

## РОБАСТНО-ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Тимченко В. Л.** – д-р техн. наук, профессор кафедры компьютеризованных систем управления, Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова, Николаев, Украина.

**Лебедев Д. О.** – аспирант, Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова, Николаев, Украина.

### АННОТАЦИЯ

**Актуальность.** Повышение требований к качеству управления переходными режимами (стабилизацией) разнотипных (механических, электродинамических) динамических систем требует использования инженерных методов оптимального синтеза, позволяющие решать практические задачи стабилизации многомерных нелинейных объектов управления под воздействием возмущений с учетом необходимости физической реализуемости управляющих воздействий.

**Цель.** Совершенствование методов робастно-оптимальной стабилизации нелинейных динамических систем.

**Метод.** Применение предложенных робастно-оптимальных систем переменной структуры основано на предварительном формировании оптимальных траекторий для прямых условий оптимальности, определении моментов переключения и синтезе управляющих функций, обеспечивающих заданные переходные траектории стабилизации объектов управления, а также робастной коррекции с учетом неполной информации о физической системе. Механизм построения оптимальных траекторий с расчетом необходимого количества участков с нулевыми значениями соответствующих производных управляемых координат применим для общего случая многомерных нелинейных нестационарных динамических систем. Моменты переключения управлений в цепях обратных связей объекта управления рассчитываются на основе решения системы алгебраических уравнений и для динамических систем шестого порядка включают введение ведущих, субведущих и ведомых управляемых координат. Стабилизация динамической системы на соответствующих заданных отрезках траекторий обеспечивается управляющими воздействиями, рассчитанными на основе выполнения балансировочных режимов для сил и моментов (и их требуемых производных), действующих на объект управления. Робастность динамической системы к неполной определенности объекта и действию неконтролируемых внешних и параметрических возмущений достигается за счет введения корректирующего управления на основе рассогласования текущей и оптимальной траектории стабилизации и реализующего требования минимизации ошибок управления и их производных.

**Результаты.** Приведены примеры схемотехнической реализации робастно-оптимальных систем переменной структуры и результаты имитационного моделирования для задач максимального быстродействия при маневрировании морского судна и минимальных затрат энергии при управлении полетом квадрокоптера.

**Выводы.** Приведенные результаты демонстрируют корректность применимости общих принципов синтеза для различного вида объектов и эффективность управления в условиях воздействия возмущений.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** робастно-оптимальные системы переменной структуры, критерии оптимальности, эталонная модель, неполная определенность.

### АББРЕВИАТУРА

CAVCU – блок формирования заданных значений углов ориентации квадрокоптера;

CSFU – блок формирования корректирующего сигнала робастного контура;

SCU – блок переключения управляющих воздействий;

SW – переключающий ключ;

BSW – блок ключей переключения.

### НОМЕНКЛАТУРА

$Q$  – квадратичный функционал;

$X$  – вектор управляемых координат;

$U$  – вектор управления;

$t_1, t_2$  – время начала и окончания переходного процесса управления;

$G_1, G_2$  – положительно определенные симметричные матрицы весовых коэффициентов;

$E$  – вектор ошибок;

$C$  – матрица параметров;

$F$  – вектор сил и моментов внешних возмущений;

$t_i^s$  – момент переключения управляющих функций на  $i$  – ом отрезке траектории;

$m$  – порядок высших производных управляемых координат;

$k$  – минимально возможный порядок производных вектора управляемых координат;

$A_x, B_x$  – матрицы параметров динамического объекта, которые зависят от управляемых координат и времени;

$X_m$  – вектор управляемых координат эталонной модели;

$U_m$  – управляющий сигнал с эталонной модели;

$U_c$  – управляющий сигнал робастной системы;

$A, B$  – линеаризованные матрицы параметров динамического объекта;

$f$  – вектор внешнего возмущения;

$\psi$  – угол курса;

$\omega$  – угловая скорость;

$\alpha$  – угол перекладки пера руля;

$x_i$  – управляемые координаты морского судна;

$W_f$  – передаточная функция, реализующая морское нерегулярное волнение;

$v_i, \omega_i$  – поступательные и угловые скорости квадрокоптера;

$\theta$  – угол тангажа;

$\phi$  – угол рысканья;

$\psi$  – угол крена;

$f_i$  – компоненты вектора внешнего возмущения;

$\varepsilon$  – значение ошибки;

$N_i$  – тяги винтов квадрокоптера;

$U_i$  – управляющие воздействия квадрокоптера;

$g$  – гравитационное ускорение;

$\eta$  – параметрический шум;

$v_w$  – скорость ветра;

$\overline{W}_c$  – матричная передаточная функция, реализующая робастную систему.

## ВВЕДЕНИЕ

Решение проблемы оптимального управления динамическими системами движения технических объектов различного назначения в условиях неопределенности математических моделей объектов и окружающей среды позволяет проектировать эффективные по показателям качества системы автоматического управления. Требования оптимальности процессов управления определяются прежде всего необходимостью снижения энергетических затрат в условиях ограниченных ресурсов управления или максимального быстродействия переходных процессов в критических режимах функционирования объекта управления. Критерии оптимальности, математически определяющие данные требования, являются противоположными по минимаксным оценкам. Однако, если положить в основу оптимизации показатели качества конкретных этапов технологических процессов, то можно выделить этап рабочего функционирования динамической системы с минимумом затрат энергии и этап критического управления с максимальным быстродействием (минимальным по времени) переходных процессов. Таким образом, определяются два отдельных этапа оптимизации, позволяющие применять соответствующие критерии оптимальности и порядок синтеза оптимального управления.

**Объект исследования** – процесс робастно-оптимального управления динамической системой.

**Предмет исследования** – робастно-оптимальная стабилизация динамических систем на основе систем переменной структуры.

**Целью работы** является создание обобщенного подхода к синтезу высокоточных и устойчивых к неопределенностям робастно-оптимальных систем управления, применимого для многомерных нелинейных динамических систем различных физических типов.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Настоящая статья является развитием и обобщением синтеза робастно-оптимальных систем переменной структуры для достаточно общего класса управляемых динамических систем, который могут включать не только подвижные (инерционные) объекты, но также электродинамические системы, например, резонансные LLC-преобразователи.

Управление динамическими системами, которые включают физические объекты под воздействием внешних и параметрические возмущений, рассматриваются в переходных режимах, т.е. в широком смысле режимах стабилизации управляемых координат. Математическое описание (моделирование) динамических систем в виде обыкновенных дифференциальных уравнений представляет структурно-параметрическую модель объекта управления. Структура взаимодействия объекта и среды определяется видом дифференциальных уравнений и считается достаточно определенной. Допускается изменение структуры лишь в силу корректного упрощения системы уравнений, например, замены нелинейной модели на линейную модель. Однако параметры (коэффициенты) модели объекта управления принимают достаточно неопределенные значения, можно сказать, неполностью определенные и описывающие неполностью информативную модель. При построении систем автоматического управления динамическими объектами параметры математической модели объекта, которые положены в основу синтеза, в реальных системах отличаются от расчетных в силу невозможности физически определить и математически описать все факторы, которые влияют на значение или описывающую функцию параметра. Например, коэффициент гидродинамического сопротивления и присоединенная масса судна зависят, в том числе от формы корпуса судна, которая в процессе эксплуатации может изменяться (в т.ч. обрастать микроорганизмами), и плотности водной среды, значение которой также не является постоянным для разных акваторий эксплуатации судна.

Действующие на объект управления возмущения можно разделить на контролируемые (измеряемые, физически поддающиеся измерению) и неконтролируемые (неизмеряемые). Примером контролируемых возмущений может быть ветровое возмущение, скорость и направление которого достаточно точно возможно измерить с помощью анемометрической системы. При этом необходимо отметить, что если конструктивно технический объект управления не позволяет размещение анемометрической системы на корпусе, например, квадрокоптер, то в таком случае ветровое воздействие будет неконтролируемым. Практически неконтролируемое возмущение – морское нерегулярное волнение, определяющее качку судна.

Для задач робастно-оптимального управления формируются требования обеспечения оптимальной траектории  $X_{opt}(t)$  стабилизации динамической системы по всем заданным управляемым координатам с выполнением оптимального критерия минимального расхода энергии управления  $U(t)$

$$J = \int_{t_1}^{t_2} Q(\mathbf{X}, \mathbf{U}) dt = \min. \quad (1)$$

Максимальное быстродействие переходных процессов в динамических системах выражается в обеспечении минимального интервала времени  $t_1 \div t_2$

$$J = \int_{t_1}^{t_2} dt = \min. \quad (2)$$

С учетом неопределенности информации о параметрах математической модели объекта управления и действии неконтролируемых внешних возмущений задаются требования к значениям вектора ошибок управления  $\mathbf{E}(t)$  и матрицам весовых коэффициентов  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$  следующим образом

$$\ddot{\mathbf{E}}(t) + \mathbf{G}_1 \dot{\mathbf{E}}(t) + \mathbf{G}_2 \mathbf{E}(t) = 0. \quad (3)$$

## 2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Эффективным современным направлением развития систем управления представляется методы синтеза робастно-оптимальных систем [1], позволяющие решить дуальную задачу: оптимальное управление в условиях неполной определенности. К подобным методам относятся подходы с использованием функций Ляпунова; системы со статическими обратными связями, основанными на использовании линейных матричных неравенств; построение ограниченной обратной связи с обеспечением дополнительных свойств переходных процессов; системы стабилизации на основе количественной теории обратной связи,  $H_\infty$ -синтеза и других подходов [2–7]. При синтезе оптимального управления динамическими системами применяются методы, созданные в основном на базе классического подхода вариационного исчисления [8]. Это приводит к необходимости формирования многомерных краевых задач со сложно определяемыми дополнительными функциями Лагранжа и вычислительными трудностями разрешения для систем выше третьего порядка. Альтернативный путь синтеза на основе использования уравнения Риккати применяется для критерия минимума расхода энергии и ограничен квазистационарными решениями. При этом классические критерии оптимальности базируются на применении матриц весовых коэффициентов, формализация которых крайне затруднена, и в то же время значения весовых коэффициентов непосредственно входят в выражения для синтезированного управления, что естественно ставит под сомнение оптимальность процесса при их некорректном задании [9]. Необходимо также отметить применимость классических методов управления в основном для линейных стационарных динамических систем, что существенно сужает класс возможных моделей объектов управления.

Возможный подход к синтезу робастно-оптимальных систем базируется на системы с переменной структурой обратных связей и включает следующие основные этапы: планирование оптимальной траектории; определение моментов переключения управляющих функций в цепях обратной связи объекта; синтез управляющих функций в соответствующих цепях обратной связи многомерного объекта; формирование робастного корректирующего контура управления, изложены для моделей морских подвижных объектов и квадрокоптеров [10–12]. Преимуществами являются: возможность применения для расширенных многомерных нелинейных нестационарных моделей объектов; использование прямых условий оптимальности на основе энергетического анализа; робастная коррекция процессов управления на основе минимизации ошибок управления и их производных.

## 3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Система уравнений для обобщенной модели нелинейной нестационарной динамической системы в векторно-матричной форме запишется в виде

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}_x(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}_x(t) \mathbf{U}(t) + \mathbf{CF}(t). \quad (4)$$

Векторно-матричное уравнение (4) описывает как механические, так и электродинамические системы, где входное напряжение определяет управление, а выходное – управляемые координаты, при этом индуктивности определяют инерционность системы.

Планирование оптимальной траектории является базовым этапом при синтезе оптимального управления и заключается в определении необходимого количества отрезков траектории с постоянными значениями соответствующих производных координат состояния, а также моментов времени переключения управляющих функций в цепях обратных связей при переходе с начального отрезка на заданный отрезок траектории. На основе полученных траекторий формируются управляющие воздействия в цепях обратной связи на основе уравнений соответствующего баланса сил (моментов) и их производных, при которых на определенных отрезках траектории выполняются условия постоянства соответствующих производных координат состояния.

Переход динамического объекта из начального отрезка на заданный отрезок траектории при условии, что управляющее воздействие ограничено только способностью его реализации, описывается следующим векторным уравнением [10, 12]

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{X}(t_i^s) &= \mathbf{X}(t_{i-1}^s) + \dots + \mathbf{X}^{(m-1)}(t_{i-1}^s) \frac{(t_i^s - t_{i-1}^s)^{m-1}}{(m-1)!} \pm \mathbf{X}^{(m)}(t_{i-1}^s) \frac{(t_i^s - t_{i-1}^s)^m}{m!}, \\ \dot{\mathbf{X}}(t_i^s) &= \dot{\mathbf{X}}(t_{i-1}^s) + \dots + \mathbf{X}^{(m-1)}(t_{i-1}^s) \frac{(t_i^s - t_{i-1}^s)^{m-2}}{(m-2)!} \pm \mathbf{X}^{(m)}(t_{i-1}^s) \frac{(t_i^s - t_{i-1}^s)^{m-1}}{(m-1)!}, \\ &\vdots \\ \mathbf{X}^{(m-1)}(t_i^s) &= \mathbf{X}^{(m-1)}(t_{i-1}^s) \pm \mathbf{X}^{(m)}(t_{i-1}^s) (t_i^s - t_{i-1}^s). \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Траектории вида (5) объекта управления в координатной форме при позитивных значениях производных вектора координат состояния будут оптимальны относительно критерия (1) при движении динамического объекта с минимальным возможным числом минимальных возможных значений производных вектора координат

$$\min_k \min_{\mathbf{X}(t_0)} \left\{ \dot{\mathbf{X}} \left[ \begin{matrix} (k) \\ \mathbf{X}(t_0), t \end{matrix} \right] \right\}$$

для выполнения всех заданных граничных условий  $\mathbf{X}(t_0); \mathbf{X}(T)$ .

Для задач максимального быстродействия траектории будут оптимальны относительно критерия (2) при движении динамического объекта с максимальным возможным числом максимальных возможных значений производных вектора координат с учетом ограничений на управляющее воздействие и выполнения всех заданных граничных условий

$$\max_k \max_{\mathbf{X}(t_0)} \left\{ \dot{\mathbf{X}} \left[ \begin{matrix} (k) \\ \mathbf{X}(t_0), t \end{matrix} \right] \right\}$$

и условия  $\mathbf{X}(t_0) = f \{ \mathbf{X}(t_0), \mathbf{U}_{\max} \}$ .

Для построения оптимальной по быстродействию траектории перехода объекта шестого порядка из начального состояния в заданное конечное состояние и определения моментов переключения в цепях обратной связи, с учетом ограничений на управляющее воздействие, формируется следующий алгоритм:

1. Определение требуемого времени для перехода в заданное значение для каждой фазовой координаты на основе решения системы уравнений движения.

2. Определение количества и координат контрольных точек, через которые должны проходить траектории управляемых координат для попадания в заданную конечную точку.

3. Определение ведущей, субведущей и ведомой координат. Ведущая координата определяется по наименьшему требуемому времени перехода в контрольную точку. Субведущей будет координата, у которой требуемое время для перехода в контрольную точку больше, чем у ведущей координаты, но меньше, чем у ведомой.

4. Перевод ведущей координаты в контрольную точку (при этом субведущая и ведомая координаты перемещаются в произвольные точки).

5. Для перевода ведущей координаты в контрольную точку и определения моментов переключения управляющих воздействий в цепях обратной связи системы управления необходимо решить систему алгебраических уравнений, составленных на основе вида планируемых траекторий с учетом ограничений на управляющее воздействие, необходимых условий оптимальности и заданных граничных условий.

6. Фиксация ведущей координаты.

7. Определение промежуточных значений субведущей и ведомой координат.

8. Определение оптимальной траектории для перехода субведущей координаты с учетом дополнительных ограничений на управляющее воздействие, которые вызваны необходимостью фиксации ведущей координаты.

9. Перевод субведущей координаты в контрольную точку (при этом ведомая координата перемещается в произвольную точку).

10. Фиксация субведущей координаты.

11. Формирование оптимальной траектории перехода ведомой координаты с учетом дополнительных ограничений на управляющее воздействие, которые определяются необходимостью фиксации ведущей и субведущей координат.

12. Перевод ведомой координаты.

13. Перевод всех координат в заданную конечную точку. СТОП.

Для обеспечения движения динамического объекта на представленных отрезках траектории стабилизации, используя дифференциальное преобразование векторно-матричного уравнения (3) для условий, например, второй и третьей нулевой производной вектора координат, формируем соответствующие уравнения баланса сил и моментов, а также их производных, опуская аргумент  $t$  при матрицах  $\mathbf{A}_X$  и  $\mathbf{B}_X$ :

– для отрезка траектории с выполнением условия  $\ddot{\mathbf{X}}(t) = 0$ :

$$\mathbf{A}_X \dot{\mathbf{X}}(t) + \dot{\mathbf{A}}_X \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}_X \dot{\mathbf{U}}(t) + \dot{\mathbf{B}}_X \mathbf{U}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{F}}(t) = 0;$$

– для условия  $\ddot{\mathbf{X}}(t) = 0$ :

$$\mathbf{A}_X \ddot{\mathbf{X}}(t) + 2\dot{\mathbf{A}}_X \dot{\mathbf{X}}(t) + \ddot{\mathbf{A}}_X \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}_X \ddot{\mathbf{U}}(t) + \dot{\mathbf{B}}_X \dot{\mathbf{U}}(t) + \ddot{\mathbf{B}}_X \mathbf{U}(t) + \mathbf{C}\ddot{\mathbf{F}}(t) = 0. \quad (6)$$

Векторно-матричные преобразования уравнений (6) позволяют записать их в форме, которая определяет вектор управлений и обеспечивает движение динамического объекта на оптимальных траекториях, соответственно, для условий второй и третьей нулевой производной вектора координат

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_X \dot{\mathbf{U}}(t) + (\mathbf{A}_X \mathbf{B}_X + \dot{\mathbf{B}}_X) \mathbf{U}(t) &= -[(\mathbf{A}_X^2 + \dot{\mathbf{A}}_X) \mathbf{X}(t) + \mathbf{A}_X \mathbf{C}\dot{\mathbf{F}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{F}}(t)]; \\ \mathbf{B}_X \ddot{\mathbf{U}}(t) + (\mathbf{A}_X \mathbf{B}_X + 2\dot{\mathbf{B}}_X) \dot{\mathbf{U}}(t) + (\mathbf{A}_X^2 \mathbf{B}_X + 2\dot{\mathbf{A}}_X \mathbf{B}_X + \mathbf{A}_X \ddot{\mathbf{B}}_X + \ddot{\mathbf{B}}_X) \mathbf{U}(t) &= \\ = -[(\mathbf{A}_X^3 + 2\dot{\mathbf{A}}_X \mathbf{A}_X + \mathbf{A}_X \ddot{\mathbf{A}}_X + \ddot{\mathbf{A}}_X) \mathbf{X}(t) + (2\dot{\mathbf{A}}_X + \mathbf{A}_X^2) \mathbf{C}\dot{\mathbf{F}}(t) + \mathbf{A}_X \mathbf{C}\ddot{\mathbf{F}}(t) + \mathbf{C}\ddot{\mathbf{F}}(t)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Моменты переключения управляющих функций (7) определяют статические точки, для которых конечные значения переменных состояния для  $i$ -го отрезка траектории являются, совместно с новым значением высшей производной координаты, начальными значениями для  $(i+1)$ -го отрезка траектории.

Решение проблемы робастного управления динамическими объектами в условиях неопределенности и с учетом неконтролируемых внешних помех основано на использовании эталонных систем с переменной структурой обратной связи, которая формирует модель стабилизации объекта. Управляющий сигнал с эталонной модели  $U_m$  поступает на вход физического динамического объекта, и затем в схеме робастного управления генерируется корректирующий сигнал  $U_c$  на основе сравнения выходного сигнала эталонной модели с выходом физического объекта.

В этом случае оптимальное управление и траектории формируются с учетом нелинейности модели, а несоответствие, вызванное линеаризацией, следует рассматривать как дополнительную неопределенность, которая компенсируется робастной схемой управления.

Таким образом, уравнение физического динамического объекта (4), с учетом контролируемого возмущения  $F(t)$  и использования робастного контура, принимает форму

$$\dot{X}(t) = \bar{A}(t)X(t) + \bar{B}(t)[U_m(t) + U_c(t)] + CF(t). \quad (8)$$

Уравнение (4) для оптимальной модели динамического объекта запишем в виде

$$\dot{X}_m(t) = \bar{A}(t)X_m(t) + \bar{B}(t)U_m(t) + CF(t). \quad (9)$$

Для определения сигнала управления, используя выражения (8) и (9), приблизительное выражение для вектора ошибок управления может быть записано в форме

$$\dot{E}(t) \approx \bar{A}(t)E(t) - \bar{B}(t)U_c(t). \quad (10)$$

Используя уравнения (3) и (10), получим зависимость для вектора управления робастной коррекции, опуская аргумент  $t$  при матрицах  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$

$$\begin{aligned} \bar{B}U_c(t) + (G_1\bar{B} + \bar{A}\bar{B} + \bar{B})U_c(t) = \\ = (\bar{A}^2 + \bar{A} + G_1\bar{A} + G_2)E(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Структурная реализация робастно-оптимальной системы управления переменной структуры, использующей робастную коррекцию, показана на рис. 1.

#### 4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

При проведении имитационного моделирования для формирования робастного корректирующего контура в рассмотренных примерах использована стационарная форма уравнения (11), что позволило использовать аппарат матричных передаточных функций.

Рассмотрим задачу маневрирования морского судна при максимальном быстродействии (2) для моделирования процесса стабилизации угла курса  $\psi(t) = x_1(t)$  и угловой скорости  $\omega(t) = x_2(t)$  судна, управляемого изменением угла перекладки пера руля  $\alpha(t)$ , с учетом значений приведенных аэрогидродинамических коэффициентов и внешнего возмущения  $f(t)$  [10, 13]:

$$\dot{X}(t) = A_X X(t) + BU(t) + Cf(t),$$

где  $X(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t))^T$ ;  $U(t) = (\alpha(t) \ \dot{\alpha}(t))^T$ ;

$$A_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,03|x_2(t)| & -0,084 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0002 & 0,0063 \end{pmatrix}; \quad C = (0 \ 0 \ 0,00034)^T.$$

Моделирование процесса стабилизации судна рассматривается с учетом воздействия неконтролируемого нерегулярного волнения [8]  $W_f(p)$  и рассогласованием параметров математической модели и физического судна, задаваемым в пределах 20%, а также влияния параметрического шума заданной интенсивности.

Графики моделирования включают временные траектории для угла курса  $\psi(t)$  – рис. 2, угла перекладки руля  $\alpha(t)$  – рис. 3 и ошибок  $\epsilon_\psi(t)$  по углу курса – рис. 4.

Рассмотрим задачу стабилизации квадрокоптера при требовании минимума расхода энергии (1) на заданной траектории с последующей посадкой. Четырехроторный квадрокоптер управляется тягами винтов  $N_i$ .

Движение квадрокоптера описывает следующая система дифференциальных уравнений [14, 15]:

$$\dot{X}(t) = A(X)X(t) + B(X)U(t) + CF(t) - g,$$

где  $X(t) = (v_x \ v_y \ v_z \ \omega_\theta \ \omega_\psi \ \omega_\phi)^T$ ;

$$F(t) = (f_x \ f_y \ f_z \ f_\theta \ f_\psi \ f_\phi)^T;$$

$$g = (0 \ 0 \ 9.81 \ 0 \ 0 \ 0)^T;$$

$$A(X) = -\text{diag}(0.004v_x, 0.004v_y, 0.01v_z, 0.8\omega_\theta, 0.8\omega_\psi, 0.8\omega_\phi);$$

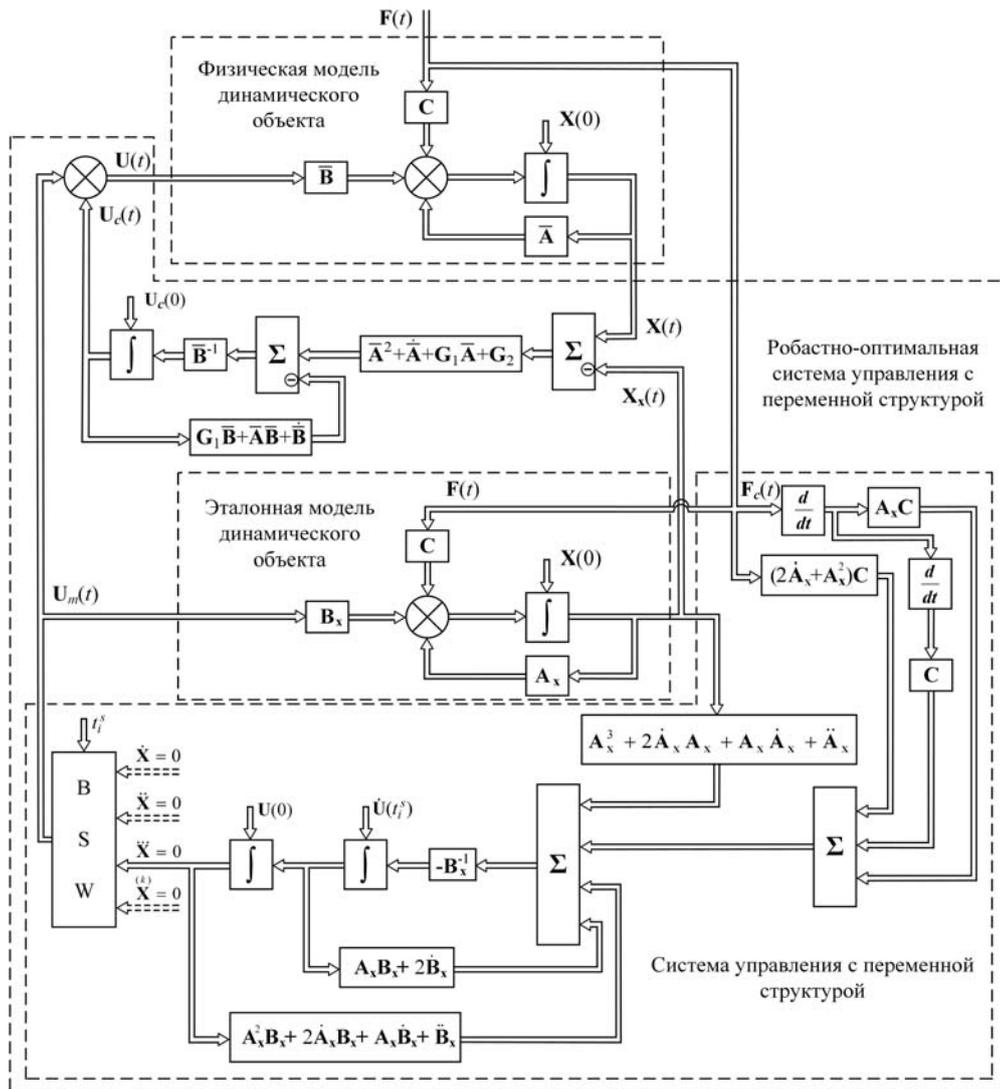


Рисунок 1– Структурная схема робастно-оптимальной системы управления

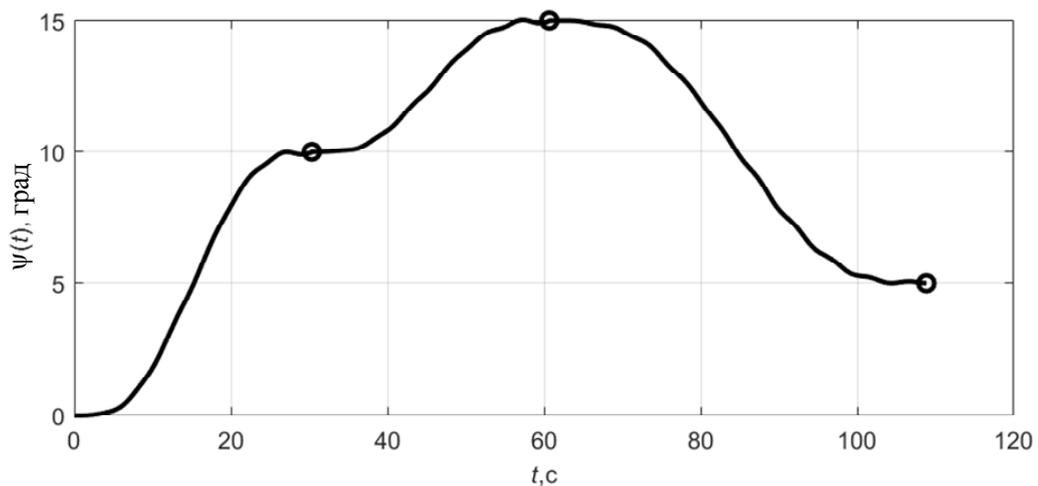


Рисунок 2 – График изменения угла курса

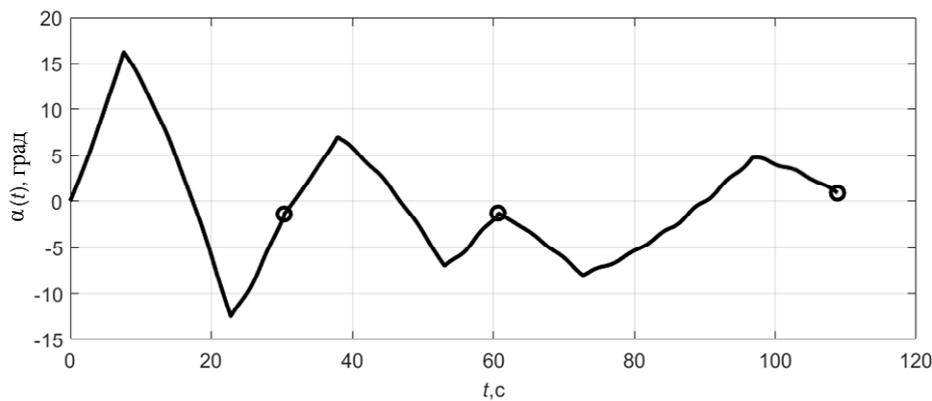


Рисунок 3 – График изменения угла перекадки руля

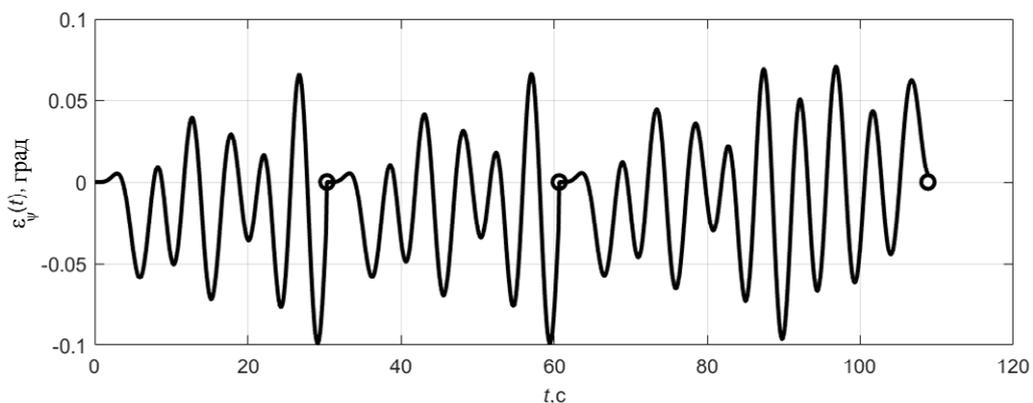


Рисунок 4 – График изменения ошибки по углу курса

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi \sin \theta \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta \cos \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \\ -N_1 - N_2 + N_3 + N_4 \\ -N_1 + N_2 + N_3 - N_4 \\ N_1 - N_2 + N_3 - N_4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \text{diag}(0.08, 0.036, 1.14, 0.008, 0.008, 0.004).$$

Траектории, относительно старших координат поступательного движения [11] продольно-горизонтального перемещения  $x$ , поперечно-горизонтального перемещения  $y$ , вертикального перемещения  $z$  формируются для условия третьей нулевой производной вектора координат. Младшие управляемые координаты вращательного движения углов рыскания  $\varphi$ , крена  $\psi$  и тангажа  $\theta$  управляются тремя оптимизированными ПИД регуляторами. Для заданных траекторий стабилизации квадрокоптера определены моменты переключения управляющих функций  $T_1, T_2, T$ . Базовая структурная схема [11], включающая MATLAB-файл, робастно-оптимальной системы

управления квадрокоптером показана на рис. 5. Физическая и эталонная модели заданы с условием рассогласования в пределах  $\pm 10\%$ . Воздействие ветра формировалось кусочно-постоянной составляющей (скорость ветра  $v_w = 10$  м/с) и высокочастотной компонентой, сформированной «белым шумом» заданной интенсивности.

Графики моделирования движения квадрокоптера по заданной траектории (рис. 6–8) включают зависимости старших координат и их ошибок, а также изменения управляющих воздействий, соответственно.

## 5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматривалось моделирование процесса стабилизации судна под воздействием нерегулярного морского волнения, задаваемого формирующим фильтром для заданной интенсивности волнения 4 балла, и с учетом шумов измерения выходных координат. Заданная траектория маневрирования включает три участка с различными углами курса, что характерно при плавании в условиях ограниченных акваторий (морских каналов, проливов и т.п.), а также, например, при укладке подводных трубопроводов. Результаты имитационного моделирования демонстрируют обеспечение точности управления с ошибками менее 1%. Simulink-ориентированная схема робастно-оптимальной системы управления судном формируется на основе обобщенной структурной схемы (рис. 1).

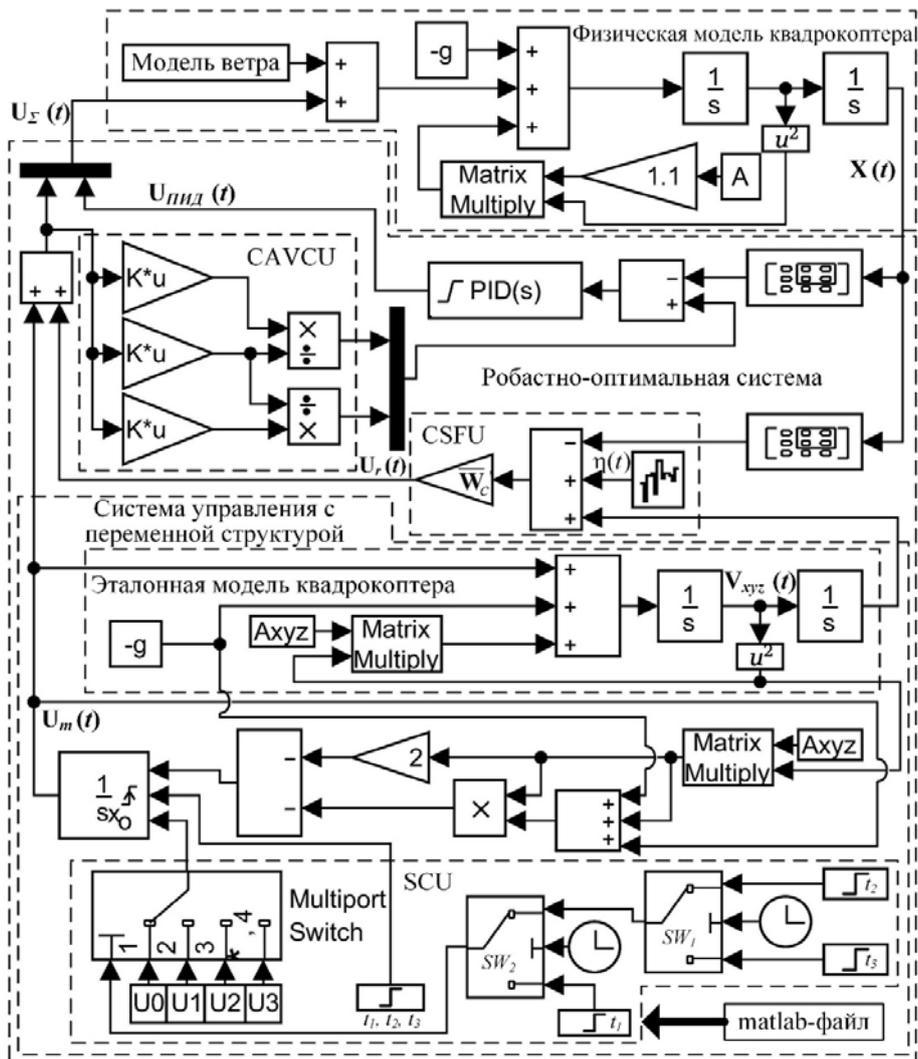


Рисунок 5 – Simulink-ориентированная схема робастно-оптимальной стабилизации квадрокоптера на заданной траектории

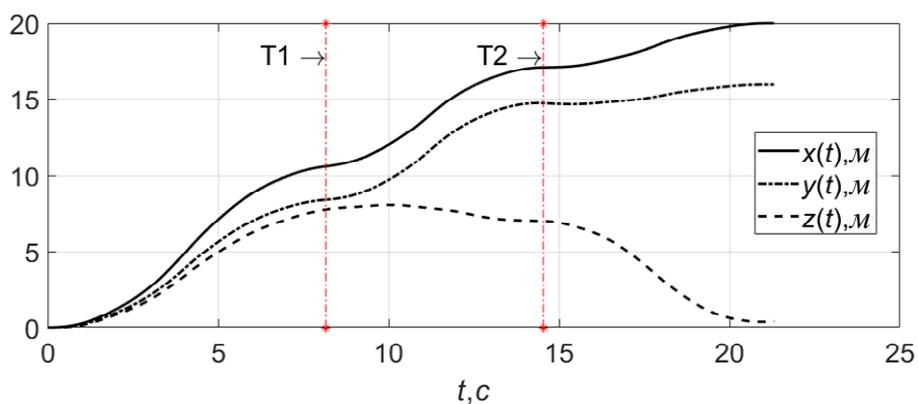


Рисунок 6 – Графики изменения старших управляемых координат

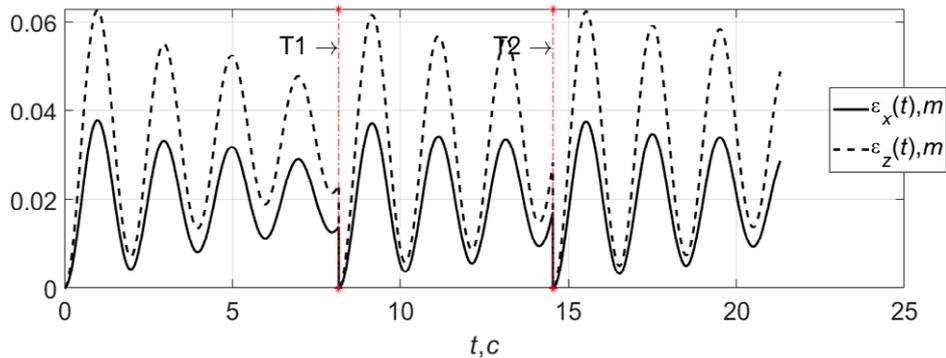


Рисунок 7 – Графики изменения ошибок по  $x$  и  $z$

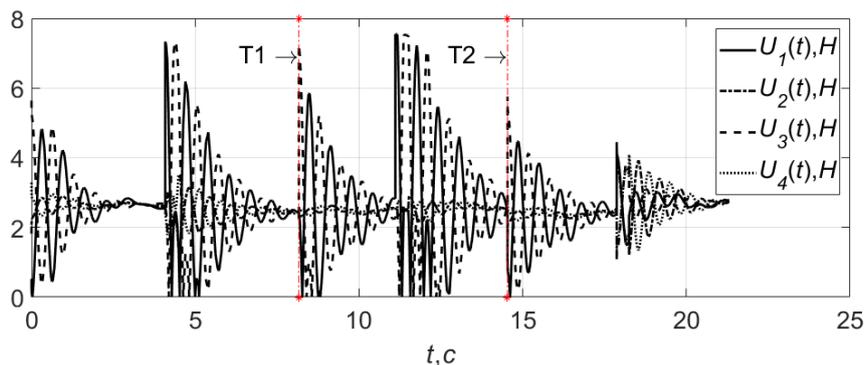


Рисунок 8 – Графики изменения управляющих воздействий

Задача высокоточного управления квадрокоптером в условиях воздействия ветрового возмущения возникает, например, при навигационном и экологическом мониторинге морской среды для расширения информационной базы оценки безопасности мореплавания. Результаты моделирования показывают робастную устойчивость системы управления квадрокоптером к внешним возмущениям и неопределенности математической модели, и минимальные отклонения текущей траектории от сформированной оптимальной траектории стабилизации квадрокоптера. Для схемотехнической реализации сформирована Simulink-ориентированная схема робастно-оптимальной системы управления квадрокоптером.

## 6 ОБСУЖДЕНИЕ

Оптимальные системы управления позволяют обеспечить для динамических систем наиболее высокие показатели качества управления по быстродействию, точности и расходу энергии. При этом для многомерных нелинейных систем возникают значительные ограничения применимости классических методов оптимального управления, связанные с вычислительными трудностями решения краевых задач, корректностью формирования весовых матриц критериев оптимальности и ряд других.

Применение предложенного порядка синтеза систем с переменной структурой для разнотипных объектов на основе предварительного построения оптимальных траекторий стабилизации динамических процессов позволяет оптимизировать нелинейные

системы до шестого порядка. Сформированные минимальные условия оптимальности для различных критериев позволяют учитывать ограничения на управляющие воздействия и решать задачу синтеза для соответствующих функциональных задач управления: максимального быстродействия (для критических режимов) и минимума расхода энергии (для технологических режимов).

Неопределенность внешней среды и динамического объекта требует робастной коррекции оптимальной системы. Сформированные оптимальные траектории и управление являются задающими при формировании дополнительного робастного контура управления для компенсации неполной априорной определенности математической модели и неконтролируемых (неизмеряемых) возмущений и шумов.

Предложенный порядок синтеза робастно-оптимальных систем апробирован для нескольких моделей нелинейных динамических систем и продемонстрировал универсальность и инженерную практичность, а также эффективность при воздействии внешних ограниченных возмущений по показателям точности и расхода энергии управления.

Таким образом, разрешается классическая дуальная задача управления в условиях неопределенности с требованиями оптимальности, в соответствии с заданными критериями, переходных процессов.

## ВЫВОДЫ

В работе решена обобщенная задача синтеза робастно-оптимальных систем с переменной структурой обратных связей для управления переходными про-

цессами широкого класса нелинейных динамических систем (включая механические и электродинамические), которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Сформирован общий порядок построения оптимальных траекторий, определения моментов переключений и синтеза управляющих функций для многомерных систем.

Управление по рассогласованию траектории физического объекта и рассчитанной оптимальной траектории эталонной модели позволяет с учетом значений оптимального управления из эталонной системы формировать робастную подсистему, обеспечивающую инвариантность к неполной информации о динамической системе.

Приведенные результаты имитационного моделирования для стабилизации квадрокоптера и маневрирования морского судна в условиях действия внешнего возмущения и параметрических шумов демонстрирует обеспечение необходимой точности управления в окрестностях сформированной оптимальной траектории управляемых координат.

**Практическая значимость** заключается в создании алгоритмов и схемотехнических решений синтеза робастно-оптимальных систем переменной структуры для многомерных нелинейных динамических систем.

**Перспективы дальнейших исследований** предполагают формирование автоматизированных процедур синтеза робастно-оптимальных систем, что позволит создать программный инструмент для практического проектирования эффективных систем управления различными типами динамических объектов.

#### ЛИТЕРАТУРА / ЛІТЕРАТУРА

1. Kuntsevich V. M. Synthesis of Robust Optimal Adaptive Control Systems for Nonstationary Objects under Bounded Disturbances / V. M. Kuntsevich // Journal of Automation and Information Sciences. – 2004. – Vol. 36, Issue 3. – P. 14–24.
2. Horowitz I. Survey of quantitative feedback theory (QFT) / I. Horowitz // International Journal of Robust and Non-Linear Control. – 2001. – Vol. 11, Issue 10. – P. 887–921.
3. Automatic design of robust PID controllers based on QFT specifications / [R. Comasòlivas, T. Escobet, J. Quevedo] // IFAC Proceedings Volumes. – 2012. – Vol. 45, Issue 3. – P. 715–720.
4. Емельянов С.В. Системы автоматического управления переменной структуры: синтез скалярных и векторных систем УДК 681.51

#### РОБАСТНО-ОПТИМАЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

**Тимченко В. Л.** – д-р техн. наук, професор кафедри комп'ютеризованих систем управління, Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, Миколаїв, Україна.

**Лебедєв Д. О.** – аспірант, Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, Миколаїв, Україна.

#### АНОТАЦІЯ

**Актуальність.** Підвищення вимог до якості управління перехідними режимами (стабілізацією) різнотипних (механічні, електродинамічні) динамічних систем вимагає використання інженерних методів оптимального синтезу, що дозволяють вирішувати практичні завдання стабілізації багатовимірних нелінійних об'єктів керування під впливом збурень з урахуванням необхідності фізичної реалізації управляючих впливів.

**Мета.** Удосконалення методів робастно-оптимальної стабілізації нелінійних динамічних систем.

**Метод.** Застосування запропонованих робастно-оптимальних систем змінної структури засноване на попередньому формуванні оптимальних траекторій для прямих умов оптимальності, визначенні моментів перемикання і синтезі керуючих функцій, що забезпечують задані перехідні траекторії стабілізації об'єктів управління, а також робастної корекції з урахуванням неповної інформації про фізичну систему. Механізм побудови оптимальних траекторій з розрахунком необхідної кількості відрізків з нульовими значеннями відповідних похідних керованих координат може бути застосовано для загального випадку багатовимірних нелінійних нестационарних динамічних систем. Моменти перемикання управління в ланцюгах зворотних зв'язків об'єкта управління розраховуються на основі рішення системи алгебраїчних рівнянь і для динамічних систем шостого порядку включають введення провід-

© Тимченко В. Л., Лебедєв Д. О., 2019  
DOI 10.15588/1607-3274-2019-3-19

по состоянию и по выходу / С. В. Емельянов // Нелинейная динамика и управления. – 2007. – Вып. 5. – С. 5–24.

5. Optimal Control of Nonlinear Systems / [N. V. Balashevich, R. Gabasov, A. I. Kalinin, F. M. Kirillova] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 42, Issue 7. – P. 931–956.
6. Поляк Б. Т. Трудные задачи линейной теории управления : Некоторые подходы к решению / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 7–46.
7. Sushchenko O.A. Robust control of angular motion of platform with payload based on  $H_\infty$ -synthesis / O. A. Sushchenko // Journal of Automation and Information Sciences. – 2016. – Vol. 48, Issue 12. – P. 13–26.
8. Control allocation – A survey / T. Johansen, T. I. Fossen // Automatica. – 2013. – Vol. 49. – P. 1087–1103.
9. Ларин В. Б. Об обращении проблемы аналитического конструирования регуляторов // В. Б. Ларин. – Межд. научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». – 2004. – № 1. – С. 17–25.
10. Timchenko V. L. Optimization of nonlinear systems of variable structure for control of marine moving vehicles / V. L. Timchenko, O. A. Ukhin, D. O. Lebedev // International Journal of Automation and Information Sciences. – NY. – Beggell house inc. – 2017. – Vol. 49, Issue 7. – P. 33–47.
11. Robust-optimal control system of quadcopter for maritime traffic's monitoring / [V. L. Timchenko, D. O. Lebedev, K. A. Kuklina, I. V. Timchenko] // Proceeding of IEEE 4th international conference "Actual Problems Of Unmanned Aerial Vehicles Development". – 2017. – К. – P. 192–196.
12. Тимченко В. Л. Алгоритмические процедуры синтеза систем переменной структуры для управления морскими подвижными объектами / В. Л. Тимченко, Д. О. Лебедев // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2017. – № 4. – С. 200–209.
13. Fossen T. I. Kinematic models for maneuvering and seakeeping of marine vessels / T. I. Fossen, T. Perez // Journal of modeling, identification and control. – 2007. – Vol. 28, Issue 1. – P. 19–30.
14. Altug E. Control of a quadrotor helicopter using dual camera visual feedback / E. Altug, J. P. Ostrowski, C. J. Taylor // The International Journal of Robotics Research. – 2005. – Vol. 24, Issue 5. – P. 329–341.
15. Larin V. B. Synthesis of the quad-rotor flight control system / V. B. Larin, A. A. Tunik // Proceeding of IEEE 4th International Conference "Methods and Systems of Navigation and Motion Control". – 2016. – К. – P. 12–17.

Статья поступила в редакцию 18.02.2019.  
После доработки 22.06.2019.

них, субпровідних та ведених керованих координат. Стабілізація динамічної системи на відповідних заданих відрізках траєкторій забезпечується керуючими впливами, розрахованими на основі виконання балансувальних режимів для сил і моментів (і їх необхідних похідних), що діють на об'єкт управління. Робастність динамічної системи до неповної визначеності об'єкта і дії неконтрольованих зовнішніх і параметричних збурень досягається за рахунок введення коригуючого управління на основі неузгодженості поточної і оптимальної траєкторії стабілізації і реалізує вимоги мінімізації помилок управління і їх похідних.

**Результати.** Наведені приклади схемотехнічної реалізації робастний-оптимальних систем змінної структури і результати імітаційного моделювання для задач максимального швидкодії при маневруванні морського судна і мінімальних витрат енергії при управлінні польотом квадрокоптера.

**Висновки.** Наведені результати демонструють коректність застосування загальних принципів синтезу для різного виду об'єктів і ефективність управління в умовах впливу збурень.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** робастно-оптимальні системи змінної структури, критерії оптимальності, еталонна модель, неповна ви-значеність.

УДК 681.51

## ROBUST-OPTIMAL STABILIZATION OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

**Timchenko V. L.** – Dr. Sc., Professor of Department of the Computer's Control Systems, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine.

**Lebedev D. O.** – Postgraduate student, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine.

### ABSTRACT

**Context.** Increasing quality requirements for a transient control (stabilization) of various types (mechanical, electrodynamic) of dynamic systems require usage of engineering methods of optimal design, which allow solving practical problems of multidimensional nonlinear object control under the influence of disturbances taking into account physical feasibility of control actions.

**Objective.** Improvement of the robust-optimal stabilization of nonlinear dynamic systems.

**Method.** Design of the proposed robust-optimal systems with variable structure is based on the preliminary formation of optimal trajectories for direct optimality conditions, determination of switching moments, synthesis of control functions which provide movement along preliminary trajectories and robust correction based on incomplete information of the physical system. The mechanism for optimal trajectories formation contains calculation of the required amount of sections for zero values of the corresponding derivatives of control coordinates, and applicable for the general case of multidimensional nonlinear nonstationary dynamic systems. Control switching moments in the feedback loop of the controlled object are calculated based on the solution of algebraic system of equation and, for dynamic systems of the sixth order, include usage of leading, sub-leading and driven control coordinates. The stabilization process of the dynamic system on the corresponding predefined segments of the trajectories is provided by control actions which are calculated on the basis of the balance regimes for the forces and moments (and their required derivatives) that are applied to the control object. The robustness of the dynamic system to the incomplete certainty of the control object and to the influence of uncontrolled external and parametric perturbations is achieved by usage of corrective control based on the mismatch of the current and optimal stabilization trajectory. The robust control tries to meet the requirement for control errors' and its derivatives minimization.

**Results.** Examples of the circuit implementation of robust-optimal systems with variable structure and simulation results for the tasks of maximum speed during a marine vessel maneuvering and minimal energy costs during quadcopter flight control are given.

**Conclusions.** Shown results demonstrate correctness of the general design principles for various types of objects and control efficiency under influence of disturbances.

**KEYWORDS:** robust-optimal systems with the variable structure, optimality criteria, reference model, incomplete certainty.

### REFERENCES

1. Kuntsevich V. M. Synthesis of Robust Optimal Adaptive Control Systems for Nonstationary Objects under Bounded Disturbances, *Journal of Automation and Information Science*, 2004, Vol. 36, Issue 3, pp. 14–24.
2. Horowitz I. Survey of quantitative feedback theory (QFT), *International Journal of Robust and Non-Linear Control*, 2001, Vol. 11, Issue 10, pp. 887–921.
3. Comasólvias R., Escobet T., Quevedo J. Automatic design of robust PID controllers based on QFT specifications, *IFAC Proceedings Volumes*, 2012, Vol. 45, Issue 3, pp. 715–720.
4. Emelyanov S. V. Sistemyi avtomaticheskogo upravleniya peremennoy strukturyi: sintez skalyarnyih i vektornyih sistem po sostoyaniyu i po vyihodu, *Nelineynaya dinamika i upravleniya*, 2007, No. 5, pp. 5–24.
5. Balashevich N. V., Gabasov R., Kalinin A. I., Kirillova F. M. Optimal Control of Nonlinear Systems, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, Vol. 42, Issue 7, pp. 931–956.
6. Polyak B. T., Scherbakov P. S. Trudnyie zadachi lineynoy teorii upravleniya: Nekotoryie podhody k resheniyu, *Avtomatika i telemehhanika*, 2005, No 5, pp. 7–46.
7. Sushchenko O.A. Robust control of angular motion of platform with payload based on  $H_\infty$ -synthesis, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2016, Vol. 48, Issue 12, pp. 13–26.
8. Johansen T., Fossen T. I. Control allocation – A survey, *Automatica*, 2013, Vol. 49, pp. 1087–1103.
9. Larin V. B. Ob obraschenii problemyi analiticheskogo konstruirovaniya regulyatorov, *Mezhd. nauchno-tehnicheskii zhurnal «Problemyi upravleniya i informatiki»*, 2004, No. 1, pp. 17–25.
10. Timchenko V. L., Ukhin O. A., Lebedev D. O. Optimization of nonlinear systems of variable structure for control of marine moving vehicles, *International Journal of Automation and Information Sciences*, NY. Begell house inc., 2017, Vol. 49, Issue 7, pp. 33–47.
11. Timchenko V.L., Lebedev D.O., Kuklina K.A., Timchenko I. V. Robust-optimal control system of quadcopter for maritime traffic's monitoring, *Proceeding of IEEE 4th international conference "Actual Problems Of Unmanned Aerial Vehicles Development"*, 2017, K., pp. 192–196.
12. Timchenko V. L., Lebedev D. O. Algoritmicheskie protseduryi sinteza sistem peremennoy strukturyi dlya upravleniya morskimi podvizhnyimi ob'ektami, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2017, No. 4, pp. 200–209.
13. Fossen T. I., Perez T. Kinematic models for maneuvering and seakeeping of marine vessels, *Journal of modeling, identification and control*, 2007, Vol. 28, Issue 1, pp. 19–30.
14. Altug E., Ostrowski J. P., Taylor C. J. Control of a quadrotor helicopter using dual camera visual feedback, *The International Journal of Robotics Research*, 2005, Vol. 24, Issue 5, pp. 329–341.
15. Larin V. B., Tunik A. A. Synthesis of the quad-rotor flight control system, *Proceeding of IEEE 4th International Conference "Methods and Systems of Navigation and Motion Control"*, 2016. K., pp. 12–17.