

АНАЛИЗ ДВУХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $HE_2/M/1$ С ОБЫЧНЫМИ И СДВИНУТЫМИ ВХОДНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Тарасов В. Н. – д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, Россия.

АННОТАЦИЯ

Актуальность. В теории массового обслуживания исследования систем $G/M/1$ и $G/G/1$ актуальны в связи с тем, что до сих пор не существует решения в конечном виде для общего случая при произвольных законах распределений входного потока и времени обслуживания. Рассмотрена задача вывода решения для среднего времени ожидания в очереди в замкнутой форме для двух систем с обычными и со сдвинутыми гиперэрланговскими и экспоненциальными входными распределениями.

Цель работы. Получение решения для основной характеристики системы – среднего времени ожидания требований в очереди для двух систем массового обслуживания типа $G/M/1$ и $G/G/1$ с обычными и со сдвинутыми гиперэрланговскими и экспоненциальными входными распределениями.

Метод. Для решения поставленной задачи использован классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли. Данный метод позволяет получить решение для среднего времени ожидания для рассматриваемых систем в замкнутой форме. Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли играет важную роль в теории систем $G/G/1$. Для практического применения полученных результатов использован известный метод моментов теории вероятностей.

Результаты. Впервые получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для двух систем, с помощью которых выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди в замкнутой форме.

Выводы. Получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемых систем и с их помощью выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди для этих систем в замкнутой форме. Эти выражения расширяют и дополняют известные формулы теории массового обслуживания для среднего времени ожидания для систем $G/M/1$ и $G/G/1$ с произвольными законами распределений входного потока и времени обслуживания. Такой подход позволяет рассчитать среднее время ожидания для указанных систем в математических пакетах для широкого диапазона изменения параметров трафика. Все остальные характеристики систем являются производными от времени ожидания.

Кроме среднего времени ожидания, такой подход дает возможность определить и моменты высших порядков времени ожидания. Учитывая тот факт, что вариация задержки пакетов (джиттер) в телекоммуникациях определяется как разброс времени ожидания от его среднего значения, то джиттер можно будет определить через дисперсию времени ожидания.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: гиперэрланговский и экспоненциальный законы распределения, интегральное уравнение Линдли, метод спектрального разложения, преобразование Лапласа.

СОКРАЩЕНИЯ

ИУЛ – интегральное уравнение Линдли;
СМО – система массового обслуживания;
ФРВ – функция распределения вероятностей.

НОМЕНКЛАТУРА

$a(t)$ – функция плотности распределения интервалов между поступлениями требований;

$A^*(s)$ – преобразование Лапласа функции $a(t)$;

$b(t)$ – функция плотности распределения времени обслуживания;

$B^*(s)$ – преобразование Лапласа функции $b(t)$;

c_λ – коэффициент вариации интервалов поступлений требований;

c_μ – коэффициент вариации времени обслуживания;

D_W – дисперсия времени ожидания;

HE_2 – гиперэрланговское распределение второго порядка;

HE_2^- – сдвинутое гиперэрланговское распределение второго порядка;

G – произвольный закон распределения;

M – экспоненциальный закон распределения;

M^- – сдвинутый экспоненциальный закон распределения;

\bar{W} – среднее время ожидания в очереди;

$W^*(s)$ – преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания;

$W(y)$ – ФРВ времени ожидания требования в очереди;

z – любое число из интервала $(-1, 1)$;

λ – интенсивность входного потока;

λ_1 – первый параметр гиперэрланговского распределения входного потока;

λ_2 – второй параметр гиперэрланговского распределения входного потока;

μ – интенсивность обслуживания и параметр экспоненциального распределения;

ρ – коэффициент загрузки системы;
 $\bar{\tau}_\lambda$ – средний интервал между поступлениями требований;
 $\bar{\tau}_\lambda^2$ – второй начальный момент интервала между поступлениями требований;
 $\bar{\tau}_\mu$ – среднее время обслуживания;
 $\bar{\tau}_\mu^2$ – второй начальный момент времени обслуживания;
 $\Phi_+(s)$ – преобразование Лапласа ФРВ времени ожидания;
 $\psi_+(s)$ – первая компонента спектрального разложения;
 $\psi_-(s)$ – вторая компонента спектрального разложения.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена анализу СМО $HE_2/M/1$ с обычными и со сдвинутыми гиперэрланговскими (HE_2) и экспоненциальными (M) входными распределениями. В открытом доступе автору не удалось обнаружить результаты для среднего времени ожидания требований в очереди в таких СМО. Как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания является главной характеристикой для любых СМО. По этой характеристике, например, оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при их моделировании с помощью СМО. Рассматриваемая СМО с обычными входными распределениями $HE_2/M/1$ относится к типу $G/M/1$, а СМО со сдвинутыми распределениями относится к типу $G/G/1$.

В теории массового обслуживания исследования систем $G/M/1$ и $G/G/1$ актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телеграфика, к тому же до сих пор не существует решения для таких систем в конечном виде для общего случая.

В исследовании систем $G/G/1$ важную роль играет метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли и большинство результатов в теории массового обслуживания получены именно с помощью данного метода.

Объектом исследования является СМО типа $G/M/1$ и $G/G/1$.

Предметом исследования является среднее время ожидания в системах $HE_2/M/1$ и $HE_2/M^*/1$.

Целью работы является получение решения в замкнутой форме для основной характеристики системы – среднего времени ожидания требований в очереди для вышеперечисленных СМО.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе автора [1] впервые приведены результаты по исследованию систем с гиперэкспоненциальными и экспоненциальными входными распределениями,

полученные с помощью метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ). Результаты работы [1] позволяют развить теорию данного метода также на гиперэрланговское распределение.

Одна из форм интегрального уравнения Линдли выглядит так [2, 3]:

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u) dC(u), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

При кратком изложении метода спектрального разложения решения ИУЛ будем придерживаться подхода и символики автора классики теории массового обслуживания [2]. Суть решения ИУЛ методом спектрального разложения состоит в нахождении закона распределения времени ожидания через следующее спектральное разложение: $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$, где $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ некоторые рациональные функции от s , которые можно разложить на множители. Функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям согласно [2]:

- для $\text{Re}(s) > 0$ функция $\psi_+(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости;
- для $\text{Re}(s) < D$ функция $\psi_-(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где D – некоторая положительная константа, определяемая из условия: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} < \infty$.

Кроме того, функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1. \quad (2)$$

В работе ставится задача нахождения решения для времени ожидания требований в очереди в СМО $HE_2/M/1$ и $HE_2/M^*/1$. Для решения задачи необходимо вначале построить для указанных систем спектральные разложения вида $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ с учетом условий (1), (2) в каждом случае.

2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли впервые подробно представлен в классике теории массового обслуживания [2], а впоследствии применялся во многих работах, включая [3,4]. Аналогичный подход к решению ИУЛ использован в [5]. Здесь вместо термина «спектральное разложение» использована факторизация, а вме-

сто функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ – компоненты факторизации $\omega_+(z, t)$ и $\omega_-(z, t)$ функции $1 - z \cdot \chi(t)$.

Такой подход для получения конечных результатов для рассматриваемых систем менее удобен, чем подход, описанный в [2] и проиллюстрированный многочисленными примерами.

В работе [6] автора впервые представлены результаты анализа СМО со сдвинутыми экспоненциальными распределениями.

Практическое применение метода спектрального разложения решения ИУЛ для исследования систем с гиперэкспоненциальными и экспоненциальными входными распределениями показано в работах [7–9]. В то же время, научной литературе, включая web-ресурсы, автору не удалось обнаружить результаты по времени ожидания для СМО с экспоненциальными и гиперэрланговскими входными распределениями 2-го порядка общего вида.

Аппроксимативные методы относительно законов распределений подробно описаны в работах [11–13], а похожие исследования в теории массового обслуживания в последнее время проведены в [14–17]

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для системы HE₂/M/1 законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида:

$$a(t) = 4p\lambda_1^2 t e^{-2\lambda_1 t} + 4(1-p)\lambda_2^2 t e^{-2\lambda_2 t}, \quad (3)$$

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}. \quad (4)$$

Решение для среднего времени ожидания для системы HE₂/M/1 будем строить на основе классического метода спектрального разложения решения ИУЛ, как это показано в [6–9]. Такой подход позволяет определить не только среднее время ожидания, но и моменты высших порядков времени ожидания. С учетом определения вариации задержки – джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения [10], тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию времени ожидания.

Преобразования Лапласа функций (3) и (4) будут соответственно:

$$A^*(s) = p \left(\frac{2\lambda_1}{s+2\lambda_1} \right)^2 + (1-p) \left(\frac{2\lambda_2}{s+2\lambda_2} \right)^2; \quad B^*(s) = \frac{\mu}{s+\mu}.$$

Тогда спектральное разложение решения ИУЛ для системы HE₂/M/1 $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ примет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[p \left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 - s} \right)^2 + (1-p) \left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2 - s} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right) - 1.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, представим в виде:

$$\begin{aligned} & \left[p \left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 - s} \right)^2 + (1-p) \left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2 - s} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{p(16\lambda_1^2\lambda_2^2 - 16\lambda_1^2\lambda_2s + 4\lambda_1^2s^2)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2} + \\ & + \frac{(1-p)(16\lambda_1^2\lambda_2^2 - 16\lambda_1\lambda_2^2s + 4\lambda_2^2s^2)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2} = \\ & = \frac{a_0 - a_1s + a_2s^2}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2}, \end{aligned}$$

где промежуточные параметры $a_0 = 16\lambda_1^2\lambda_2^2$, $a_1 = 16\lambda_1\lambda_2[p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2]$, $a_2 = 4[p\lambda_1^2 + (1-p)\lambda_2^2]$.

Продолжая разложение, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} &= \frac{\mu(a_0 - a_1s + a_2s^2) - (2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu + s)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu + s)} = \\ &= \frac{-s(s^4 + c_3s^3 + c_2s^2 + c_1s + c_0)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu + s)} = \\ &= \frac{-s(s + s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu + s)}. \end{aligned}$$

Окончательно, спектральное разложение решения ИУЛ для системы HE₂/M/1 имеет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s + s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu + s)}. \quad (5)$$

Многочлен четвертой степени в числителе разложения

$$s^4 + c_3s^3 + c_2s^2 + c_1s + c_0 \quad (6)$$

с коэффициентами: $c_0 = a_1\mu + 16\lambda_1\lambda_2[\lambda_1\lambda_2 - \mu(\lambda_1 + \lambda_2)]$, $c_1 = 4\mu(\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2) - 16\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) - a_2\mu$, $c_2 = 4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 16\lambda_1\lambda_2 - 4\mu(\lambda_1 + \lambda_2)$, $c_3 = \mu - 4(\lambda_1 + \lambda_2)$ имеет один действительный отрицательный корень и три положительных корня (либо вместо последних один действительный положительный и два комплексно сопряженных с положительной вещественной частью). Исследование знака младшего коэффициента c_0 показывает, что $c_0 < 0$ всегда в случае стабильной системы, когда $0 < p < 1$. Это также подтверждает предположение о наличии таких корней многочлена.

Далее, с учетом условий (1) и (2) строим рациональные функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$:

$\psi_+(s) = s(s + s_1)/(\mu + s)$, т.к. нули многочлена (6): $s = 0$, $s = -s_1$, и полюс $s = -\mu$ лежат в области $\text{Re}(s) \leq 0$, а за функцию $\psi_-(s) = -\frac{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2}{(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}$, т.к. ее нули и полюсы лежат в области $\text{Re}(s) < D$, определенной условием (1). Выполнение условий (1) и (2) спектрального разложения для построенных функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ очевидно, что также подтверждается рис. 1.

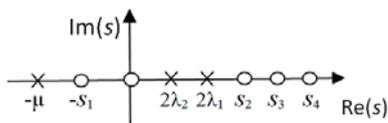


Рисунок 1 – Нули и полюсы функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ для системы НЕ₂/М/1

При построении этих функций удобнее нули и полюса отношения $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ отметить на комплексной s – плоскости для исключения ошибок построения функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$. На рисунке полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

Далее по методике спектрального разложения найдем константу K :

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s + s_1)}{(s + \mu)} = \frac{s_1}{\mu},$$

где s_1 – абсолютное значение отрицательного корня $-s_1$. Постоянная K определяет вероятность того, что поступающее в систему требование заставит ее свободной.

Для нахождения преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания построим функцию $\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{s_1(s + \mu)}{\mu(s + s_1)}$.

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания $W^*(s) = s \cdot \Phi_+(s)$ будет равно

$$W^*(s) = \frac{s_1(s + \mu)}{\mu(s + s_1)}. \quad (7)$$

Для нахождения среднего времени ожидания найдем производную от функции $W^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$:

$$\bar{W} = -\left. \frac{dW^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{-\mu s_1^2 + \mu^2 s_1}{\mu^2 s_1^2} = \frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mu}.$$

Окончательно, среднее время ожидания для системы НЕ₂/М/1

$$\bar{W} = 1/s_1 - 1/\mu. \quad (8)$$

Из выражения (7) также можно определить моменты высших порядков времени ожидания. Вторая производная от преобразования (7) в точке $s = 0$ дает второй начальный момент времени ожидания, что позволяет определить дисперсию времени ожидания:

$$D_W = \frac{2}{s_1} \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mu} \right).$$

Для практического применения выражения (8) необходимо определить числовые характеристики распределения (3) НЕ₂. Для распределения (4) эти характеристики известны из курса теории вероятностей. Для этого воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до второго порядка для распределения (3):

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}, \quad (9)$$

$$\bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{3}{2} \left[\frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{(1-p)}{\lambda_2^2} \right]. \quad (10)$$

Рассматривая равенства (9) и (10) как запись метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (3) λ_1, λ_2, p . Система двух уравнений (9), (10) при этом является недоопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации:

$$c^2 = \frac{\bar{\tau}_\lambda^2 - (\bar{\tau}_\lambda)^2}{(\bar{\tau}_\lambda)^2}, \quad (11)$$

как связующее условие между (9) и (10). Кроме того, коэффициент вариации будем использовать в расчетах в качестве входного параметра системы. Исходя из вида уравнения (9) положим

$$\lambda_1 = 2p/\bar{\tau}_\lambda, \quad \lambda_2 = 2(1-p)/\bar{\tau}_\lambda \quad (12)$$

и потребуем выполнения условия (11). Подставив выражения (9), (10) и частное решение (12) в (11) и решив полученное уравнение четвертой степени относительно параметра p , выберем одно нужное значение с учетом условия $0 < p < 1$:

$$p = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2(1+c_\lambda^2)-3}{8(1+c_\lambda^2)}}. \quad (13)$$

Отсюда следует, что коэффициент вариации $c_\lambda > 1/\sqrt{2}$. Таким образом, получено частное решение не доопределенной системы уравнений (9) и (10) методом подбора.

Такой же подход к аппроксимации законов распределения гиперэкспоненциальным распределением применен в работах автора [6–9]. Таким образом, гиперэрланговский закон распределения второго порядка может определяться полностью двумя первыми моментами и перекрывать весь диапазон изменения коэффициента вариации от $1/\sqrt{2}$ до ∞ , что шире, чем у гиперэкспоненциального распределения $(1, \infty)$.

Величины $\bar{\tau}_\lambda$, $\bar{\tau}_\mu$, c_λ , c_μ будем считать входными параметрами для расчета среднего времени ожидания для системы $HE_2/M/1$. Тогда алгоритм расчета сведется к последовательному определению параметров распределения (3) из выражений (13), (12) и к нахождению нужного корня многочлена (6), а затем к использованию расчетного выражения (8).

Далее рассмотрим принципиально отличающуюся от исследованной СМО систему. Для системы $HE_2/M/1$ со сдвинутыми законами распределений интервалов входного потока и времени обслуживания эти законы задаются функциями плотности вида:

$$a(t) = 4p\lambda_1^2(t-t_0)e^{-2\lambda_1(t-t_0)} + 4(1-p)\lambda_2^2(t-t_0)e^{-2\lambda_2(t-t_0)}, \quad (14)$$

$$b(t) = \mu e^{-\mu(t-t_0)}. \quad (15)$$

Такую СМО в отличие от обычной системы обозначим как $HE_2/M/1$. В работе автора [6] система со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями обозначена как система с запаздыванием. Сдвиг во времени экспоненциального распределения трансформирует систему $HE_2/M/1$ типа G/M/1 в систему типа G/G/1.

Утверждение. Спектральные разложения решения ИУЛ $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \Psi_+(s)/\Psi_-(s)$ для систем $HE_2/M/1$ и $HE_2/M/1$ полностью совпадают и имеют вид (5).

Доказательство. Преобразования Лапласа функций (14) и (15) будут соответственно:

$$A^*(s) = \left[p \left(\frac{2\lambda_1}{s+2\lambda_1} \right)^2 + (1-p) \left(\frac{2\lambda_2}{s+2\lambda_2} \right)^2 \right] \cdot e^{-t_0 s};$$

$$B^*(s) = \frac{\mu e^{-t_0 s}}{s+\mu}.$$

Спектральное разложение решения ИУЛ для системы $HE_2/M/1$ $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)}$ примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} &= \left[p \left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1-s} \right)^2 + (1-p) \left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2-s} \right)^2 \right] e^{t_0 s} \times \\ &\times \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right) e^{-t_0 s} - 1 = \\ &= \left[p \left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1-s} \right)^2 + (1-p) \left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2-s} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right) - 1. \end{aligned}$$

Здесь экспоненты из-за противоположных знаков обнуляются и тем самым операция сдвига нивелируется. Следовательно, спектральные разложения для систем $HE_2^-/M^-/1$ и $HE_2/M/1$ полностью совпадают и имеют вид (5). Утверждение доказано.

Таким образом, по системе $HE_2^-/M^-/1$ мы полностью можем воспользоваться полученными выше результатами для системы $HE_2/M/1$, но с измененными числовыми характеристиками сдвинутых распределений (14) и (15).

Определим числовые характеристики интервала между поступлениями требований и времени обслуживания для новой системы $HE_2^-/M^-/1$. Для этого воспользуемся преобразованием Лапласа функций (14) и (15).

Значение первой производной функции $A^*(s)$ со знаком минус в точке $s=0$ равно

$$-\left. \frac{dA^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0.$$

Отсюда среднее значение интервалов между соседними требованиями входного потока будет равно

$$\bar{\tau}_\lambda = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0. \quad (16)$$

Значение второй производной функции $A^*(s)$ в точке $s=0$ дает второй начальный момент интервала поступления

$$\bar{\tau}_\lambda^2 = t_0^2 + 2t_0 \left[\frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2} \right] + \frac{3p}{2\lambda_1^2} + \frac{3(1-p)}{2\lambda_2^2}. \quad (17)$$

Отсюда определим квадрат коэффициента вариации интервалов поступления:

$$c_\lambda^2 = \frac{\lambda_1^2 - 2p\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) + p(1-2p)(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{2[\lambda_1 - p(\lambda_1 - \lambda_2) + t_0\lambda_1\lambda_2]^2}. \quad (18)$$

Для определения числовых характеристик распределения (4) воспользуемся результатами [1].

Среднее время обслуживания в системе $HE_2^-/M^-/1$ равно

$$\bar{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0. \quad (19)$$

Второй начальный момент времени обслуживания равен

$$\bar{\tau}_\mu^2 = t_0^2 + \frac{2t_0}{\mu} + \frac{2}{\mu^2}. \quad (20)$$

Отсюда коэффициент вариации времени обслуживания будет равен

$$c_\mu = (1 + \mu t_0)^{-1}. \quad (21)$$

Заметим, что коэффициенты вариации $c_\lambda > 0$ и $c_\mu < 1$ при параметре сдвига $t_0 > 0$. Таким образом, очевидно, что система $HE_2^-/M^-/1$ относится к типу $G/G/1$.

Рассматривая выражения (16)–(21) как форму записи метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (14) и (15): $\lambda_1, \lambda_2, p, t_0, \mu$. Нахождение параметров распределения (14) λ_1, λ_2, p будет аналогичным нахождению этих параметров для распределения (3). Теперь исходя из вида уравнения (16) положим

$$\lambda_1 = 2p / (\bar{\tau}_\lambda - t_0), \quad \lambda_2 = 2(1-p) / (\bar{\tau}_\lambda - t_0) \quad (22)$$

и потребуем выполнения условия (18). Подставив частное решение (22) в (18) решаем полученное уравнение четвертой степени относительно параметра p с учетом условия $0 < p < 1$ и выберем нужное решение

$$p = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{8[(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2]}}$$

а затем определяем из (22) параметры λ_1 и λ_2 .

Остается определить параметры распределения (15) из уравнений моментов (19)–(21). Из (19) получим значение $t_0 = \bar{\tau}_\mu - \mu^{-1}$ и подставив его в (21) найдем параметр распределения (15) $\mu = 1 / c_\mu \bar{\tau}_\mu$. Тогда параметр сдвига будет связан с параметрами обслуживания условием

$$t_0 = \bar{\tau}_\mu (1 - c_\mu). \quad (23)$$

Выражение (23) будет определять диапазон изменения параметра сдвига $t_0 \in (0, 1)$.

Задавая значения $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu$ в качестве входных параметров системы, таким образом определяем известным методом моментов все неизвестные параметры распределений (14) и (15).

Теперь рассмотрим влияние параметра сдвига на коэффициенты вариаций распределений. Для обычного распределения HE_2 , как следует из выражений (9)–(11), получим:

$$c_\lambda^2 = \frac{\lambda_1^2 - 2p\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) + p(1-2p)(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{2[\lambda_1 - p(\lambda_1 - \lambda_2)]^2}.$$

Сравнивая последнее выражение с (18) убеждаемся, что параметр сдвига во времени $t_0 > 0$ уменьшает коэффициент вариации интервалов поступлений в $1 + \frac{t_0 \lambda_1 \lambda_2}{[\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p]}$ раз. Аналогично для экспоненци-

ального закона времени обслуживания, параметр сдвига уменьшает коэффициент вариации времени обслуживания в $1 + \mu t_0$ раз. Учитывая квадратичную зависимость среднего времени ожидания от коэффициентов вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания, убеждаемся в том, что введение параметра сдвига в законы распределения, уменьшает среднее время ожидания в очереди в СМО.

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Ниже в табл. 1 приведены данные расчетов для системы $HE_2/M/1$ для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$. Для сравнения в правой колонке приведены данные для системы $H_2/M/1$, для которой $c_\lambda \geq 1$ [1].

Таблица 1 – Результаты экспериментов для СМО $HE_2/M/1$ в сравнении с $H_2/M/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания	
ρ	c_λ	для системы $HE_2/M/1$	для системы $H_2/M/1$
0,1	0,71	0,03	–
	2	0,08	0,19
	4	0,10	0,23
	8	0,11	0,25
0,5	0,71	0,62	–
	2	2,00	2,16
	4	4,62	4,83
	8	10,15	10,40
0,9	0,71	6,61	–
	2	22,59	22,41
	4	77,28	75,79
	8	295,96	289,13

Значения среднего времени ожидания в системах $HE_2/M/1$ и $H_2/M/1$ достаточно близки при средней и высокой нагрузке систем, хотя моменты распределений (начиная со второго) HE_2 и H_2 разнятся. Заметим, что системы $H_2/M/1$ справедлива только при $c_\lambda \geq 1$ и $c_\mu = 1$, потому в табл. 1 для $c_\lambda < 1$ стоят прочерки.

В табл. 2 приведены результаты экспериментов для системы $HE_2^-/M^-/1$, а для сравнения в правой колонке приведены данные для обычной системы $HE_2/M/1$.

Коэффициент загрузки ρ в обеих таблицах определяется отношением средних интервалов $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$. Расчеты, приведенные в табл. 1–2 проведены для нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$.

Таблица 2 – Результаты экспериментов для СМО $HE_2/M^-/1$ и $HE_2/M/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания			
ρ	c_μ c_λ	для системы $HE_2/M^-/1$			для системы $HE_2/M/1$
		$c_\mu = 0,1$ ($t_0=0,9$)	$c_\mu = 0,5$ ($t_0=0,5$)	$c_\mu = 0,99$ ($t_0=0,01$)	
0,1	0,71	0,000	0,005	0,029	0,03
	2	0,000	0,013	0,078	0,08
	4	0,000	0,016	0,094	0,10
	8	0,000	0,017	0,099	0,11
0,5	0,71	0,005	0,181	0,610	0,62
	2	0,008	0,458	1,966	2,00
	4	0,009	0,599	4,503	4,62
	8	0,009	0,655	9,706	10,15
0,9	0,71	0,344	2,956	6,516	6,61
	2	0,805	16,002	22,465	22,59
	4	1,102	60,607	77,044	77,28
	8	1,260	238,99	295,29	295,96

Данные табл. 2 полностью подтверждают сделанные выше предположения о среднем времени ожидания в системе с запаздыванием. Кроме того, с уменьшением параметра сдвига t_0 среднее время ожидания в системе с запаздыванием стремится к значению этого времени в обычной системе, что дополнительно подтверждает адекватность полученных результатов.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для двух систем $HE_2/M/1$ и $HE_2/M^-/1$, с помощью которых выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди для этих систем в замкнутой форме. Результаты расчетов сравниваются с результатами аналогичной системы $H_2/M/1$.

Диапазон изменения параметров у пары $HE_2/M/1$ и $HE_2/M^-/1$ шире, чем у пары $H_2/M/1$ и $H_2/M^-/1$, поэтому указанные системы с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика.

6 ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты расчетов подтверждают тот факт, что введение параметра сдвига $t_0 > 0$ в законы распределения приводит к качественно новой системе массового обслуживания, обладающей преимуществами перед обычной системой. В первую очередь это расширение диапазона применимости новой системы. Кроме этого, система с запаздыванием обеспечивает меньшую задержку по сравнению с обычной системой.

ВЫВОДЫ

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемых систем и с их помощью выведены расчетные выражения для среднего времени ожида-

ния в очереди для этих систем в замкнутой форме. Эти выражения расширяют и дополняют известные формулы теории массового обслуживания для среднего времени ожидания для систем типа $G/M/1$ и $G/G/1$ с произвольными законами распределений входного потока и времени обслуживания.

Практическое значение работы заключается в том, что полученные результаты с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого необходимо знать числовые характеристики интервалов входящего трафика и времени обслуживания на уровне двух первых моментов, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика [8, 9].

Перспективы дальнейших исследований просматриваются в продолжении исследования систем типа $G/M/1$ и $G/G/1$ с другими общими входными распределениями и в расширении и дополнении формул для среднего времени ожидания.

ЛИТЕРАТУРА / LITERATURA

1. Тарасов В. Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями / В. Н. Тарасов // Проблемы передачи информации. – 2016. – № 1. – С. 16–26.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. под редакцией В. И. Неймана / Л. Клейнрок. – М. : Машиностроение, 1979. – 432 с.
3. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems / N. Brannstrom. – Applied to HS-DSSS, Lulea university of technology, 2004. – 79 p.
4. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods / W. Whitt // Operation Research. – 1982. – № 1. – P. 125–147.
5. Бочаров П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М. : Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
6. Тарасов В. Н. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием / В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева, И. А. Блатов // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 11. – С. 51–59.
7. Тарасов В. Н. Определение среднего времени ожидания требований в управляемой системе массового обслуживания $H_2/H_2/1$ / В. Н. Тарасов, И. В. Карташевский // Системы управления и информационные технологии. – 2014. – № 3(57). – С. 92–96.
8. Анализ входящего трафика на уровне трех моментов распределений временных интервалов / [В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева, Г. А. Горелов, С. В. Малахов] // Информационные технологии. – 2014. – № 9. – С. 54–59.
9. Тарасов В. Н. Математическая модель трафика с тяжелохвостным распределением на основе системы массового обслуживания $H_2/M/1$ / В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева, Г. А. Горелов // Инфокоммуникационные технологии. – 2014. – № 3. – С. 36–41.
10. [HTTPS://tools.ietf.org/html/rfc3393](https://tools.ietf.org/html/rfc3393). RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (дата обращения: 26.02.2016).
11. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals / A. Myskja // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers. – 1991. – P. 683–688.

12. Алиев Т. И. Основы моделирования дискретных систем / Т. И. Алиев. – СПб : СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.
13. Алиев Т. И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания / Т. И. Алиев // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – № 2(84). – С. 88–93.
14. Aras A. K. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment / A. K. Aras, X. Chen & Y. Liu // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89, No. 1. – P. 81–125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
15. Jennings O. B. Comparisons of ticket and standard queues / O. B. Jennings & J. Pender // Queueing Systems. – 2016. – Vol. 84, No. 1. – P. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
16. Gromoll H. C. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times / H. C. Gromoll, B. Terwilliger & B. Zwart // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89, No. 3. – P. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
17. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates / B. Legros // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89, No. 3. – P. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>

Received 25.09.2018.
Accepted 11.12.2018.

УДК 621.391.1: 621.395

Тарасов В. Н. – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри програмного забезпечення та управління в технічних системах Поволзького державного університету телекомунікацій та інформатики, Росія.

АНАЛИЗ ДВОХ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ $HE_2/M/1$ ЗІ ЗВИЧАЙНИМИ ТА ЗСУНУТИМИ ВХІДНИМИ РОЗПОДІЛАМИ

АНОТАЦІЯ

Актуальність. В теорії масового обслуговування дослідження систем $G/M/1$ і $G/G/1$ актуальні у зв'язку з тим, що на сьогодні не існує рішення в кінцевому вигляді для загального випадку при довільних законах розподілів вхідного потоку і часу обслуговування. Розглянуто задачу виведення рішення для середнього часу очікування в черзі в замкнутій формі для двох систем зі звичайними і зі зсунутими гіперерлангівськими та експонентними вхідними розподілами.

Мета роботи. Отримання рішення для основної характеристики системи – середнього часу очікування вимог в черзі для двох систем масового обслуговування типу $G/M/1$ і $G/G/1$ зі звичайними та зі зсунутими гіперерлангівськими та експонентними вхідними розподілами.

Метод. Для вирішення поставленого завдання використано класичний метод спектрального розкладання розв'язку інтегрального рівняння Ліндлі. Цей метод дозволяє отримати розв'язок для середнього часу очікування для розглянутих систем в замкнутій формі. Метод спектрального розкладання розв'язку інтегрального рівняння Ліндлі грає важливу роль в теорії систем $G/G/1$. Для практичного застосування отриманих результатів було використано відомий метод моментів теорії ймовірностей.

Результати. Вперше отримано спектральні розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндлі для двох систем, за допомогою яких виведені розрахункові формули для середнього часу очікування в черзі в замкнутій формі.

Висновки. Отримано спектральні розкладання розв'язку інтегрального рівняння Ліндлі для розглянутих систем, та з їх допомогою виведені розрахункові формули для середнього часу очікування в черзі для цих систем в замкнутій формі. Ці формули розширюють і доповнюють відомі формули теорії масового обслуговування для середнього часу очікування для систем $G/M/1$ і $G/G/1$ з довільними законами розподілів вхідного потоку і часу обслуговування. Такий підхід дозволяє розраховувати середній час очікування для зазначених систем в математичних пакетах для широкого діапазону зміни параметрів трафіку. Всі інші характеристики систем є похідними часу очікування.

Крім середнього часу очікування, такий підхід дає можливість також визначити моменти вищих порядків часу очікування. З огляду на той факт, що варіація затримки пакетів (джиттер) в телекомунікації визначається як дисперсія часу очікування від його середнього значення, то джиттер можна буде визначити через дисперсію часу очікування.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гіперерлангівський та експонентний закони розподілу, інтегральне рівняння Ліндлі, метод спектрального розкладання, перетворення Лапласа.

UDC 621.391.1:621.395

THE ANALYSIS OF TWO QUEUING SYSTEMS $HE_2/M/1$ WITH ORDINARY AND SHIFTED INPUT DISTRIBUTIONS

Tarasov V. N. – Dr. Sc., Professor, Head of Department of Software and Management in Technical Systems of Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation.

ABSTRACT

Context. In queuing theory, $G/M/1$ and $G/G/1$ systems research is relevant in that there is still no solution in the final form for the general case for arbitrary laws of distributions of the input flow and service time. The problem of finding a solution for the average waiting time in queue in a closed form for two systems with ordinary and shifted hypererlangian and exponential input distributions is considered.

Objective. Obtaining a solution for the main system characteristic – the average waiting time in queue for two queuing systems of type $G/M/1$ and $G/G/1$ with ordinary and shifted hypererlangian and exponential input distributions.

Method. To solve this problem, we used the classical method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation. This method allows to obtaining a solution for the average waiting time for systems under consideration in a closed form. The method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation plays an important role in the theory of systems $G/G/1$. For the practical application of the results obtained, the well-known method of moments of probability theory is used.

Results. The spectral decompositions of the solution of the Lindley integral equation for a pair of dual systems are for the first time received, with the help of which the formulas for the average waiting time in a closed form are derived.

Conclusions. The spectral expansions of the solution of the Lindley integral equation for the systems under consideration are obtained and with their help the formulas for the average waiting time in the queue for these systems in a closed form are derived. These expressions expand and supplement the known queuing theory formulas for the average waiting time for G/M/1 and G/G/1 systems with arbitrary laws distributions of input flow and service time. This approach allows us to calculate the average latency for these systems in mathematical packages for a wide range of traffic parameters. All other characteristics of the systems are derived from the waiting time. In addition to the average waiting time, such an approach makes it possible to determine also moments of higher orders of waiting time. Given the fact that the packet delay variation (jitter) in telecommunications is defined as the spread of the waiting time from its average value, the jitter can be determined through the variance of the waiting time.

KEYWORDS: hypererlangian and exponential distribution laws, Lindley integral equation, spectral decomposition method, Laplace transform.

REFERENCES

1. Tarasov V. N. Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions, *Problems of Information Transmission*, 2016, Vol. 52, No. 1, pp. 14–23. DOI:10.1134/S0032946016010038
2. Kleinrock L. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya*. Moscow, Mashinostroenie Publ, 1979, 432 p.
3. Brannstrom N.A. Queuing Theory analysis of wireless radio systems. Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004, 79 p.
4. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods, *Operation Research*, 1982, Vol. 30, No. 1, pp. 125–147.
5. Bocharov P. P., Pechinkin A. V. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya*. Moscow, Publishing House of Peoples' Friendship University, 1995, 529 p.
6. Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Blatov I. A. Analysis and calculation of queuing system with delay, *Automation and Remote Control*, 2015, No. 11, pp. 1945–1951. DOI: 10.1134/S0005117915110041
7. Tarasov V. N., Kartashevskiy I. V. Opreделение srednego vremeni ozhidaniya trebovaniy v upravliaemoy sisteme massovogo obsluzhivaniya $H_2/H_2/1$, *Sistemy upravleniya i informatsionnye tehnologii*, 2014, No. 3, pp. 92–95.
8. Tarasov V. N., Bahareva N. F., Gorelov G. A., Malakhov S. V. Analiz vkhodiashego trafika na urovne treh momentov raspredeleniy. *Informacionnye tehnologii*, 2014, No. 9, pp. 54–59.
9. Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Gorelov G. A. Matematicheskaya model trafika s tiazhelohvoctnymi raspredeleniyami na osnove sistemy massovogo obsluzhivaniya $H_2/M/1$, *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2014, No. 3, pp. 36–41.
10. RFC 3393 [IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM)] Available at: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. (accessed: 26.02.2016).
11. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and datatraffic in a Period of Change*. ITC-13. Elsevier Science Publishers, 1991, pp. 683–688.
12. Aliev T. I. *Osnovy modelirovaniya diskretnykh system*. SPb.: SPbGU ITMO, 2009, 363 p.
13. Aliev T. I. Approksimaciya veroyatnostnykh raspredeleniy v modelyah massovogo obsluzhivaniya, *Nauchno-tekhnicheskij vestnik informacionnykh tehnologij, mekhaniki i optiki*, 2013, Vol. 84, No. 2, pp. 88–93.
14. Aras A.K., Chen X. & Liu Y. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 1, pp. 81–125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
15. Jennings O. B. & Pender J. Comparisons of ticket and standard queues, *Queueing Systems*, 2016, Vol. 84, No. 1, pp. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
16. Gromoll H. C., Terwilliger B. & Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 3, pp. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
17. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 3, pp. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>