УДК 004.942

АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ ПОЧАТКОВОЇ ТОЧКИ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ЗА МЕТОДОМ МОЖЛИВИХ НАПРЯМКІВ

Кряжич О. О. – канд. техн. наук, науковий співробітник Інституту технології і бізнесу в Чеських Будейовицях, Чеські Будейовиці, Чеська Республіка.

Трофимчук О. М. – д-р техн. наук, професор, чл.-кор. НАН України, директор Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна.

Коваленко О. В. – канд. техн. наук, завідувач лабораторії фізико-технічних проблем джерел ядерних випромінювань відділу ЦЕПАЕ Інституту ядерних досліджень НАН України, Київ, Україна.

АНОТАЦІЯ

Актуальність. Розглянута задача визначення початкової точки при виконанні методу можливих напрямків Дж. Зойтендейка, а саме: випадок, коли така точка може бути довільною або, взагалі, невідомою. Наведене дозволяє визначити подальший напрямок руху таким чином, що при мінімальній кількості точок дослідження отримати максимально точний результат. Рішення представленої задачі відноситься до опису складних поверхонь, які можуть бути представлені яружною функцією. Визначення початкової точки використовується в практиці моделювання розвитку екологічних ризиків при техногенному забрудненні складних пересічних територій.

Мета. Метою даної роботи є вирішення задачі вибору початкової точки при використанні методу можливих напрямків для опису складної поверхні яружною функцією.

Метод. В роботі використано метод Дж. Зойтендейка для вирішення задач чебишовського наближення.

Результати. Представлений алгоритм визначення початкової точки для задачі з лінійними обмеженнями. Наведено підхід для вирішення складних задач представлення яружних функцій з мінімально можливою кількістю ітерацій. Результати математичного моделювання перевірені на практиці опису забрудненої території радіоізотопом водню – тритієм.

Висновки. Запропонований підхід до визначення початкової точки при виконанні розрахунків з використанням методу можливих напрямків Дж. Зойтендейка, який дозволяє обрати точку, побудувати з неї вектор руху з заданим кроком і визначити за напрямком вектору другу точку для побудови наступного кроку. При цьому враховуються обмеження, зокрема – значення у кожній новій точці повинно бути виражене невід'ємним числом. Для наведених нормалізацій є ряд особливостей, які слід враховувати при розрахунках та побудові алгоритмів вирішення прикладних задач за запропонованим підходом. Так, деякі ітерації можуть призвести до більшого обсягу розрахунків та перетворень над кожною з ітерацій, проте кількість ітерацій менше у порівнянні з іншими типами ітерацій. Це залежить від розмірів задачі та кількості обмежень у кожному випадку. Наведене може бути використане при розробці методів, моделей та алгоритмів опису пересічених територій для вирішення задач візуалізації процесу та прогнозування техногенного забруднення.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: область, крок, модель, функція, відрізок, вектор, ітерація.

НОМЕНКЛАТУРА

$f(x)$ – безперервна обмежена функція;

α_k – довжина кроку;

$C^1(a,b)$ – клас функцій, безперервних на відрізку $[a,b]$ разом з першою похідною;

$P(x)$ – поліноміальна функція;

X – припустима область досліджень з точками X^n;

$f(t)$ – функція з деякою дискретною множиною точок t_i;

k – поліном заданого ступеню;

X^0 – базисна точка;

S – напрямок руху;

λ – довжина кроку;

ε – величина мінімізації поліному;

Δ – область, на якій отримано мінімізацію поліному;

M – велике невід'ємне число;

β_i – система величин з додатковими обмеженнями до задачі;

$f'(a), f'(b)$ – похідні функції $f(t_i)$.

ВСТУП

В практиці моделювання виникнення та розвитку різноманітних екологічних ризиків техногенного забруднення навколишнього середовища на сильно пересіченій місцевості [1], часто виникає математична задача опису яружною функцією [2]. Вирішення подібної задачі за допомогою апроксимації через лінійні функції призведе до її неадекватності, оскільки у даному випадку існує ряд нелінійних обмежень, які можна подолати за допомогою методів можливих напрямків: проекції градієнту та умовного градієнту [3], опуклий симплексний метод Зангвілла [4] і метод Дж. Зойтендейка [5].

Об'єктом дослідження є метод можливих напрямків Дж. Зойтендейка у розумінні підходу Чебишова для реалізації алгоритму з опису яружною функцією деякої поверхні.

Предметом дослідження є підхід до визначення початкової точки дослідження, з якої будуються наступні кроки за умови зменшення кількості ітерацій.

Метою даної роботи є вирішення задачі вибору початкової точки на місцевості, рельєф якої описується яружною функцією, з використанням методу можливих напрямків Дж. Зойтендейка.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-3-5

Для досягнення поставленої мети необхідне вирішення наступних **задач**:

– описати підхід до вибору базисної точки на прикладі довільної задачі лінійного програмування;

– представити можливість застосування методу Дж. Зойтендейка для вирішення задач чебишовського наближення.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Постановка задачі за методом Дж. Зойтендейка може бути виражена наступним чином: якщо точка x_k знаходиться на межі припустимої області X, то будь-який малий крок $\alpha_k > 0$ в напрямку антиградієнта за методами градієнтного спуску може призвести до неприпустимої точки ($x_k \notin X$). Необхідно обрати мінімально можливий напрямок пошуку у граничній точці x_k з врахуванням всіх обмежень та кута зі спрямуванням антиградієнту в цій точці.

Нехай на проміжку $[a,b]$ задана безперервна обмежена функція $f(x)$. У даному випадку цікавитиме кусочно-поліноміальна функція $P(x) \in C^1(a,b)$, яка найкращим чином наблизить $f(x)$ за підходом Чебишова [6]. Виразом $C^1(a,b)$ буде означений клас функцій, безперервних на відрізку $[a,b]$ разом з першою похідною. Тоді для $P(x)$ матиме місце наступне представлення:

$$\begin{cases} f_1(x) & x \in [a, C_1] \\ f_2(x) & x \in [C_1, C_2] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ f_S(x) & x \in [C_S, b] \end{cases}, \qquad (1)$$

де точки $a = C_0 < C_1 < C_2 < \ldots < C_S < C_{S+1} = b$ приймаються, як невідомі.

Функції $f_i(x)$, $i = \overline{1,S}$ є поліноміальними зі ступенем не менше 2. Тобто, наведена задача у випадку, якщо $f_i(x)$, має однаковий ступінь і є задачею побудови сплайн-функції з фіксованими вузлами [7]. Задача побудови $P(x)$ зводиться до кількох завдань побудови поліномів найкращого наближення $f_i(x)$ [8] до функції $f(x)$ для $x \in [C_i, C_{i+1}]$ $(1 = \overline{0,k})$. Цей факт виходить з принципу оптимальності Беллмана [9]. Тому для вирішення буде розглянута задача побудови полінома найкращого наближення до $f(x)$ на деякому інтервалі з врахуванням того, що поліном задовольняє умови забезпечення відповідної гладкості $P(x)$. Деякі аспекти поставленої задачі розглядалися в роботах [2, 10–13].

2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Слід зазначити, що практичне застосування послідовної апроксимації і оптимізації, було використане Е. Полаком при розробці мінімаксних стратегій [14], що в подальшому знайшло реалізацію для модифікації методу пов'язаних градієнтів для задач необмеженої оптимізації [15–16]. Проте це були стратегії послідовного наближення, відмінні від методу можливих напрямків Дж. Зойтендейка [5] за своїм алгоритмом виконання [14]. У теперішній час з використанням методу Дж. Зойтендейка вирішуються різноманітні задачі з упакування 3D об'єктів або покриття об'єктів геометричними фігурами з встановленими нелінійними обмеженнями [17–22], що використовуються в процесах виготовлення продукції від сучасних електронних носіїв інформації до одягу і взуття, при побудові інженерних споруд, в логістиці, фізиці, хімії, біології, медицині. За допомогою методу Зойтендейка також вирішуються завдання раціонального розподілу ресурсів на прикладі інформаційних ресурсів теле- та радіомовлення [23]. Проте визначним у всіх цих дослідженнях є те, що початкові точки відомі або вибрані з відомих значень у довільному порядку. Детальне вивчення методу можливих напрямків за Зойтендейком розглядають у розумінні підходу Ляпунова [24], як мультикритеріальну оптимізацію за оптимумом Парето [25], з використанням симетрії Пауела [26], а також в порівнянні з методом послідовного квадратичного програмування [27]. Представлена робота розглядається у розумінні підходу Чебишова [28].

3 МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

Поставлену задачу на окремому відрізку можна описати лінійною функцією. Приймаємо, що існує функція $f(t)$ і деяка дискретна множина точок

$$\mathrm{E} = \{Y_0, Y_1 \ldots, Y_{N+1}\} \in [a,b],$$
$$Y_0 = a, \quad Y_{N+1} = b.$$

За умовами, зазначеними вище, слід відшукати поліном заданого ступеню k: $\Pi_k(t) = \sum_{i=0}^{k} x_i t^i$. Цей поліном заданого ступеню мінімізує величину $\varepsilon(x) = \max_{t_i \in \mathrm{E}} |f(t_i) - \Pi_k(t_i)|$ за усіма x з $\Delta \subset \mathrm{E}_{n+1}$, де Δ визначається:

$$\Delta = \left\{ x \in \mathrm{E}_{n+1} : f^{(i)}(a) = \Pi_k^{(i)}(a);\ f^{(i)}(b) = \Pi_k^{(i)}(b);\ i = 0,1 \right\}.$$

Якщо прийняти, що $t_j^i = a_{ij} \left| i = \overline{0,k};\ j = \overline{0,n+1} \right|$, то представлена задача буде еквівалентною наведеній нижче задачі лінійного програмування (2) [29].

В наведеному (2) слід врахувати, що матриця обмежень $A = (a_{ij})$, $i = 0,k$; $j = 0,n+1$ має прямокутний вигляд і кількість рядків домінує над кількістю стовпців, $K << N$. Цю специфіку можна подолати, використовуючи метод можливих напрямків Дж. Зойтендейка [5]. Через те, що метод передбачає наявність нерівно-

DOI 10.15588/1607-3274-2019-3-5

сті, умова (2) та її обмеження мають бути представлені у вигляді нерівностей.

$$\begin{cases} \min \varepsilon \\ \sum_{i=0}^{k} a_{ij} x_i - \varepsilon \le f(Y_i) \\ -\sum_{i=0}^{k} a_{ij} x_i - \varepsilon \le -f(Y_i) \\ \sum_{i=0}^{k} a_{i,0} x_i = f(Y_0) \\ \sum_{i=0}^{k} a_{i,n+1} x_i = f(Y_{n+1}) \\ \sum_{i=1}^{k} i \cdot a_{i-1,0} x_i = f'(Y_0) \\ \sum_{i=1}^{k} i \cdot a_{i-1,n+1} x_i = f'(Y_{n+1}) \\ \varepsilon \ge 0;\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2}$$

Для опису підходу до вибору базисної точки буде розглянута довільна задача лінійного програмування:

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{k} d_j x_j \\ \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le b_i \\ x_j \ge 0,\ i = \overline{1,P};\ j = \overline{1,k}. \end{cases} \tag{3}$$

Використання для рішення градієнтного методу вимагає відшукання точки, яка задовольняє обмеження задачі лінійного програмування. Позначимо її $X^0 = \left(x_1^0, ..., x_k^0\right)$. Тоді для X^0 виконується:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^0 \le b_i, \\ &x_j^0 \ge 0,\quad i = \overline{1,P};\ j = \overline{1,k}. \end{aligned} \tag{4}$$

Ірраціональна процедура знаходження рішення задачі (3) зводиться до наступного:

а) з точки X^0 обираємо напрямок S, за яким величина $\sum_{j=1}^{k} d_j S_j$ має найбільше значення і вектор $S = (S_1, ..., S_k)$ задовольняє обмеження $\sum_{j=1}^{k} P_{ij} S_j \le 0,\ i = \overline{1,P_1}\ (P_1 \le P + K)$, де матриця $P = (P_{ij})$ складена з умов матриці обмежень (3), які для точки X^0 виконуються як рівняння, тобто, для матриці P маємо:

$$\sum_{j=1}^{k} P_{ij} x_j^0 = b_1,\ i = \overline{1,P_1}.$$

На цьому кроці слід також врахувати умову невід'ємного невідомого.

Після обрання напряму S, обираємо довжину кроку λ для переходу у наступну точку X^1, виходячи з умови, що X^1 повинна задовольняти (4);

б) вибір величини λ здійснюємо з відношення:

$$\lambda = \left\{ \min \frac{b_1 - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^0}{\sum_{j=1}^{k} a_{ij} S_j} \middle| \sum_{j=1}^{k} a_{ij} S_j > 0,\quad i = 1, P \right\};$$

в) будуємо точку $X^1 = X^0 + \lambda S$, яка задовольняє умови (4). Величина, на яку збільшилася лінійна форма задачі (3), дорівнює $\lambda \sum_{j=1}^{k} d_j S_j$;

г) повторюються пункти а) і б) відносно точки X^1, та отримується X^2. Це повторюється до того випадку, поки не буде існувати напрям, для якого величина $\sum d_j S_j$ стає від'ємною. Точка, на якій зупинився процес, буде вирішенням задачі (3).

Безпосередньо знаходження напрямку руху – вектору $S = (S_1, ..., S_k)$, – зводиться до рішення наступної задачі математичного програмування:

$$\sum_{j=1}^{k} d_j S_j \to \max, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{k} P_{ij} S_j \le 0,\ \left(i = \overline{1,P_1}\right), \tag{6}$$

до якої слід додати ще одне обмеження (нормалізацію) на вектор $S = (S_1, ..., S_k)$.

Для дослідження обираємо обмеження:

$$\sum_{j=1}^{k} S_j^2 \le 1. \tag{7}$$

Проте таке обмеження збільшує кількість ітерацій, хоча загальна кількість ітерацій за використання такого підходу зменшується. Але можливі і інші варіанти нормалізації. Наприклад, коли:

а) $-1 \le S_j \le 1$;

б) $S_j \le 1$, коли $d_j \ge 0$; $S_j \ge -1$, коли $d_j < 0$, що доводить непотрібність громіздких прийомів нормалізацій інших типів.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-3-5

4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Наведений підхід був використаний для вирішення задачі опису забрудненої території тритієм (рис. 1).

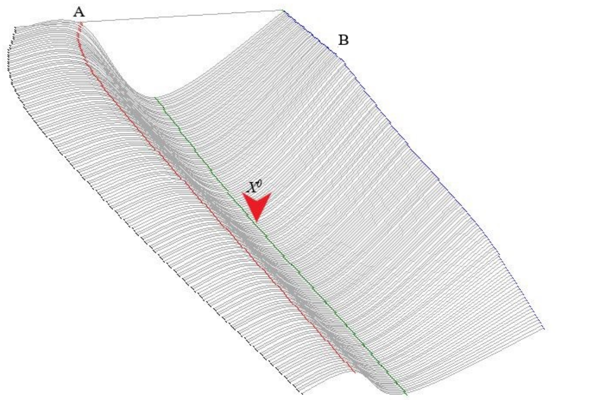


Рисунок 1 – Модель схилу (яру) з обраною точкою X^0

Яр починається більш полого, потім стінки яру стають крутішими. Базисна точка X^0 у цій задачі невідома і обирається за методом [5] довільно з врахуванням (4). У даній практичній задачі така точка обрана посередині між верхньою межею яру, позначеною літерою A та серединною лінією дна B. Напрямок руху обирається за (5)–(6), а обмеженням стає значення (7). В представленій області задано функцію $z = f(x, y)$, і лінію $\varphi(x, y) = 0$, на якій розташована точка X^0. Задача полягає у находженні на цій лінії точок з мінімальним і максимальним значенням, а також на кожній лінії із заданим кроком n, що перетинає перпендикулярно лінію з точкою X^0 точок з максимальним значенням (4).

5 РЕЗУЛЬТАТИ

Задача була реалізована за допомогою мови програмування C#. Результати представлені на рис. 2. Безпосередньо на лінії з точкою X^0 (надалі позначена стрілкою на рис. 2) максимальне і мінімальне значення знаходиться за декілька кроків, бо вирішення цього питання можна представити простою лінійною регресією. А от для аналізу схилу вже робляться кроки знизу (рис. 2а) вгору (рис. 2б) за напрямом вектору $S = (S_1, ..., S_k)$. Чим крутішою стає стінка яру, який досліджується, тим менша кількість ітерацій необхідна для досягнення точки з максимальним значенням показника (рис. 2в).

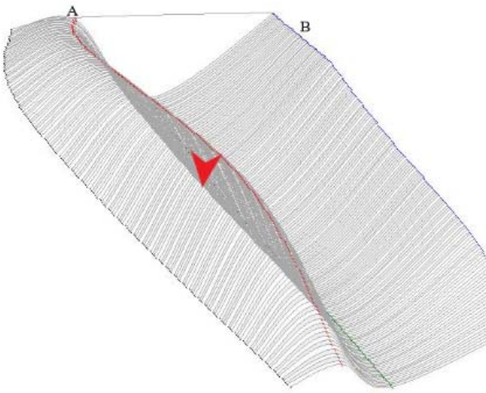
6 ОБГОВОРЕННЯ

На практиці дуже важко буде вибрати деяку точку X^0, яка задовольнятиме (4), то замість задачі (3) можна вирішити задачу, яка у деякому сенсі є еквівалентною задачі (3), тобто застосувати метод можливих напрямків до вирішення задач чебишовського наближення з додатковими обмеженнями:

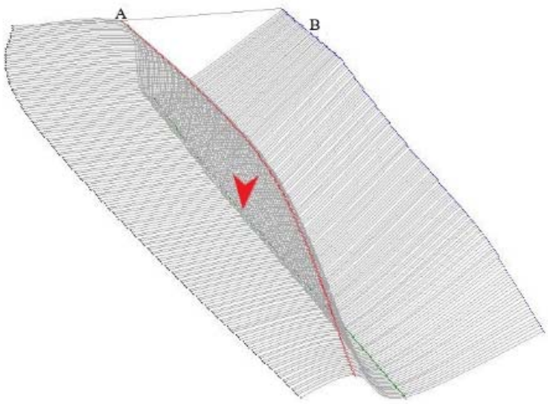
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} d_j x_j - M_{\xi} \to \max, \\ \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j + \beta_i \xi \le b_i \qquad i = \overline{1, P}, \\ x_j \ge 0, \quad \xi \ge 0 \qquad j = \overline{1, K}, \end{cases} \qquad (8)$$

де M є великим невід'ємним числом, а величини визначаються системою

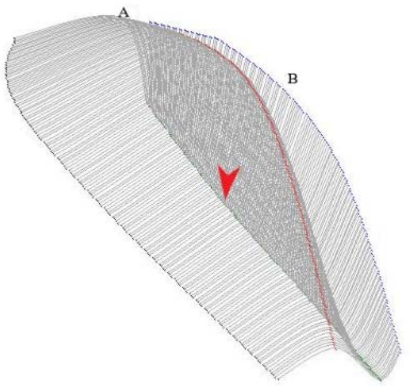
$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } b_i \ge 0, \\ -1, & \text{якщо } b_i < 0, \quad i = \overline{1, P}. \end{cases}$$



а



б



в

Рисунок 2 – Візуальне представлення опису забрудненої території

DOI 10.15588/1607-3274-2019-3-5

Припустімо, значення невідомої ξ дорівнює $\xi_0 = \{\max(-b_i)/b_i < 0, \quad i = \overline{1,P}\}$. У зазначеному випадку вектор $X_\xi^0 = (O_1 O, ... O_1 \xi_0)$ стане початковим вирішенням задачі (8). А якщо область умов, що задана у (4), є не порожньою, то задача (8) матиме оптимальне рішення, а невідома ξ дорівнюватиме 0. Саме тому, у разі отримання від'ємного рішення задачі (8) $X_\xi^{on} = \{X_1^{on}, X_2^{on}, ..., X_k^{on}, O\}$, матимемо і оптимальне рішення задачі (3) $X_{on} = \{X_1^{on}, X_2^{on}, ..., X_k^{on}\}$.

Оскільки при вирішенні наведених вище нерівностей отримання нуля залежить от багатьох факторів, для побудови початкового рішення задачі (2) необхідно зробити додаткові перетворення та розглянути задачу з додатковими обмеженнями, враховуючи, що значення точок t_i та $f(t_i)$, а також обчислення похідних $f'(a), f'(b)$, завжди мають деяку похибку. Тоді точка X^0 буде вважатися початковою точкою у разі, якщо вона задовольнятиме всі встановлені додаткові обмеження та призведе до вирішення задачі найкращого наближення поліномом $\Pi_k(x)$ функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

7 ПОДЯКИ

Автори вдячні колективу лабораторії фізико-технічних проблем джерел ядерних випромінювань відділу ЦЕПАЕ Інституту ядерних досліджень НАН України в сприянні перевірки методу можливих напрямків Дж. Зойтендейка для опису радіоактивно забрудненої території, що виконувалась в межах НДР «Розробка технології мінімізації проникнення техногенного тритію у водне середовище».

ВИСНОВКИ

Наукова новизна полягає в тому, що запропонований підхід до визначення початкової точки при виконанні розрахунків з використанням методу можливих напрямків Дж. Зойтендейка дозволяє обрати точку таким чином, щоб побудувати з неї вектор руху з заданим кроком з найменшою кількістю ітерацій і визначити за напрямком вектору другу точку для побудови наступного кроку. При цьому враховуються обмеження, зокрема – значення у кожній новій точці повинно бути виражене невід'ємним числом.

Для наведених нормалізацій є ряд особливостей, які слід враховувати при розрахунках та побудові алгоритмів вирішення прикладних задач за запропонованим підходом. Так, деякі ітерації можуть призвести до більшого обсягу розрахунків та перетворень над кожною з ітерацій, проте кількість ітерацій менше у порівнянні з іншими типами ітерацій. Це залежить від розмірів задачі та кількості обмежень у кожному випадку.

Практичне значення запропонованого підходу – наведене може бути використане при розробці методів, моделей та алгоритмів опису та прогнозування техногенного забруднення складних пересічених територій. Результати комп'ютерного моделювання за наведеним підходом підтверджені експериментальними вимірами техногенного забруднення місцевості тритієм.

ЛІТЕРАТУРА / ЛИТЕРАТУРА

1. Екологічні ризики, збитки та раціональні межі використання надр в Україні : монографія / [С. О. Довгий, М. М. Коржнєв, О. М. Трофимчук та ін.] за ред. С. О. Довгого. – К. : Ніка-Центр, 2013. – 314 с.
2. Трофимчук О. М. Кусково-поліноміальна апроксимація яружних функцій / О. М. Трофимчук, О. О. Кряжич // Технічні науки та технології. – 2015. – № 1. – С. 67–75.
3. Snyman J. A. Practical Mathematical Optimization: An Introduction to Basic Optimization Theory and Classical and New Gradient-Based Algorithms / J. A. Snyman. – Berlin : Springer Science & Business Media, 2005. – 257 p.
4. Zangwill W. I. Nonlinear Programming a Unified Approach / W. I. Zangwill. – N.J. : Prentice-Hall, 1969. – 356 p.
5. Zoutendijk G. Methods of feasible directions; a study in linear and nonlinear programming / G. Zoutendijk. – Amsterdam, New York : Elsevier Pub. Co., 1960. – 178 p.
6. Хованский А. Г. Полиномы Чебышева и их обращения / А. Г. Хованский // Математическое просвещение. – 2013. – Вып. 17. – С. 93–106.
7. Ahlberg J. H. The Theory of Splines and Their Applications / J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh. – United Kingdom : Academic Press, 1967. – 284 p.
8. Научное наследие П. Л. Чебышева / [отв. ред. первого выпуска акад. С. Н. Бернштейн] – М.-Л. : Изд-во академии наук СССР. – Вып. 1: Математика. – 1945. – 174 с.
9. Kirk D. E. Optimal Control Theory : an Introduction / D. E. Kirk. – N. J. : Prentice-Hall, 1970. – 480 p.
10. Трофимчук О. М. Апроксимація функцій для створення алгоритму опису пересіченої місцевості / О. М. Трофимчук, О. О. Кряжич // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2016. – № 1. – С. 134–141.
11. Кряжич О. О. Апроксимація складних функцій для опису розвитку локальної надзвичайної ситуації / О. О. Кряжич // Математичні машини і системи. – 2016. – № 1. – С. 148–157.
12. Кряжич О. О. Алгоритм апроксимації функцій з використанням методу Дж. Зойтендейка / О. О. Кряжич // Математичне моделювання в економіці. – 2016. – № 1. – С. 19–29.
13. Кряжич О. О. Спосіб опису забрудненої території: програмна реалізація / О. О. Кряжич, О. В. Коваленко, В. В. Іванченко // Математичне моделювання в економіці. – 2016. – № 2. – С. 22–35.
14. Zoutendijk G. Nonlinear programming, computational methods / G. Zoutendijk // Integer and Nonlinear Programming. – 1970. – Vol. 1. – P. 37–86.
15. Polak E. On the Convergence of the Pshenichnyi-Pironneau-Polak : Minimax Algorithm with an Active Set Strategy / E. Polak // Journal Optim. Theory Appl. – 2008. – Vol. 138. – P. 305–309.
16. Gonglin Yu. A conjugate gradient method with descent direction for unconstrained optimization / Yu. Gonglin, L. Xiwen, W. Zengxin // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2009. – Vol. 233. – P. 519–530.
17. Applying the Powell's Symmetrical Technique to Conjugate Gradient Methods with the Generalized Conjugacy Condition / [N. Benrabia, Y. Laskri, H. Guebbai at al.] // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2016. – Vol. 37. – № 7. – P. 839–849.
18. Stoyan Yu. Packing congruent hyperspheres into a hypersphere / Yu. Stoyan, G. Yaskov // Journal Glob. Optim. – 2012. – Vol. 52. – P. 855–868.
19. Stoyan Yu. Covering a compact polygonal set by identical circles / Yu. Stoyan, V. Patsuk // Comput. Optim. Appl. – 2010. – Vol. 46. – P. 75–9.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-3-5

20. Stoyan Yu. Packing congruent spheres into a multi-connected polyhedral domain / Yu. Stoyan, G. Yaskov // International Transactions in Operational Research. – 2013. – № 20. – P. 79–99.
21. Stoyan Yu. Packing identical spheres into a cylinder / Yu. Stoyan, G. Yaskov // International Federation of Operational Research Societies. – 2010. – Vol. 17. – P. 51–70.
22. Stoyan Yu. Solving an optimization packing problem of circles and non-convex polygons with rotations into a multiply connected region / Yu. Stoyan, M. Zlotnik, A. Chugay // Journal of the Operational Research Society. – 2012. – Vol. 63. – P. 379–391.
23. Stoyan Yu. Packing equal circles into a circle with circular prohibited areas / Yu. Stoyan, G. Yaskov // International Journal of Computer Mathematics. – 2012. – Vol. 89, № 10. – P. 1355–1369.
24. Lei Xu. Energy-Efficient Chance-Constrained Resource Allocation for Multicast Cognitive OFDM Network / Xu Lei, N. Arumugam // IEEE Journal on selected areas in communications. – 2016. – Vol. 34, № 5. – P. 1298–1306.
25. Wah J. L. Convergence and Stability of Line Search Methods for Unconstrained Optimization / J. L. Wah, S. G. Bean // Acta. Appl. Math. – 2013. – Vol. 127. – P. 155–167.
26. Fliege J. Steepest descent methods for multicriteria optimization / J. Fliege, B. F. Svaiter // Math. Meth. Oper. Res. – 2000. – Vol. 51. – P. 479–494.
27. Liu D. Applying Powell's symmetrical technique to conjugate gradient methods / D. Liu, G. Xu // Comput. Optim. Appl. – 2011. – Vol. 49. – P. 319–334.
28. Sharma T. Determination of Feasible Directions by Successive Quadratic Programming and Zoutendijk Algorithms: A Comparative Study / T. Sharma, S. Hunachew // International Journal of Mathematics and Its Applications. – 2014. – Vol. 2, № 4. – P. 47–56.
29. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения / Е. Я. Ремез. – К. : Наук. Думка, 1969. – 620 с.

Received 06.03.2019.
Accepted 11.05.2019.

УДК 004.942

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Кряжич О. А. – канд. техн. наук, научный сотрудник Института технологии и бизнеса в Чешких Будеевицах, Чешские Будеевицы, Чешская Республика.

Трофимчук А. Н. – д-р техн. наук, профессор, чл.-кор. НАН Украины, директор Института телекоммуникаций и глобального информационного пространства НАН Украины, Киев, Украина.

Коваленко А. В. – канд. техн. наук, заведующий лаборатории физико-технических проблем источников ядерных излучений отдела ЦЭПАЭ Института ядерных исследований НАН Украины, Киев, Украина.

АННОТАЦИЯ

Актуальность. Рассмотрена задача определения начальной точки при выполнении метода возможных направлений Дж. Зойтендейка, а именно: случай, когда такая точка может быть произвольной или вообще неизвестной. Представленное решение данной задачи позволяет определить дальнейшее направление движения таким образом, что при минимальном количестве точек исследования получить максимально точный результат. Все изложенное относится к описанию сложных поверхностей, которые могут быть представлены овражной функцией. Определение начальной точки используется в практике моделирования развития экологических рисков при техногенном загрязнении сложных пересечениях территорий.

Целью данной работы является решение задачи выбора начальной точки при использовании метода возможных направлений для описания сложной поверхности овражной функцией.

Метод. В работе использован метод Дж. Зойтендейка для решения задач чебышевского приближения.

Результаты. Представлен алгоритм определения начальной точки для задачи с линейными ограничениями. Приведен подход для решения сложных задач вычисления овражных функций с минимально возможным количеством итераций. Результаты математического моделирования проверены на практике описания загрязненной территории радиоизотопом водорода – тритием.

Выводы. Предложен подход к определению начальной точки при выполнении расчетов с использованием метода возможных направлений Дж. Зойтендейка, который позволяет выбрать точку, построить из нее вектор движения с заданным шагом и определить по направлению вектора вторую точку для построения следующего шага. При этом учитываются ограничения, в частности – значения в каждой новой точке должно быть выражено неотрицательным числом. Для приведенных нормализаций существует ряд особенностей, которые следует учитывать при расчетах и построении алгоритмов решения прикладных задач согласно предложенного подхода. Так, некоторые итерации могут привести к большему объему расчетов и преобразований над каждой из итераций, однако количество итераций меньше в сравнении с другими типами итераций. Это зависит от размеров задачи и количества ограничений в каждом случае. Приведенное может быть использовано при разработке методов, моделей и алгоритмов описания пересеченных территорий для решения задач визуализации процесса и прогнозирования техногенного загрязнения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: область, шаг, модель, функция, отрезок, вектор, итерация.

УДК 004.942

THE ALGORITHM FOR DETERMINING THE STARTING POINT IN THE SIMULATION BY THE METHOD OF POSSIBLE DIRECTIONS

Kryazhych O. O. – PhD, Researcher, Institute of Technology and Business in České Budějovice, České Budějovice, Czech Republic.

Trofymchuk O. M. – Doctor of Science, Professor, Corresponding Member of NAS of Ukraine, Director of Institute of Telecommunications and Global Information Space of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine.

Kovalenko O. V. – PhD, Head of Laboratory of Physical and Technical Problems of Nuclear Radiation Sources, Dep. CEPAE, Institute for Nuclear Research of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine.

ABSTRACT

Context. The problem of determining the starting point when of G. Zoutendijk's method of possible directions is considered, namely the case where such a point can be arbitrary or even unknown. Presented in the article allows to determine the further direc-

DOI 10.15588/1607-3274-2019-3-5

tion of movement in such a way that with a minimum number of study points to obtain the most accurate result. The solution of the above problem relates to the description of complex surfaces that can be represented by a gully function. The definition of the starting point is used in the practice of modeling the development of environmental risks in technogenic pollution of intersections of territories.

Objective. The solution of the problem of choosing the starting point when using the method of possible directions for describing complex surfaces ravine function.

Method. The article uses the method of G. Zoutendijk for solving tasks Chebyshev's approximation.

Results. An algorithm for determining the starting point for a problem with linear constraints is introduced. An approach for solving complex tasks of representation of gully functions with the minimum possible number of iterations is presented. The results of mathematical modeling are tested in practice to solve the problem of description of the contaminated area by hydrogen's radioisotope – tritium.

Conclusions. An approach to determining the starting point in the calculations using the method of possible directions of G. Zoutendijk that allows you to select a point to build from it the motion vector with the specified step and to determine the direction of the second point to draw the next step. This takes into account the limitations, in particular – the values at each new point must be expressed in a non-negative number. For the given normalization, there are a number of features that should be taken into account in the calculation and construction of algorithms for solving applied problems according to the proposed approach. For example, some iterations can lead to more calculations and transformations on each iteration, but the number of iterations is smaller than other types of iterations. This depends on the size of the task and the number of constraints in each case. The presented approach can be used in the development of methods, models and algorithms for the description of rough terrain to solve the problems of visualization of the process of pollution by dangerous substances.

KEYWORDS: area, step, model, function, segment, vector, iteration.

REFERENCES

1. Dovhyi S. O., Korzhniev M. M., Trofymchuk O. M. at al. edit. Dovhyi S. O. Ekolohichni ryzyky, zbytky ta ratsionalni mezhi vykorystannia nadr v Ukraini. Kiev, Nika-Tsentr, 2013, 314 p.
2. Trofymchuk O. M., Kryazhych O. O. Kuskovo-polinomialna aproksymatsiia yaruzhnykh funktsii, *Tekhnichni nauky ta tekhnolohii*, 2015, No. 1, pp. 67–75.
3. Snyman J. A. Practical Mathematical Optimization: An Introduction to Basic Optimization Theory and Classical and New Gradient-Based Algorithms. Berlin, Springer Science & Business Media, 2005, 257 p.
4. Zangwill W. I. Nonlinear Programming a Unified Approach, N.J., Prentice-Hall, 1969, 356 p.
5. Zoutendijk G. Methods of feasible directions; a study in linear and nonlinear programming. Amsterdam, New York, Elsevier Pub. Co., 1960, 178 p.
6. Hovanskij A. G. Polinomy Chebyshyova i ih obrashcheniya, *Matematicheskoe prosveshchenie*, 2013, Vol. 17, pp. 93–106.
7. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. The Theory of Splines and Their Applications. United Kingdom, Academic Press, 1967, 284 p.
8. S.N. Bernshtejn edit. akad. Nauchnoe nasledie P. L. Chebysheva. M.-L., Izdatel'stvo akademii nauk SSSR, Vol. 1, Matematika, 1945, 174 p.
9. Kirk D. E. Optimal Control Theory : an Introduction. N.J., Prentice-Hall, 1970, 480 p.
10. Trofymchuk O. M., Kryazhych O. O. Aproksymatsiia funktsii dlia stvorennia alhorytmu opysu peresichenoi mistsevosti, *Systemni doslidzhennia ta informatsiini tekhnolohii*, 2016, No. 1, pp. 134–141.
11. Kryazhych O.O. Aproksymatsiia skladnykh funktsii dlia opysu rozvytku lokalnoi nadzvychainoi sytuatsii, *Matematychni mashyny i systemy*, 2016, No. 1, pp. 148–157.
12. Kryazhych O.O. Alhorytm aproksymatsii funktsii z vykorystanniam metodu Dzh. Zoitendeika, *Matematychne modeliuvannia v ekonomitsi,* 2016, No. 1, pp. 19–29.
13. Kryazhych O. O., Kovalenko O. V., Ivanchenko V. V. Sposib opysu zabrudnenoi terytorii : prohramna realizatsiia, *Matematychne modeliuvannia v ekonomitsi,* 2016, No. 2, pp. 22–35.
14. Zoutendijk G. Nonlinear programming, computational methods, *Integer and Nonlinear Programming,* 1970, Vol. 1, pp. 37–86.
15. Polak E. On the Convergence of the Pshenichnyi-Pironneau-Polak : Minimax Algorithm with an Active Set Strategy, *Journal Optim. Theory Appl*., 2008, Vol. 138, pp. 305–309.
16. Gonglin Yu., Xiwen L., Zengxin W. A conjugate gradient method with descent direction for unconstrained optimization, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, Vol. 233, pp. 519–530.
17. Benrabia N., Laskri Y., Guebbai H. at al. Applying the Powell's Symmetrical Technique to Conjugate Gradient Methods with the Generalized Conjugacy Condition, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2016, Vol. 37, No. 7, pp. 839–849.
18. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent hyperspheres into a hypersphere, *Journal Glob. Optim,* 2012, Vol. 52, pp. 855–868.
19. Stoyan Yu., Patsuk V. Covering a compact polygonal set by identical circles, *Comput. Optim. Appl.*, 2010, Vol. 46, pp. 75–9.
20. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing congruent spheres into a multiconnected polyhedral domain, *International Transactions in Operational Research,* 2013, No. 20, pp. 79–99.
21. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylinder, *International Federation of Operational Research Societies,* 2010, Vol. 17, pp. 51–70.
22. Stoyan Yu., Zlotnik M., Chugay A. Solving an optimization packing problem of circles and non-convex polygons with rotations into a multiply connected region, *Journal of the Operational Research Society*, 2012, Vol. 63, pp. 379–391.
23. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing equal circles into a circle with circular prohibited areas, *International Journal of Computer Mathematics,* 2012, Vol. 89, No. 10, pp. 1355–1369.
24. Lei Xu., Arumugam N. Energy-Efficient Chance-Constrained Resource Allocation for Multicast Cognitive OFDM Network, *IEEE Journal on selected areas in communications*, 2016, Vol. 34, No. 5, pp. 1298–1306.
25. Wah J. L., Bean S. G. Convergence and Stability of Line Search Methods for Unconstrained Optimization, *Acta. Appl. Math*., 2013, Vol. 127, pp. 155–167.
26. Fliege J., Svaiter B. F. Steepest descent methods for multicriteria optimization, *Math. Meth. Oper. Res*., 2000, Vol. 51, pp. 479–494.
27. Liu D., Xu G. Applying Powell's symmetrical technique to conjugate gradient methods, *Comput. Optim. Appl*, 2011, Vol. 49, pp. 319–334.
28. Sharma T., Hunachew S. Determination of Feasible Directions by Successive Quadratic Programming and Zoutendijk Algorithms: A Comparative Study, *International Journal of Mathematics and Its Applications,* 2014, Vol. 2, No. 4, pp. 47–56.
29. Remez E. Ya. Osnovy chislennyh metodov chebyshevskogo priblizheniya. Kiev, Nauk. Dumka, 1969, 620 p.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-3-5