дисперсия случайного интервала между поступлениями;

$D_\mu$  – дисперсия времени обслуживания;

$E_2$  – закон распределения Эрланга второго порядка;

$E_2^-$  – сдвинутое распределение Эрланга второго порядка;

G – произвольный закон распределения;

M – экспоненциальный закон распределения;

$M^-$  – сдвинутое экспоненциальное распределение;

$\bar{W}$  – среднее время ожидания в очереди;

$W^*(s)$  – преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания;

$W(y)$  – ФРВ времени ожидания требования в очереди;

$\tilde{x}$  – случайное время обслуживания требования;

$\tilde{t}$  – случайный интервал времени между поступлениями требований;

$z$  – любое число из интервала  $(-1, 1)$ ;  
 $\lambda$  – интенсивность входного потока;  
 $\mu$  – интенсивность обслуживания;  
 $\rho$  – коэффициент загрузки системы;  
 $\bar{\tau}_\lambda$  – средний интервал между поступлениями требований;  
 $\bar{\tau}_\mu$  – среднее время обслуживания;  
 $\bar{\tau}_\mu^2$  – второй начальный момент времени обслуживания;  
 $\Phi_+(s)$  – преобразование Лапласа ФРВ времени ожидания;  
 $\psi_+(s)$  – первая компонента спектрального разложения;  
 $\psi_-(s)$  – вторая компонента спектрального разложения.

### ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена анализу СМО с известными эрланговскими ( $E_2$ ) и экспоненциальными ( $M$ ) входными распределениями, для которых в открытом доступе не обнаружены результаты по среднему времени ожидания требований в очереди, являющегося главной характеристикой для любых СМО. По этой характеристике, например, оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при их моделировании с помощью СМО. Рассматриваемые СМО, по введенной Кендаллом трехпозиционной символике для их классификации, обозначим  $E_2/E_2/1$ ,  $E_2/M/1$  и  $M/E_2/1$ , где в первой позиции задается вид закона распределения интервалов между требованиями входного потока, во второй позиции – вид закона распределения времени обслуживания требований и в третьей позиции – количество каналов обслуживания.

Также исследованы выше приведенные системы со сдвинутыми вправо во времени входными распределениями с целью получения решения для среднего времени ожидания. В теории массового обслуживания исследования систем  $G/G/1$  особо актуальны в связи с тем, что до сих пор не существует решения в конечном виде для общего случая.

В исследовании систем  $G/G/1$  важную роль играет метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли и большинство результатов в теории массового обслуживания получены именно с помощью данного метода.

**Объектом исследования** является СМО типа  $G/G/1$ .

**Предметом исследования** является среднее время ожидания в обычных системах  $E_2/E_2/1$ ,  $E_2/M/1$ ,  $M/E_2/1$  и в этих же системах, но со сдвинутыми эрланговскими и экспоненциальными входными распределениями.

**Целью работы** является получение решения в замкнутой форме для основной характеристики системы – среднего времени ожидания требований в очереди для вышеперечисленных СМО.

### 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе авторов [1] впервые приведены результаты по исследованию системы  $M/M/1$  с запаздыванием во времени со сдвинутыми на величину  $t_0 > 0$  экспоненциальными входными распределениями, полученные с помощью метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ). Результаты работы [1] позволяют развить теорию данного метода также на сдвинутые эрланговские распределения.

Одна из форм интегрального уравнения Линдли выглядит так:

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u) dC(u), & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

При кратком изложении метода спектрального разложения решения ИУЛ будем придерживаться подхода и символики автора классики теории массового обслуживания [2]. Суть решения ИУЛ методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1$  представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от  $s$ . Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложение:  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ , где  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  некоторые рациональные функции от  $s$ , которые можно разложить на множители. Функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять следующим условиям согласно [2]:

- для  $\text{Re}(s) > 0$  функция  $\psi_+(s)$  является аналитической без нулей в этой полуплоскости;
  - для  $\text{Re}(s) < D$  функция  $\psi_-(s)$  является аналитической без нулей в этой полуплоскости, (1)
- где  $D$  – некоторая положительная константа, определяемая из условия:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} < \infty$ .

Кроме того, функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1. \quad (2)$$

В работе ставится задача нахождения решения для времени ожидания требований в очереди в обычных СМО  $E_2/E_2/1$ ,  $E_2/M/1$ ,  $M/E_2/1$  и в этих же СМО со сдвинутыми эрланговскими и экспоненциальными входными распределениями. Для решения задачи необходимо вначале построить для указанных систем спектральные разложения вида  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$  с учетом условий (1), (2) в каждом случае.

## 2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Используемый в работе метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли впервые подробно представлен в классике теории массового обслуживания [2], а впоследствии применялся во многих работах, включая [3, 4]. Другой подход к решению ИУЛ использован в [5]. Здесь вместо термина «спектральное разложение» использована факторизация, а вместо функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  – компоненты факторизации  $\omega_+(z, t)$  и  $\omega_-(z, t)$  функции  $1 - z \cdot \chi(t)$ .

Такой подход для получения конечных результатов для рассматриваемых систем менее удобен, чем подход, описанный в [2] и проиллюстрированный многочисленными примерами.

Метод спектрального разложения решения ИУЛ также применен для исследования систем с гиперэкспоненциальными входными распределениями в работах [6–8]. В то же время, научной литературе, включая web-ресурсы, автору не удалось обнаружить результаты по времени ожидания для СМО с эрланговскими входными распределениями 2-го порядка общего вида. Кроме того, в научной литературе нет упоминаний о СМО со сдвинутыми входными распределениями, или же другими словами СМО с запаздыванием во времени. Впервые результаты по СМО с запаздыванием для классической системы М/М/1 со сдвинутыми экспоненциальными распределениями опубликованы в работе автора [1]. Результаты [1] позволили развить теорию метода спектрального разложения решения ИУЛ на сдвинутые вправо от нулевой точки распределения Эрланга второго порядка. Таким образом, в основу данной статьи легли работы [1, 2, 6–8].

## 3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для системы  $E_2/E_2/1$  законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида [11,12]:

$$a(t) = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}, \quad (3)$$

$$b(t) = 4\mu^2 t e^{-2\mu t}. \quad (4)$$

Для такого общего вида задания функций (3) и (4), решения для среднего времени ожидания для системы  $E_2/E_2/1$  в классике по теории массового обслуживания [2–5] автором не найдено и поэтому это решение будем строить на основе классического метода спектрального разложения решения ИУЛ, как это показано в [6]. Такой подход позволяет определить не только среднее время ожидания, но и моменты высших порядков времени ожидания. Тогда, учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения [9], тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию времени ожидания.

Преобразование Лапласа функций (3) и (4) будут соответственно:

$$A^*(s) = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2; \quad B^*(s) = \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2.$$

Тогда спектральное разложение решения ИУЛ для системы  $E_2/E_2/1$ :  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$  примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} &= \left( \frac{2\lambda}{2\lambda - s} \right)^2 \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 - 1 = \\ &= \frac{16\lambda^2 \mu^2 - (2\lambda - s)^2 (2\mu + s)^2}{(2\lambda - s)^2 (2\mu + s)^2} = \\ &= \frac{-s[s^2 + 2(\mu - \lambda)s - 8\lambda\mu][s + 2(\mu - \lambda)]}{(2\lambda - s)^2 (2\mu + s)^2}. \end{aligned}$$

Квадратный трехчлен числителя  $s^2 + (2\mu - \lambda)s - 8\lambda\mu$  имеет один отрицательный корень и один положительный, т.к. в случае стабильной системы  $\lambda < \mu$ , т.е.  $(\mu - \lambda) > 0$ . Обозначим их для удобства через  $-s_1$  и  $s_3$ :

$$-s_1 = -(\mu - \lambda) - \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu},$$

$$s_3 = -(\mu - \lambda) + \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}.$$

Тогда нули числителя разложения  $\psi_+(s) / \psi_-(s)$ :

$$s = 0; \quad -s_1 = -(\mu - \lambda) - \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}; \quad -s_2 = -2(\mu - \lambda)$$

(два отрицательных корня и один положительный корень)  $s_3 = -(\mu - \lambda) + \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}$ . Полюсы разложения  $\psi_+(s) / \psi_-(s)$ :  $s = 2\lambda, s = -2\mu$  (см. рис. 1). Теперь с учетом условий (1) и (2) построим функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$ :

$$\psi_+(s) = \frac{s(s + s_1)(s + s_2)}{(2\mu + s)^2}; \quad \psi_-(s) = -\frac{(2\lambda - s)^2}{(s - s_3)}.$$

Выполнение условий (1) для этих функций очевидно, что подтверждается также рис. 1.

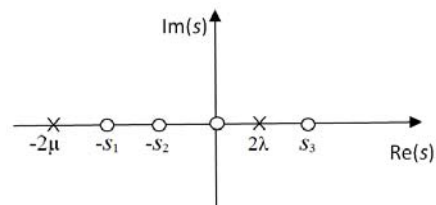


Рисунок 1 – Нули и полюсы функции  $\psi_+(s) / \psi_-(s)$  для системы  $E_2/E_2/1$

При построении этих функций удобнее нули и полюса отношения  $\psi_+(s) / \psi_-(s)$  отметить на комплексной  $s$  – плоскости для исключения ошибок построения функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$ . На рис. 1 полюсы

отмечены крестиками, а нули – кружками. Остается проверить выполнение условий (2):

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\Psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\Psi_-(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{2(2\lambda - s)}{2s - s_3} = -1.$$

Условия (2) также полностью выполнены. Далее по методике спектрального разложения найдем константу  $K$ :

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi_+(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s + s_1)(s + s_2)}{(2\mu + s)^2} = \frac{s_1 s_2}{4\mu^2},$$

где  $s_1 = (\mu - \lambda) + \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}$ ,  $s_2 = 2(\mu - \lambda)$ .

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания:

$$W^*(s) = s^* \Phi_+(s) = \frac{s_1 s_2 (2\mu + s)^2}{4\mu^2 s (s + s_1)(s + s_2)}. \quad (5)$$

Для нахождения среднего времени ожидания найдем производную от функции  $W^*(s)$  со знаком минус в точке  $s = 0$ :

$$\begin{aligned} -\frac{dW^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} &= \frac{s_1 s_2}{4\mu^2} \left[ \frac{4\mu^2 (s + s_1) - 4\mu s_1 s_2}{s_1^2 s_2^2} \right] \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} - \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

Окончательно, среднее время ожидания для системы  $E_2/E_2/1$

$$\bar{W} = \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} - \frac{1}{\mu}, \quad (6)$$

где  $s_1 = (\mu - \lambda) + \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}$ ,  $s_2 = 2(\mu - \lambda)$  определяются через параметры распределений (3) и (4).

Далее рассмотрим СМО, для которой законы распределения входного потока и времени обслуживания заданы сдвинутыми вправо функциями плотности:

$$a(t) = 4\lambda^2 (t - t_0) e^{-2\lambda(t-t_0)}, \quad (7)$$

$$b(t) = 4\mu^2 (t - t_0) e^{-2\mu(t-t_0)}. \quad (8)$$

Такую систему обозначим  $E_2^- / E_2^- / 1$ .

Утверждение 1. Спектральное разложение решения ИУЛ для системы  $E_2^- / E_2^- / 1$   $A^*(-s) * B^*(s) - 1 = \Psi_+(s) / \Psi_-(s)$  имеет точно такой же вид, как и для системы  $E_2/E_2/1$ .

Доказательство. Преобразование Лапласа функций (7) и (8) соответственно имеют вид:

$$A^*(-s) = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda - s} \right)^2 e^{t_0 s}; \quad B^*(s) = \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 e^{-t_0 s}.$$

Тогда выражение для спектрального разложения решения ИУЛ примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} &= \left( \frac{2\lambda}{2\lambda - s} \right)^2 e^{t_0 s} \times \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 e^{-t_0 s} - 1 = \\ &= \left( \frac{2\lambda}{2\lambda - s} \right)^2 \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 - 1. \end{aligned}$$

Здесь показатели степени у экспонент обнуляются и тем самым операция сдвига в спектральном разложении нивелируется. Таким образом, для системы  $E_2^- / E_2^- / 1$  справедливы все выкладки, проведенные для системы  $E_2/E_2/1$ , но уже с измененными вследствие операции сдвига параметрами  $\lambda$  и  $\mu$ .

Утверждение 1 доказано.

Для определения неизвестных параметров распределения  $E_2^-$  воспользуемся преобразованием Лапласа функции (7). Среднее значение интервала между поступлениями дает первая производная от преобразования Лапласа со знаком минус в точке  $s=0$ :

$$\begin{aligned} -\frac{dA^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} &= \left[ \frac{8\lambda^2}{(2\lambda + s)^3} e^{-t_0 s} + \left( \frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2 t_0 e^{t_0 s} \right] \Big|_{s=0} = \\ &= 1/\lambda + t_0. \end{aligned}$$

Отсюда средний интервал между поступлениями требований:

$$\bar{\tau}_\lambda = \lambda^{-1} + t_0. \quad (9)$$

Второй начальный момент интервала между поступлениями равен  $\frac{d^2 A^*(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2$ , откуда

$\bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2$ . Определим квадрат коэффициента

вариации  $c_\lambda^2 = \frac{\bar{\tau}_\lambda^2 - (\bar{\tau}_\lambda)^2}{(\bar{\tau}_\lambda)^2} = \frac{1}{2(1 + \lambda t_0)^2}$ . Отсюда коэффициент вариации:

$$c_\lambda = [\sqrt{2}(1 + \lambda t_0)]^{-1} \quad (10)$$

Заметим, что для распределения  $E_2$ :  $\bar{\tau}_\lambda = \lambda^{-1}$ ,  $c_\lambda = 1/\sqrt{2}$ . Сравнивая результаты числовых характеристик  $\bar{\tau}_\lambda$ ,  $c_\lambda$  для распределений  $E_2$  и  $E_2^-$  можно увидеть разницу между ними, полученную в результате сдвига законов распределений на величину  $t_0 > 0$ . Коэффициент вариации для распределения  $E_2^-$ :  $c_\lambda$  уменьшается при сдвиге в  $(1 + \lambda t_0)$  раз по сравнению с коэффициентом  $c_\lambda$  для распределения  $E_2$ .

Для времени обслуживания по закону  $E_2^-$  получим аналогичные выражения для интенсивности обслуживания  $\mu$  и коэффициента вариации  $c_\mu$ :

$$\bar{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0, \quad (11)$$

$$c_\mu = [\sqrt{2}(1 + \mu t_0)]^{-1}. \quad (12)$$

Задав в качестве входных параметров для расчета системы  $E_2^- / E_2^- / 1$  полученные выше значения  $\bar{c}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu$ , а также параметр сдвига  $t_0$  по выражениям (9)–(12) можно рассчитать среднее время ожидания используя выражение (6) для диапазонов изменения коэффициентов вариаций  $c_\lambda \in (0, 1/\sqrt{2})$  и  $c_\mu \in (0, 1/\sqrt{2})$ , определяемыми соотношениями (10) и (12) соответственно в зависимости от величины параметра сдвига  $t_0 > 0$ .

Учитывая, что среднее время ожидания в системе G/G/1 связано с коэффициентами вариаций времени между поступлениями требований и времени обслуживания квадратичной зависимостью, в системе с запаздыванием время ожидания будет меньше, чем в обычной системе, что и проиллюстрировано в следующем разделе.

Далее рассмотрим систему  $E_2/M/1$ , образованную двумя потоками, заданными функциями плотностей:

– для входного потока

$$a(t) = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}, \quad (13)$$

– для времени обслуживания

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}. \quad (14)$$

Запишем преобразование Лапласа функций (13) и (14):

$$A^*(s) = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2, \quad B^*(s) = \frac{\mu}{\mu + s}.$$

Для применения метода спектрального разложения воспользуемся результатами [1] для систем общего вида G/M/1, к которым принадлежит система  $E_2/M/1$ . Выражение для спектрального разложения решения ИУЛ для системы G/M/1 задается в виде:

$$A^*(-s) * B^*(s) - 1 = \frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} = \left[ \frac{\mu A^*(-s) - s - \mu}{s(s+s_1)} \right] \left[ \frac{s(s+s_1)}{s+\mu} \right], \quad (15)$$

где  $s = -s_1$  – единственный отрицательный корень уравнения  $s + \mu - \mu A^*(-s) = 0$ . Выражение в первых скобках (15) не имеет ни плюсов, ни нулей в области  $\text{Re}(s) \leq 0$  кроме  $s = 0$  и  $s = -s_1$  [1]. Поэтому за функцию  $\Psi_+(s)$  примем выражение во вторых скобках, т.к. его нули  $s = 0, s = -s_1$  и полюс  $s = -\mu$  лежат в области  $\text{Re}(s) \leq 0$ , а за функцию  $\Psi_-(s)$  – выражение в первых скобках:

$$\Psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)}{s+\mu}; \quad \Psi_-(s) = \frac{-s(s+s_1)}{s+\mu - \mu A^*(-s)}.$$

Для окончательного построения функции  $\Psi_-(s)$  подставим в ее выражение  $A^*(-s) = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2$ :

$$\begin{aligned} \Psi_-(s) &= \frac{-s(s+s_1)}{s+\mu - \mu \times [4\lambda^2 / (2\lambda + s)^2]} = \\ &= \frac{-(s+s_1)(2\lambda - s)^2}{s^2 + (\mu - 4\lambda)s + 4\lambda(\lambda - \mu)} = \\ &= \frac{-(s+s_1)(2\lambda - s)^2}{(s+s_1)(s-s_2)} = - \frac{(2\lambda - s)^2}{s - s_2} \end{aligned}$$

т.к. квадратное уравнение  $s^2 + (\mu - 4\lambda)s + 4\lambda(\lambda - \mu) = 0$ , полученное из знаменателя имеет один отрицательный корень  $-s_1 = -(\mu - 4\lambda)/2 - \sqrt{[(\mu - 4\lambda)/2]^2 + 4\lambda(\lambda - \mu)}$  и один положительный корень  $s_2 = (4\lambda - \mu)/2 + \sqrt{[(\mu - 4\lambda)/2]^2 + 4\lambda(\lambda - \mu)}$ .

Окончательно компоненты спектрального разложения для системы  $E_2/M/1$  будут иметь вид:

$$\Psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)}{s+\mu}; \quad \Psi_-(s) = - \frac{(2\lambda - s)^2}{s - s_2}. \quad (16)$$

В случае стабильной системы при  $\lambda < \mu$  выполнено условие  $4\lambda(\lambda - \mu) > 0$ . Теперь выполнение условия (1) для построенных функций (16) очевидно. Это подтверждает и рис.2, где отображены нули и полюсы отношения  $\Psi_+(s)/\Psi_-(s)$  на комплексной  $s$  – плоскости для исключения ошибок построения спектрального разложения. На рис. 2 полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

Теперь остается проверить выполнение условий (2):

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\Psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\Psi_-(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{(2\lambda - s)^2}{s(s-2)} = -1,$$

следовательно, условия (2) также выполнены.

Далее по методике спектрального разложения найдем константу  $K$ , определяющую вероятность того, что поступающее в систему требование застает ее свободной:

$$K = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\Psi_+(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{s+s_1}{s+\mu} = \frac{s_1}{\mu}.$$

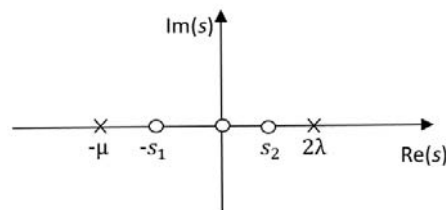


Рисунок 2 – Нули и полюсы функции  $\Psi_+(s)/\Psi_-(s)$  для системы  $E_2/M/1$

Построим функцию  $\Phi_+(s)$ , через которую найдем преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания:  $W^*(s) = s * \Phi_+(s) = \frac{s_1(s + \mu)}{\mu(s + s_1)}$ . Производная

от функции  $W^*(s)$  со знаком минус в т.  $s = 0$ :

$$-\frac{dW^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} = - \left[ \frac{s_1\mu(s + s_1) - s_1(s + \mu)\mu}{\mu^2(s + s_1)^2} \right] \Big|_{s=0} =$$

$$= \frac{s_1\mu^2 - s_1^2\mu}{\mu^2 s_1^2} = \frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mu}.$$

Тогда среднее время ожидания для системы  $E_2/M/1$ :

$$\bar{W} = 1/s_1 - 1/\mu, \quad (17)$$

где  $s_1 = (\mu - 4\lambda)/2 + \sqrt{[(\mu - 4\lambda)/2]^2 + 4\lambda(\mu - \lambda)}$  есть абсолютное значение корня  $-s_1$ .

После того, как выражение для среднего времени ожидания для системы  $E_2/M/1$  найдено, можем перейти к исследованию системы  $E_2/M/1$  с запаздыванием во времени. Такую систему обозначим  $E_2^-/M^-/1$ . Для этой системы потоки описываются следующими сдвинутыми функциями плотности:

$$a(t) = 4\lambda^2(t - t_0)e^{-2\lambda(t - t_0)}, \quad (18)$$

$$b(t) = \mu e^{-\mu(t - t_0)}. \quad (19)$$

Утверждение 2. Спектральное разложение решения ИУЛ для системы  $E_2^-/M^-/1$   $A^*(-s) * B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$  имеет точно такой же вид, что и для системы  $E_2/M/1$ .

Доказательство. Преобразования Лапласа функций (18) и (19) имеют вид:

$$A^*(s) = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2 e^{-t_0 s}, \quad (20)$$

$$B^*(s) = \frac{\mu}{\mu + s} e^{-t_0 s}. \quad (21)$$

Спектральное разложение для системы  $E_2/M/1$  с учетом компонент (16) имеет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = - \frac{s(s + s_1)(s - s_2)}{(2\lambda - s)^2(s + \mu)}.$$

Для системы  $E_2^-/M^-/1$  спектральное разложение будет иметь вид:

$$A^*(-s) * B^*(s) - 1 = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda - s} \right)^2 e^{t_0 s} \times \frac{\mu}{\mu + s} e^{-t_0 s} - 1 =$$

$$= \left( \frac{2\lambda}{2\lambda - s} \right)^2 \times \frac{\mu}{\mu - s} - 1.$$

Показатели степени у экспонент в спектральном разложении обнуляются и таким образом операция

сдвига во времени нивелируются. Спектральные разложения решения ИУЛ для обеих систем совпадают. Таким образом, все проведенные выше выкладки для системы  $E_2/M/1$  справедливы и для системы  $E_2^-/M^-/1$ . Утверждение 2 доказано.

Далее нам необходимо определить числовые характеристики распределений  $E_2^-$  и  $M^-$ . Для их определения воспользуемся свойством преобразования Лапласа функции плотности воспроизводить моменты:

$$-\frac{dA^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} = - \frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2 e^{-t_0 s} \right] \Big|_{s=0} =$$

$$= \left[ \frac{8\lambda^2}{(2\lambda + s)^3} e^{-t_0 s} + \left( \frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2 t_0 e^{t_0 s} \right] \Big|_{s=0} = 1/\lambda + t_0.$$

Отсюда среднее значение интервала между поступлениями требований:  $\bar{c}_\lambda = \lambda^{-1} + t_0$ . Найдя вторую производную от преобразования (10) при  $s=0$  определим второй начальный момент интервала между поступлениями  $\frac{d^2 A^*(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{3}{2\lambda^2} + 2 \frac{t_0}{\lambda} + t_0^2$ . Отсюда определим коэффициент вариации:

$$c_\lambda = [\sqrt{2}(1 + \lambda t_0)]^{-1}. \quad (22)$$

Поступив аналогично с распределением  $M^-$  с учетом преобразования Лапласа (21), получим среднее значение времени обслуживания  $\bar{c}_\mu = \mu^{-1} + t_0$ , а коэффициент вариации

$$c_\mu = 1/(1 + \mu t_0). \quad (23)$$

Теперь задав в качестве входных параметров для расчета системы  $E_2^-/M^-/1$  полученные выше значения  $\bar{c}_\lambda, \bar{c}_\mu, c_\lambda, c_\mu$ , а также параметр сдвига  $t_0$  можно рассчитать среднее время ожидания по выражению (17) для диапазонов изменения коэффициентов вариаций  $c_\lambda \in (0, 1/\sqrt{2})$  и  $c_\mu \in (0, 1)$ , определяемыми соотношениями (22) и (23) соответственно в зависимости от величины параметра сдвига  $t_0 > 0$ .

Далее рассмотрим систему  $M/E_2/1$ , образованную двумя потоками, заданными функциями плотностей распределений интервалов:

– для входного потока

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

– для времени обслуживания

$$b(t) = 4\mu^2 t e^{-2\mu t}.$$

В связи с тем, что эта система  $M/E_2/1$  относится к классу систем  $M/G/1$ , воспользуемся известным результатом для данной системы.

Среднее время ожидания в системе M/G/1 дается формулой Полячека-Хинчина [2]:

$$\bar{W} = \frac{\lambda \tau_{\mu}^2}{2(1-\rho)}, \quad (24)$$

где  $0 < \rho = \lambda/\mu < 1$ .

Для распределения  $E_2$  второй начальный момент времени обслуживания  $\tau_{\mu}^2 = 3/(2\mu^2)$ , тогда из (24) получим среднее время ожидания в системе M/E<sub>2</sub>/1:

$$\bar{W} = \frac{3\rho}{4\mu(1-\rho)}. \quad (25)$$

Теперь нам предстоит найти среднее время ожидания для системы M/E<sub>2</sub>/1 с запаздыванием. Для этого рассмотрим систему, образованную двумя потоками, заданными функциями плотностей распределений интервалов:

– для входного потока

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad (26)$$

– для времени обслуживания

$$b(t) = 4\mu^2(t-t_0)e^{-2\mu(t-t_0)}. \quad (27)$$

Такую систему обозначим M<sup>-</sup>/E<sub>2</sub><sup>-</sup>/1. Для получения выражения для среднего времени ожидания воспользуемся уравнением Полячека – Хинчина для преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания для системы M/G/1 [2]:

$$W^*(s) = \frac{s(1-\rho)}{s-\lambda+\lambda B^*(s)}, \quad (28)$$

где  $B^*(s) = 4\mu^2/(s+2\mu)^2$  – преобразование Лапласа функции плотности времени обслуживания (27).

Утверждение 3. Спектральное разложение решения ИУЛ  $A^*(-s) * B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$  для системы M<sup>-</sup>/E<sub>2</sub><sup>-</sup>/1 имеет такой же вид, что и для системы M/E<sub>2</sub>/1, следовательно, преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания для них также совпадают.

Доказательство. Преобразование Лапласа функции (26) равно  $A^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s} e^{-t_0 s}$ , а функции (27) –

$B^*(s) = \left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2 e^{-t_0 s}$ . Тогда спектральное разложение

$$\begin{aligned} A^*(-s) * B^*(s) - 1 &= \frac{\lambda}{\lambda-s} e^{t_0 s} \times \left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2 e^{-t_0 s} - 1 = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-s} \times \left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2 - 1 = \frac{s[s^2 + (4\mu-\lambda)s + 4\mu(\mu-\lambda)]}{(\lambda-s)(2\mu+s)^2}. \end{aligned}$$

Показатели степени у экспонент опять обнуляются и операция сдвига нивелируется. Квадратный трехчлен в числителе разложения  $s^2 + (4\mu-\lambda)s + 4(\mu^2 - \lambda\mu)$ , где  $4\mu(\mu-\lambda) > 0$  и  $(4\mu-\lambda) > 0$  при  $\mu > \lambda$  в случае стабильной системы, имеет два действительных отрицательных корня  $-s_1$ ,  $-s_2$ :

$$\begin{aligned} -s_1 &= -(4\mu-\lambda)/2 + \sqrt{[(4\mu-\lambda)/2]^2 - 4\mu(\mu-\lambda)}, \\ -s_2 &= -(4\mu-\lambda)/2 - \sqrt{[(4\mu-\lambda)/2]^2 - 4\mu(\mu-\lambda)}. \end{aligned}$$

Тогда спектральное разложение для систем M/E<sub>2</sub>/1 и M<sup>-</sup>/E<sub>2</sub><sup>-</sup>/1 будет иметь вид:  $\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(\lambda-s)(2\mu+s)^2}$ .

Нули и полюсы этого разложения показаны на рис. 3, где полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

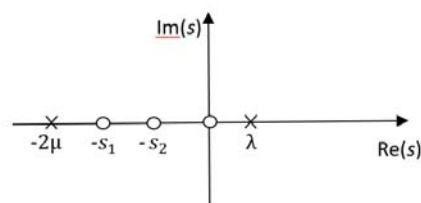


Рисунок 3 – Нули и полюсы функции  $\psi_+(s)/\psi_-(s)$  для системы M/E<sub>2</sub>/1

Исходя из правил (1) и (2) построения функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  выбираем  $\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(2\mu+s)^2}$ ,

$\psi_-(s) = \lambda-s$ . Необходимая для получения решения

константа  $K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \frac{s_1 s_2}{4\mu^2} = \frac{4\mu(\mu-\lambda)}{4\mu^2} = 1-\rho$ .

Далее строим функцию

$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{(1-\rho)(2\mu+s)^2}{s(s+s_1)(s+s_2)}$ . Откуда следует, что преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания в системе M<sup>-</sup>/E<sub>2</sub><sup>-</sup>/1

$$W^*(s) = s * \Phi_+(s) = \frac{(1-\rho)(2\mu+s)^2}{(s+s_1)(s+s_2)}. \quad (29)$$

Теперь остается показать тождественность равенств (29) и (28). Из выражения (28) следует, что для системы M/E<sub>2</sub>/1

$$\begin{aligned} W^*(s) &= \frac{s(1-\rho)}{s-\lambda+\lambda[2\mu/(2\mu+s)]^2} = \\ &= \frac{s(1-\rho)(2\mu+s)^2}{(s-\lambda)(2\mu+s)^2 + 4\lambda\mu^2} = \frac{(1-\rho)(2\mu+s)^2}{(s+s_1)(s+s_2)}, \end{aligned}$$

так как знаменатель раскладывается на множители вида:

$$(s - \lambda)(2\mu + s)^2 + 4\lambda\mu^2 = s \left[ s^2 + (4\mu - \lambda) + 4\mu(\mu - \lambda) \right] = s(s + s_1)(s + s_2).$$

Следовательно, равенства (29) и (28) тождественны.

Утверждение 3 доказано. Теперь можем воспользоваться результатами предыдущих пунктов для определения неизвестных параметров распределений (26) и (27):

$$\bar{\tau}_\lambda = \lambda^{-1} + t_0, \quad \bar{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0, \quad c_\lambda = (1 + \lambda t_0)^{-1}, \\ c_\mu = [\sqrt{2}(1 + \mu t_0)]^{-1}.$$

Выбирая их и параметр сдвига  $t_0$  в качестве входных параметров для системы  $M^*/E_2/1$ , можем рассчитать среднее время ожидания с использованием формулы (25).

#### 4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Ниже в табл. 1 приведены данные расчетов для системы  $E_2^-/E_2^-/1$  для для случаев малой, средней и высокой нагрузки  $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$ . Для сравнения в правой колонке приведены данные для обычной системы  $E_2/E_2/1$ .

Среднее время ожидания в системе с запаздыванием  $E_2^-/E_2^-/1$  как и ожидалось, меньше чем в системе  $E_2/E_2/1$  и при убывании значения параметра сдвига  $t_0$  приближается к среднему времени ожидания в обычной системе.

В правой колонке таблицы 2 для сравнения приведены результаты для системы  $E_2/M/1$ . С уменьшением значения параметра  $t_0$  среднее время ожидания в системе  $E_2/M^*/1$  также стремится к среднему времени ожидания в системе  $E_2/M/1$ .

Коэффициент загрузки в данном случае определяется отношением средних интервалов  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$ . Расчеты, приведенные в табл. 1–3 проведены для нормированного времени обслуживания  $\bar{\tau}_\mu = 1$ .

Таблица 1 – Результаты экспериментов для СМО  $E_2^-/E_2^-/1$  и  $E_2/E_2/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	$c_\mu$	$t_0$	для системы $E_2^-/E_2^-/1$	для системы $E_2/E_2/1$
0,1	0,643	0,071	0,9	0,000	0,017
	0,672	0,354	0,5	0,002	
	0,700	0,636	0,1	0,013	
	0,706	0,700	0,01	0,016	
0,5	0,389	0,071	0,9	0,001	0,390
	0,530	0,354	0,5	0,081	
	0,672	0,636	0,1	0,309	
	0,704	0,700	0,01	0,382	
0,9	0,134	0,071	0,9	0,034	4,359
	0,389	0,354	0,5	1,057	
	0,643	0,636	0,1	3,519	
	0,701	0,700	0,01	4,271	

Таблица 2 – Результаты экспериментов для СМО

$E_2^-/M^*/1$  и  $E_2/M/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	$c_\mu$	$t_0$	для системы $E_2^-/M^*/1$	для системы $E_2/M/1$
0,1	0,643	0,1	0,9	0,000	0,030
	0,672	0,5	0,5	0,005	
	0,700	0,9	0,1	0,023	
	0,706	0,99	0,01	0,029	
0,5	0,389	0,1	0,9	0,003	0,618
	0,530	0,5	0,5	0,132	
	0,672	0,9	0,1	0,491	
	0,704	0,99	0,01	0,605	
0,9	0,134	0,1	0,9	0,055	6,588
	0,389	0,5	0,5	1,609	
	0,643	0,9	0,1	5,322	
	0,701	0,99	0,01	6,456	

Таблица 3 – Результаты экспериментов для СМО

$M^*/E_2^-/1$  и  $M/E_2/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	$c_\mu$	$t_0$	для системы $M^*/E_2^-/1$	для системы $M/E_2/1$
0,1	0,643	0,071	0,9	0,001	0,083
	0,950	0,354	0,5	0,021	
	0,990	0,636	0,1	0,068	
	0,999	0,700	0,01	0,082	
0,5	0,550	0,071	0,9	0,008	0,75
	0,750	0,354	0,5	0,188	
	0,950	0,636	0,1	0,608	
	0,995	0,700	0,01	0,735	
0,9	0,190	0,071	0,9	0,068	6,75
	0,550	0,354	0,5	1,688	
	0,910	0,636	0,1	5,468	
	0,991	0,700	0,01	6,616	

Данные всех таблиц подтверждают тот факт, что за счет уменьшения коэффициентов вариации  $c_\lambda$  и  $c_\mu$  из-за ввода параметра сдвига  $t_0$ , уменьшается среднее время ожидания в системах с запаздыванием  $E_2^-/E_2^-/1$ ,  $E_2^-/M^*/1$  и  $M^*/E_2^-/1$ . При уменьшении параметра сдвига  $t_0$  среднее время ожидания стремится к среднему времени ожидания в обычной системе, что подтверждает полную адекватность полученных результатов.

#### 5 РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для трех видов систем, с помощью которых выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди для систем  $E_2/E_2/1$ ,  $E_2/M/1$  и  $M/E_2/1$  в замкнутой форме. Эти же расчетные выражения справедливы для систем с запаздыванием во времени  $E_2^-/E_2^-/1$ ,  $E_2^-/M^*/1$  и  $M^*/E_2^-/1$  соответственно с учетом изменения числовых характеристик их сдвинутых распределений.



В отличие от обычной системы  $E_2/E_2/1$ , систему  $E_2^-/E_2^-/1$  можно использовать для диапазона изменения  $c_\lambda$  и  $c_\mu$  от 0 до  $1/\sqrt{2}$ . В случае системы  $E_2/M/1$  систему с запаздыванием  $E_2^-/M^-/1$  можно использовать для диапазона изменения  $c_\lambda$  0 до  $1/\sqrt{2}$  и  $c_\mu$  от 0 до 1. В случае системы  $M/E_2/1$  система с запаздыванием  $M^-/E_2^-/1$  позволяет использовать диапазон изменения  $c_\lambda$  0 до 1, а  $c_\mu$  – от 0 до  $1/\sqrt{2}$ . Таким образом, введение сдвинутых вправо от нулевой точки распределений расширяет диапазон изменения коэффициентов вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания, тем самым расширяя область применения этих СМО. Используя предложенный подход, помимо среднего времени ожидания, можно определить дисперсию и моменты высших порядков времени ожидания.

### ВЫВОДЫ

**Научная новизна** полученных результатов заключается в том, что получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемых систем и с помощью спектральных разложений выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди для этих систем в замкнутой форме. Эти выражения расширяют и дополняют известную незавершенную формулу для среднего времени ожидания для систем  $G/G/1$  с произвольными законами распределений входного потока и времени обслуживания.

**Практическое значение** работы заключается в том, что полученные результаты с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого необходимо знать числовые характеристики интервалов входящего трафика и времени обслуживания на уровне двух первых моментов, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика [8].

**Перспективы дальнейших исследований** просматриваются в продолжении исследования систем  $G/G/1$  с другими общими входными распределениями

и в расширении и дополнении формулы для среднего времени ожидания для систем  $G/G/1$ .

### ЛИТЕРАТУРА / ЛІТЕРАТУРА

1. Тарасов В. Н. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием / В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева, И. А. Блатов // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 11. – С. 51–59.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания ; пер. с англ. под редакцией В. И. Неймана / Л. Клейнрок. – М. : Машиностроение, 1979. – 432 с.
3. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems / N. Brannstrom. – Applied to HS-DSCH, Lulea university of technology, 2004. –79 p.
4. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods / W. Whitt // Operation Research. – 1982. – № 1. – P. 125–147.
5. Бочаров П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М. : Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
6. Тарасов В.Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями / В. Н. Тарасов // Проблемы передачи информации. – 2016. – № 1. – С. 16–26.
7. Тарасов В. Н. Определение среднего времени ожидания требований в управляемой системе массового обслуживания  $H_2/H_2/1$  / В. Н. Тарасов, И. В. Карташевский // Системы управления и информационные технологии. – 2014. – № 3(57). – С. 92–96.
8. Анализ входящего трафика на уровне трех моментов распределений временных интервалов / [В. Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Г. А. Горелов, С. В. Малахов] // Информационные технологии. – 2014. – № 9. – С. 54–59.
9. [HTTPS://tools.ietf.org/html/rfc3393](https://tools.ietf.org/html/rfc3393). RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (дата обращения: 26.02.2016).
10. Myskja A. An improved heuristic approximation for the  $GI/GI/1$  queue with bursty arrivals / A. Myskja // Teletraffic and datatrafic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers. – 1991. – P. 683–688.
11. Алиев Т. И. Основы моделирования дискретных систем / Т. И. Алиев. – СПб. : СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.
12. Алиев Т. И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания / Т. И. Алиев // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – № 2(84). – С. 88–93.
13. Aras A. K. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment / A. K. Aras, X. Chen & Y. Liu // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89, No. 1. – P. 81–125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
14. Jennings O. B. Comparisons of ticket and standard queues. / O. B. Jennings & J. Pender // Queueing Systems. – 2016. – Vol. 84, No. 1. – P. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>

Received 05.07.2018.

Accepted 20.08.2018.

УДК 621.391.1: 621.395

### ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ЗСУНУТИМИ ЕРЛАНГІВСЬКИМ І ЕКСПОНЕНТНИМ ВХІДНИМИ РОЗПОДІЛАМИ

**Тарасов В. Н.** – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри програмного забезпечення і управління в технічних системах Поволзького державного університету телекомунікацій та інформатики, Росія.

**Бахарєва Н. Ф.** – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри інформатики та обчислювальної техніки Поволзької державного університету телекомунікацій та інформатики, Росія.

### АНОТАЦІЯ

**Актуальність.** У теорії масового обслуговування дослідження систем  $G/G/1$  особливо актуальні у зв'язку з тим, що до цих пір не існує рішення в кінцевому вигляді у загальному випадку. Розглянуто задачу виведення рішення для середнього часу очікування в черзі в замкнутій формі для звичайних систем з ерлангівським і експонентним входними розподілами і для цих же систем зі зсуnutими вправо розподілами.

**Мета роботи.** Отримання рішення для основної характеристики системи – середнього часу очікування вимог в черзі для трьох видів систем масового обслуговування типу  $G/G/1$  зі звичайними і з зсуnutими ерлангівським і експонентним входними розподілами.

**Метод.** Для вирішення поставленого завдання використаний класичний метод спектрального розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндли, який дозволяє отримати рішення для середнього часу очікування для розглянутих систем в замкнутій формі. Метод спектрального розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндли грає важливу роль в теорії систем  $G/G/1$ . Для практичного застосування отриманих результатів використаний відомий метод моментів теорії ймовірностей.

**Результати.** Вперше отримано спектральні розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндлі для трьох видів систем, за допомогою яких виведені розрахункові вирази для середнього часу очікування в черзі для вищевказаних систем в замкнутій формі.

**Висновки.** Введення параметра зсуву в часі в закони розподілу вхідного потоку і часу обслуговування для розглянутих систем, перетворює їх в системи запізнення з меншим часом очікування. Це пов'язано з тим, що операція зсуву в часі зменшує величину коефіцієнтів варіацій інтервалів між надходженнями вимог і їх часу обслуговування, а як відомо з теорії масового обслуговування, середній час очікування вимог пов'язаний з цими коефіцієнтами варіацій квадратичною залежністю. Якщо система з ерланговськими вхідними розподілами другого порядку працює тільки при одному певному точковому значенні коефіцієнтів варіацій інтервалів між надходженнями вимог і їх часу обслуговування, то ця ж система з зсунутими розподілами дозволяє оперувати з інтервальними значеннями коефіцієнтів варіацій, що розширює сферу застосування цих систем. Аналогічно йде справа і з зсунутими експонентними розподілами. Крім того, зрушений експоненціальний розподіл містить два параметри і дозволяє апроксимувати довільні закони розподілу з використанням двох перших моментів. Такий підхід дозволяє розрахувати середній час очікування для зазначених систем в математичних пакетах для широкого діапазону зміни параметрів трафіку. Всі інші характеристики систем є похідними від часу очікування.

Метод спектрального розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндлі для розглянутих систем дозволяє отримати рішення в замкнутій формі і ці отримані рішення публікується вперше.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** ерланговський і експонентний закони розподілу, інтегральне рівняння Ліндлі, метод спектрального розкладання, перетворення Лапласа.

UDC 621.391.1:621.395

#### RESEARCH OF QUEUEING SYSTEMS WITH SHIFTED ERLANGIAN AND EXPONENTIAL INPUT DISTRIBUTIONS

**Tarasov V.N.** – Dr. Sc., Professor, Head of Department of Software and Management in Technical Systems of Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation.

**Bakhareva N. F.** – Dr. Sc., Professor, Head of Department of Informatics and Computer Engineering of Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation.

#### ABSTRACT

**Context.** In queuing theory, the study of G/G/1 systems is particularly relevant due to the fact that until now there is no solution in the final form in the general case. The problem of the derivation in closed form of the solution for the average waiting time in the queue for ordinary systems with erlangian and exponential input distributions and for the same systems with shifted distributions is considered.

**Objective.** Obtaining a solution for the main system characteristic – the average waiting time for queue requirements for three types of queuing systems of type G/G/1 with conventional and shifted erlangian and exponential input distributions.

**Method.** To solve this problem, we used the classical method of spectral decomposition of the solution of Lindley integral equation, which allows one to obtain a solution for average the waiting time for systems under consideration in a closed form. The method of spectral decomposition of the solution of Lindley integral equation plays an important role in the theory of systems G/G/1. For the practical application of the results obtained, the well-known method of moments of probability theory is used.

**Results.** The spectral decompositions of the solution of the Lindley integral equation for the three kinds of systems were first obtained with the help of which the calculated expressions for the average waiting time in the queue for the above systems in a closed form were derived.

**Conclusions.** The introduction of the time shift parameter in the laws of input flow distribution and service time for the systems under consideration turns them into systems with a delay with a shorter waiting time. This is due to the fact that the time shift operation reduces the coefficient of variation in the intervals between the receipts of the requirements and their service time, and as is known from queuing theory, the average wait time of requirements is related to these coefficients of variation by a quadratic dependence. The system with erlangian input distributions of the second order is applicable only at a certain point value of the coefficients of variation of the intervals between the receipts of the requirements and their service time. The same system with shifted distributions allows us to operate with interval values of coefficients of variations, which expands the scope of these systems. Similarly the situation and with the shifted exponential distributions is. In addition, the shifted exponential distribution contains two parameters and allows one to approximate arbitrary distribution laws using the first two moments. This approach allows us to calculate the average latency for these systems in mathematical packages for a wide range of traffic parameters. All other characteristics of the systems are derived from the waiting time. The method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation for the systems under consideration makes it possible to obtain a solution in a closed form and these solutions are published for the first time.

**KEYWORDS:** Erlangian and exponential distribution laws, Lindley integral equation, spectral decomposition method, Laplace transform.

#### REFERENCES

1. Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Blatov I. A. Analysis and calculation of queuing system with delay, *Automation and Remote Control*, 2015, No. 11, pp. 1945–1951. DOI: 10.1134/S0005117915110041
2. Kleinrock L. Teoriya massovogo obsluzhivaniya. Moscow, Mashinostroenie Publ, 1979, 432p.
3. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems. Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004, 79 p.
4. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods. *Operation Research*, 1982, Vol. 30, No. 1, pp. 125–147.
5. Bocharov P. P., Pechinkin A. V. Teoriya massovogo obsluzhivaniya. Moscow, Publishing House of Peoples' Friendship University, 1995, 529 p.
6. Tarasov V.N. Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions, *Problems of Information Transmission*, 2016, Vol. 52, No. 1, pp. 14–23. DOI: 10.1134/S0032946016010038
7. Tarasov V. N., Kartashevskiy I. V. Opredelenie srednego vremeni ozhidaniya trebovaniy v upravliaemoi sisteme massovogo obsluzhivaniya  $H_2/H_2/1$ , *Sistemy upravleniya i informatsionniye tehnologii*, 2014, No. 3, pp. 92–95.
8. Tarasov V. N., Bahareva N. F., Gorelov G. A., Malakhov S. V. Analiz vkhodiashego trafika na urovne treh momentov raspredeleniy, *Informacionnye tehnologii*, 2014, No. 9, pp. 54–59.
9. RFC 3393 [IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM)] Available at: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. (accessed: 26.02.2016).
10. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and datatraffic in a Period of Change. ITC-13*. Elsevier Science Publishers, 1991, pp. 683–688.
11. Aliev T. I. Osnovy modelirovaniya diskretnykh system. SPb, SPbGU ITMO, 2009, 363 p.
12. Aliev T.I. Approksimatsiya veroyatnostnykh raspredeleniy v modelyah massovogo obsluzhivaniya, *Nauchno-tehnicheskij vestnik informacionnykh tehnologii, mekhaniki i optiki*, 2013, Vol. 84, No. 2, pp. 88–93.
13. Aras A. K., Chen X. & Liu Y. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 1, pp. 81–125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
14. Jennings O. B. & Pender J. Comparisons of ticket and standard queues, *Queueing Systems*, 2016, Vol. 84, No. 1, pp. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>