МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 004.02

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРА С НЕСКОЛЬКИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Вовк С. М. – канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры компьютерных наук и информационных технологий Днипровского национального университета имени Олеся Гончара, Днипро, Украина.

Прокопчук О. Н. – аспирант кафедры компьютерных наук и информационных технологий Днипровского национального университета имени Олеся Гончара, Днипро, Украина.

АННОТАЦИЯ

Актуальность. В условиях, когда на разных частях интервала наблюдения параметр заданной модели данных принимает разные значения, возникает задача оценивания параметра с несколькими значениями. Объектом исследования в данной работе является процесс оценивания параметра с несколькими значениями.

Цель. Целью работы является разработка подхода к решению задачи оценивания нескольких значений неизвестного параметра для заданной модели данных.

Метод. Подход к решению задачи оценивания неизвестного параметра с несколькими значениями основан на построении функции невязки между данными и их моделью и последующем применении к ней критерия минимума протяженности. Критерий минимума протяженности позволяет индивидуализировать значения неизвестного параметра в виде локальных минимумов функционала квазипротяженности для заданной функции невязки. В дискретном случае предлагаемый подход заключается в поиске основных локальных минимумов многоэкстремальной целевой функции. Для решения этой задачи в одномерном случае предложен простой метод, эффективность которого проиллюстрирована на примерах задач с одним неизвестным линейным параметром и с одним неизвестным нелинейным параметром модели.

Результаты. В отличие от традиционных подходов, основанных на критерии наименьших квадратов или критерии наименьших модулей и обеспечивающих возможность оценивания только одного значения неизвестного параметра, предложенный подход предоставляет возможность оценивания нескольких значений неизвестного параметра. Численное моделирование одномерных задач аппроксимации данных моделями с одним неизвестным линейным параметром и с одним неизвестным нелинейным параметром подтвердило целесообразность предложенного подхода и его эффективность в условиях, когда необходимое сглаживание функционала не приводит к потере слабых локальных минимумов.

Выводы. Для оценивания неизвестного параметра с несколькими значениями целесообразно использовать подход, заключающийся в постановке и решении задачи минимизации функционала квазипротяженности, который построен на основе функции невязки данных с заданной моделью. Этот подход обеспечивает индивидуализацию значений неизвестного параметра путем формирования локальных минимумов целевой функции, которые отвечают искомым значениям параметра. Результаты численного моделирования одномерных задач для случаев линейного и нелинейного параметра подтвердили эффективность применения предложенного подхода.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: обработка, оценивание, критерий, протяженность, аппроксимация.

НОМЕНКЛАТУРА

A – амплитудный коэффициент;

$A_1,\ldots,A_M$ – значения коэффициента A;

$\overline{A}_i$ – среднее значение оценки A_i;

B – постоянный коэффициент;

$E^{(\alpha,\beta,q)}$ – функционал квазипротяженности;

F – некоторый функционал качества оценки;

$G(\nu)$ – преобразование Фурье от функции $g(x)$;

M – количество значений параметра θ;

N – количество элементов;

X – интервал наблюдения исходных данных;

X_i – i-я часть интервала X;

a – левая граница интервала;

b – правая граница интервала;

c – величина расширения интервала;

err – среднеквадратическая ошибка;

DOI 10.15588/1607-3274-2019-4-2

$f(x)$ – некоторая функция;
f_n – значение $f(x)$ для $x = x_n$;
$g(x)$ – функция, описывающая исходные данные;
g_n – значение $g(x)$ для $x = x_n$;
k – угловой коэффициент наклона прямой;
$k_S^{(\alpha,\beta,q)}$ – нормирующий коэффициент;
m_i – местоположение i-й гауссовой кривой;
n – номер элемента;
$p(\xi)$ – закон распределения ξ;
q – свободно настраиваемый параметр;
$s(x;\theta)$ – функция, описывающая модель данных;
$s_n(\theta)$ – значение $s(x;\theta)$ для $x = x_n$;
var – величина дисперсии оценок;
x – аргумент функции;
x_0 – аргумент нормировки функции $\psi_S^{(\alpha,\beta,q)}(x)$;
x_n – n-е значение аргумента x;
ΔA – шаг сетки по A;
ΔB – шаг сетки по B;
Δx – шаг дискретизации по аргументу x;
$\Delta \nu$ – шаг сетки по параметру ν;
Φ_p – p–е значение целевой функции;
α – свободно настраиваемый параметр;
β – свободно настраиваемый параметр;
δ – наибольший модуль отклонения;
θ – неизвестный параметр;
$\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_M$ – оценки значений параметра θ;
ν – частота;
ν_1, ν_2 – значения частоты ν;
ξ – случайная величина;
σ_i – полуширина i-й гауссовой кривой;
υ – параметр масштаба шума Коши;
φ_0 – начальная фаза;
$\psi(x)$ – произвольная функция потерь (стоимости);
$\psi_S^{(\alpha,\beta,q)}(x)$ – функция, задающая супермножество стоимостных функций.

ВВЕДЕНИЕ

Задача оценивания параметра с несколькими значениями возникает в условиях, когда на разных частях интервала наблюдения данные описываются одной и той же самой моделью, но с разными значениями этого параметра. Простым примером такой задачи является задача оценивания амплитудных уровней кусочно-постоянного сигнала [1–2]. В этой задаче моделью данных является константа, которая в некоторые моменты времени переключается с одного значения на другое значение. Другим примером является задача оценивания частоты по фрагменту записи частотно-манипулированного сигнала [3]. Можно отметить, что подобные задачи возникают в случае представления данных кусочной моделью, состоящей из неизвестных отрезков одной и той же самой функциональной зависимости с одним и тем же самым неизвестным параметром. Сложность решения таких задач обусловлена тем, что их математические постановки отвечают задачам невыпуклой оптимизации.

В данной работе рассматривается задача оценивания неизвестного параметра заданной модели данных для случая, когда на интервале наблюдения данных этот параметр принимает несколько различных значений. После обзора литературы дается описание предложенного подхода, сформулированного на основе критерия минимума протяженности. При этом отмечается важность настройки метода оценивания на текущую шумовую обстановку путем установления наилучших значений свободных параметров минимизируемого функционала. Эффективность предложенного подхода иллюстрируется на примере задачи с одним неизвестным линейным параметром модели и на примере задачи с одним неизвестным нелинейным параметром модели.

Объектом исследования в данной работе является процесс оценивания нескольких значений одного неизвестного параметра заданной модели данных.

Предмет исследования составляет задача оценивания нескольких значений одного неизвестного параметра для случая, когда неизвестный параметр является линейным параметром модели, и для случая, когда неизвестный параметр является нелинейным параметром модели.

Целью данной работы является разработка и описание подхода к постановке и решению задачи оценивания параметра с несколькими значениями.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на разных частях интервала наблюдения X модель $s(x;\theta)$ отвечает исходным данным $g(x)$ со своим значением параметра θ. Тогда задачу оценивания параметра θ с несколькими значениями можно сформулировать в виде задачи оптимизации:

$$\{\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_M\} = \arg\min_{\theta} F[g(x) - s(x;\theta)], \quad x \in X, \qquad (1)$$

в которой функционал F задает качество оценивания, а $\{\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_M\}$ есть множество оценок значений параметра θ, где величина M заранее неизвестна. Согласно (1), постановка задачи заключается в поиске местоположений локальных минимумов функционала F, включая поиск их количества M. Однако эта постановка требует уточнений. Во-первых, они связаны с необходимостью выбора вида функционала F, который должен обеспечивать как «индивидуализацию» значений неизвестного параметра θ, так и эффективное сглаживание шума в исходных данных. Во-вторых, они связаны с необходимостью введения правил отбора тех локальных минимумов, которым отве-

DOI 10.15588/1607-3274-2019-4-2

чают искомые значения неизвестного параметра. Эти уточнения будут сделаны дальше.

2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Классический подход к постановке задачи оценивания неизвестных параметров заданной модели данных основан на предположении, что каждый неизвестный параметр может принимать только одно значение. В рамках теории статистических оценок это предположение диктует необходимость поиска глобального минимума (или глобального максимума) показателя качества оценивания. В качестве такого показателя обычно принимают величину безусловного среднего риска, минимум которого при заданной функции потерь (функции стоимости) отвечает так называемой байесовской оценке [4]. При использовании простой функции потерь и предположении о постоянстве априорной плотности вероятности неизвестного параметра его байесовская оценка переходит в оценку максимального правдоподобия [5]. Последняя оценка широко используется на практике для получения оптимальных и квазиоптимальных решений [4]. Так, в предположении гауссовского закона распределения элементов исходных данных соответствующий критерий максимального правдоподобия становится квадратичным критерием, приводя к задаче наименьших квадратов [6]. Достоинство последней задачи заключается в том, что для модели данных, которая описывается константой, задача наименьших квадратов дает аналитическое решение, производя оценку в виде среднего арифметического значения всех элементов данных. Предположение о лапласовском законе распределения элементов исходных данных приводит к постановке задачи наименьших модулей, решением которой для модели данных в форме константы является медианное значение [7]. Однако подходы, основанные на использовании квадратичной, модульной или другой выпуклой функции потерь, являются неудовлетворительными как для обработки данных с аномальными значениями [8], так и для обработки данных, описываемых кусочной моделью с одной и той же функциональной зависимостью, но с разными значениями ее параметров. Можно отметить, что эти случаи являются похожими в том смысле, что по отношению к фрагменту данных с одним из истинных значений неизвестного параметра фрагменты данных с другими значениями этого параметра являются аномальными. По этой причине для решения задачи оценивания нескольких значений одного параметра можно использовать робастный подход, основанный на критерии обобщенного максимального правдоподобия и предназначенный для решения задач обработки данных при их неполном статистическом описании [9]. Традиционно робастный подход реализуется на основе функций потерь с горизонтальными асимптотами [10]. В классической теории статистических оценок этому отвечает выбор невыпуклых функций потерь, в качестве которых могут использоваться, например, прямоугольная или экспоненциальная функция потерь [4]. При этом выбор таких функций для практического использования должен завершаться установкой значений их настроечных параметров. Дополнительно к этому можно отметить, что предположение о наличии нескольких значений неизвестного параметра заставляет отказаться от требования поиска одного глобального минимума в пользу требования поиска нескольких локальных минимумов, которые можно считать основными. Последнее значительно усложняет решение задачи даже для случая линейного параметра модели, делая возможным получение искомого решения только в численном виде.

Основу робастного подхода составляет идея метода М-оценивания, которая для дискретного случая формулируется в виде задачи минимизации [9]:

$$\min_{\theta} \sum_{n=1}^{N} \psi[f_n;\theta], \qquad (2)$$

где элементы f_n; $n=1,...,N$ связаны с исходными данными и их моделью (например, f_n есть значение невязки между данными и их моделью для дискретного момента n), а ψ есть произвольная функция [10]. Использование в (2) в качестве функции ψ логарифма совместной плотности вероятности и предположения о полном статистическом описании данных приводит к критерию максимального правдоподобия [5].

В [11] предложено развитие идеи метода М-оценивания. Оно заключается в построении «супермножества» стоимостных функций, которое управляется набором из трех свободных параметров. Стоимостная функция, которая задает это супермножество, имеет вид [11]:

$$\psi_S^{(\alpha,\beta,q)}(x) = k_S^{(\alpha,\beta,q)}[(1+|x/\alpha|^q)^{\beta/q}-1], \qquad (3)$$

где $0<\alpha<\infty$, $0<q<\infty$, $-\infty<\beta\le 1$ и $\beta<q$, $k_S^{(\alpha,\beta,q)} = 1/[(1+|x_0/\alpha|^q)^{\beta/q}-1]$, а x_0 является точкой нормировки функции (3) на единицу, то есть $\psi_S^{(\alpha,\beta,q)}(x_0)=1$ (обычно $x_0=1$). Параметры α, β и q имеют смысл свободных параметров, которые позволяют менять поведение стоимостной функции (3). Элементами супермножества являются многие известные стоимостные функции, а разработанный механизм их преобразования позволяет выполнять настройку процесса обработки на текущую шумовую обстановку путем задания наилучших значений свободных параметров.

В [12] описаны два подхода к постановке задачи оценивания нескольких значений одного параметра на примере задачи определения амплитудных уровней кусочно-постоянного сигнала. Эти подходы можно условно обозначить терминами «аддитивный» и «мультипликативный». Аддитивный подход отвечает

DOI 10.15588/1607-3274-2019-4-2

случаю, когда общий (результирующий) функционал получается объединением всех возможных частных функционалов, получаемых для отдельных частей интервала наблюдения X, на которых искомый параметр принимает одно значение. Тогда если частные функционалы являются выпуклыми, то и общий функционал будет выпуклым. Следовательно, в этом случае все минимумы частных функционалов будут сливаться в один общий глобальный минимум. Последнее означает, что для решения рассматриваемой задачи в рамках указанного аддитивного подхода необходимо использовать функционалы, которые не являются выпуклыми. Мультипликативный подход заключается в построении полинома заданной степени для каждого элемента невязки, что при выборе квадратичного критерия качества оценивания приводит к необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов полинома и поиску корней данного полинома. Мультипликативный подход может быть применен также и при выборе неквадратичного критерия качества оценивания, однако в этом случае решение задачи можно получить только численно [12].

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для решения рассматриваемой задачи используем критерий минимума протяженности [13]. Он заключается в требовании минимизировать протяженность функции, используемой для поиска решения. Целесообразность применения этого критерия для решения рассматриваемой задачи определяется тем, что априорно некоторой части исходных данных $g(x)$ должна отвечать модель с одним из истинных значений неизвестного параметра, а остальной части данных $g(x)$ может отвечать модель с другими истинными значениями этого параметра. Тогда функция $s(x;\theta)$ с одним из истинных значений параметра θ будет корректно приближать $g(x)$ только на некоторой части интервала наблюдения, которая в общем случае является неизвестной. Следовательно, при отсутствии шума можно потребовать, чтобы суммарная протяженность подынтервалов несовпадения данных $g(x)$ с их моделью $s(x;\theta)$ была минимальной. В этом случае вдоль оси значений неизвестного параметра θ должны наблюдаться локальные минимумы функционала строгой протяженности невязки [13], местоположение которых будет указывать на искомые значения параметра, а их количество – на количество таких значений. Но поскольку на практике значения функции $g(x)$ искажены шумом и, возможно, грубыми ошибками, то критерий минимума протяженности целесообразно применять не в форме задачи минимизации функционала строгой протяженности, а в форме задачи минимизации функционала квазипротяженности $E^{(\alpha,\beta,q)}$ [13]. При этом будем предполагать, что локальные минимумы функционала квазипротяженности, которые отвечают искомым значениям неизвестного параметра, существуют для заданных значений α, β и q. Тогда постановка задачи (1) принимает вид:

$$\{\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_M\} = \arg\min_{\theta} E^{(\alpha,\beta,q)}[g(x)-s(x;\theta)], \tag{4}$$

где

$$E^{(\alpha,\beta,q)}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_S^{(\alpha,\beta,q)}[f(x)]dx . \tag{5}$$

Учитывая (3) и (5), развернутая запись задачи (4) есть:

$$\min_{\theta}\left\{ k_S^{(\alpha,\beta,q)} \cdot \int_X \left[\left(1 + \left| \frac{g(x)-s(x;\theta)}{\alpha} \right|^q \right)^{\beta/q} - 1 \right] dx \right\}, \tag{6}$$

где $k_S^{(\alpha,\beta,q)} > 0$ для $0 < \beta < 1$ и $k_S^{(\alpha,\beta,q)} < 0$ для $-\infty < \beta < 0$, а при $\beta \to \pm 0$ вместо (6) имеем:

$$\begin{aligned} &\min_{\theta}\left\{ k_S^{(\alpha,0,q)} \cdot \int_X \ln\left(1 + \left| \frac{g(x)-s(x;\theta)}{\alpha} \right|^q \right) dx \right\} = \\ &= \min_{\theta}\left\{ \int_X \ln\left(1 + \left| \frac{g(x)-s(x;\theta)}{\alpha} \right|^q \right) dx \right\} \end{aligned}, \tag{7}$$

где $k_S^{(\alpha,0,q)} = 1/\ln[1+|x_0/\alpha|^q] > 0$.

В дискретном случае (6) и (7) принимают вид:

$$\min_{\theta}\left\{ k_S^{(\alpha,\beta,q)} \sum_{n=1}^{N} \left[\left(1 + \left| \frac{g_n - s_n(\theta)}{\alpha} \right|^q \right)^{\beta/q} - 1 \right] \right\} \tag{8}$$

и

$$\min_{\theta}\left\{ \sum_{n=1}^{N} \ln\left(1 + \left| \frac{g_n - s_n(\theta)}{\alpha} \right|^q \right) \right\}. \tag{9}$$

Рассмотрим оценивание неизвестного линейного параметра, которым является амплитудный коэффициент модели данных. Предположение о том, что на интервале наблюдения этот коэффициент принимает несколько значений, можно записать в виде:

$$s(x;A) = \begin{cases} A_1 f(x), & x \in X_1; \\ \quad ... & \\ A_M f(x), & x \in X_M, \end{cases} \tag{10}$$

где $\bigcup_{i=1}^{M} X_i = X$; $X_i \cap X_j = \varnothing$; $i \neq j$. Обобщая запись (10) в виде:

$$s(x;A) = Af(x); \quad x \in X, \tag{11}$$

где параметр A принимает значения $A_1,...,A_M$, и подставляя (11) в (8) и (9), для дискретного случая получим задачи:

DOI 10.15588/1607-3274-2019-4-2

$$\min_A \left\{ k_S^{(\alpha,\beta,q)} \sum_{n=1}^{N} \left[\left(1 + \left| \frac{g_n - Af_n}{\alpha} \right|^q \right)^{\beta/q} - 1 \right] \right\} \qquad (12)$$

и

$$\min_A \left\{ \sum_{n=1}^{N} \ln \left(1 + \left| \frac{g_n - Af_n}{\alpha} \right|^q \right) \right\}, \qquad (13)$$

которые являются одномерными многоэкстремальными задачами оптимизации относительно неизвестного параметра A. Для численного решения задач (12)–(13) используем метод перебора значений параметра A на равномерной сетке в известном интервале. Этот интервал зададим в виде: $[a-c, b+c]$, где a и b задают границы межквартильного интервала для значений отношения $g(x_n)/f(x_n)$; $n = 1,...,N$, а $c > 0$ задает величину расширения межквартильного интервала для исключения возможности появления локальных минимумов на его границах (это необходимо для применения указанного ниже способа поиска локальных минимумов, по крайней мере, в случае отсутствия шума). Шаг сетки ΔA установим равным желаемой точности оценивания, например, равным одной сотой части длины указанного межквартильного интервала. Тогда поиск всех локальных минимумов можно осуществить следующим способом. Для заданных значений α, β, q и для каждого значения параметра A из заданного интервала его значений вычислим P значений целевой функции Φ_p; $p = 1,...,P$, которая записана в (12)–(13) под знаками операции минимизации. Далее возьмем тройку соседних значений Φ_{p-1}, Φ_p и Φ_{p+1}, где $1 < p < P$, и проверим выполнение неравенств:

$$(\Phi_{p+1} - \Phi_p)(\Phi_p - \Phi_{p-1}) < 0, \qquad (14)$$

$$(\Phi_{p+1} - 2\Phi_p + \Phi_{p-1}) > 0. \qquad (15)$$

Одновременное выполнение неравенств (14) и (15) указывает на то, что Φ_p является минимальным значением среди своих соседей Φ_{p-1} и Φ_{p+1}. Аккумулируя такие минимальные значения, получим набор локальных минимумов целевой функции.

Отбор основных локальных минимумов выполним таким способом. Основными локальными минимумами будем считать наиболее глубокие локальные минимумы, которые превышают заданный порог глубины и расположены далеко друг от друга. Поэтому если в результате вычислений глубокие локальные минимумы окажутся ближе друг к другу, чем величина допустимого расстояния, то этот факт будем связывать с недостаточным сглаживанием целевой функции, которое следует повторить с увеличенным значением параметра α.

Рассмотрим задачу оценивания неизвестного нелинейного параметра, который принимает несколько значений. В общем виде предлагаемый подход к ее решению заключается в построении функционала квазипротяженности, зависящего от неизвестного нелинейного параметра, и его минимизации методом нулевого порядка на заданном интервале значений. Этот интервал может формироваться как на основе априорных сведений, так и на основе множества «пробных» значений, получаемых в результате решения соответствующего нелинейного уравнения относительно неизвестного параметра. Далее в качестве примера рассмотрим задачу оценивания частоты частотно-манипулированного сигнала:

$$s(x) = \begin{cases} A\sin(2\pi\nu_1 x + \varphi_0), & x \in X_1; \\ A\sin(2\pi\nu_2 x + \varphi_0), & x \in X_2, \end{cases} \qquad (16)$$

где переменная x имеет смысл переменной времени, амплитуда A и начальная фаза φ_0 полагаются известными, а $\nu_1 \geq 0$ и $\nu_2 \geq 0$, где $\nu_1 \neq \nu_2$, есть неизвестные значения частоты. Обобщая (16) в виде:

$$s(x;\nu) = A\sin(2\pi\nu x + \varphi_0); \quad x \in X, \qquad (17)$$

где параметр ν принимает значения ν_1 и ν_2, и подставляя (17) в (8) и (9), для дискретного случая получим задачи:

$$\min_\nu \left\{ c \cdot \sum_{n=1}^{N} \left[\left(1 + \left| \frac{g_n - A\sin(2\pi\nu x_n)}{\alpha} \right|^q \right)^{\beta/q} - 1 \right] \right\}, \qquad (18)$$

где $c = k_S^{(\alpha,\beta,q)}$, и

$$\min_\nu \left\{ \sum_{n=1}^{N} \ln \left(1 + \left| \frac{g_n - A\sin(2\pi\nu x_n)}{\alpha} \right|^q \right) \right\}. \qquad (19)$$

Задачи (18)–(19) являются одномерными многоэкстремальными задачами оптимизации относительно неизвестного параметра ν. Если дискретные отсчеты g_n заданы с равномерным шагом дискретизации Δx, то в этом случае для задания интервала поиска значений параметра ν можно использовать подход, общепринятый в рамках метода дискретного преобразования Фурье. Он заключается в задании сетки значений параметра ν с шагом $\Delta\nu = 1/(N \cdot \Delta x)$ в интервале $[-\nu_{\max}, \nu_{\max}]$, где $\nu_{\max} = 1/(2 \cdot \Delta x)$. Тогда поиск всех локальных минимумов функционала квазипротяженности можно осуществить способом, основанным на проверке неравенств (14)–(15) с дополнительной проверкой его значений в граничных точках интервала. Отбор основных локальных минимумов можно выполнить путем сравнения их глубины с заданным пороговым значением и сравнения величины близости их расположения с величиной допустимого расстояния.

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Моделирование задачи с одним неизвестным линейным параметром, который принимал два различных значения, выполнялось на основе функциональ-

DOI 10.15588/1607-3274-2019-4-2

ной зависимости, состоящей из суммы двух гауссовых функций и шума. Эта зависимость имела вид:

$$g(x) = A_1 e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} + A_2 e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} + \xi, \qquad (20)$$

где $A_1 = 1$; $A_2 = 2$; $m_1 = 1{,}5$; $m_2 = 4$; $\sigma_1 = 0{,}5$; $\sigma_2 = 0{,}25$, и была задана в интервале значений аргумента $x \in [0;\, 5]$ с шагом $\Delta x = 0{,}01$ на $N = 501$ точке, включая концы интервала. Случайная величина ξ была распределена по закону Коши: $p(\xi) = (\upsilon/\pi)\cdot(\xi^2 + \upsilon^2)^{-1}$ с параметром масштаба $\upsilon = 0{,}01$ и нулевым параметром сдвига. Поскольку для данного численного моделирования имеем: $\Delta m = |m_2 - m_1| = 2{,}5$, то $\Delta m = 5\sigma_1 = 10\sigma_2$. Последнее означает, что заданные гауссовы функции практически не влияют друг на друга. По этой причине форма модельной функции была задана в виде:

$$f(x) = e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} + e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \qquad (21)$$

а сама модель описана соотношением (11), в котором неизвестный амплитудный параметр A принимал два значения: A_1 и A_2. Таким образом, данная задача состояла в получении оценок двух значений одного неизвестного параметра A.

Второй пример задачи с неизвестным линейным параметром составляла задача, в которой этот параметр принимал три различных значения. Для ее моделирования в качестве исходной зависимости использовался зашумленный пилообразный сигнал, модель которого задавалась отрезками прямой линии с известным угловым коэффициентом. Учитывая данные предположения, исходная зависимость моделировалась на основе формулы:

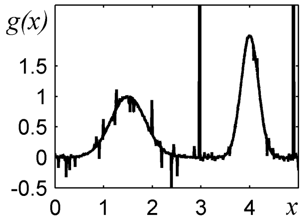
$$g(x) = kx + B + \xi, \qquad (22)$$

где $k = 3$, случайная величина ξ была распределена по закону Коши с параметром масштаба $\upsilon = 0{,}1$ и нулевым параметром сдвига, а неизвестный параметр B принимал такие значения: $B = 0$ для $x \in [0;\, 2)$, $B = -7$ для $x \in [2;\, 4)$ и $B = -14$ для $x \in [4;\, 6]$. Исходная зависимость (22) подвергалась дискретизации с шагом $\Delta x = 0{,}01$ на интервале $[0;\, 6]$ и, таким образом, была задана на $N = 601$ точке, включая концы указанного интервала. Задача состояла в оценивании трех значений неизвестного параметра B по известным значениям функции $g(x)$ при известном значении k.

Моделирование задачи с одним неизвестным нелинейным параметром, который принимал несколько значений, выполнялось на основе функциональной зависимости (16), в которой $A = 1$, $\varphi_0 = \pi/8$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$, $\Delta x = 0{,}01$, $X_1 = [0;\, 2{,}2]$, $X_2 = (2{,}2;\, 5]$ и, следовательно, $X = X_1 \cup X_2 = [0;\, 5]$. К каждому элементу данных, полученных посредством дискретизации этой зависимости с шагом $\Delta x = 0{,}01$ в интервале $X = [0;\, 5]$, добавлялась случайная величина ξ, распределенная по закону Коши с параметром масштаба $\upsilon = 0{,}01$ и нулевым параметром сдвига. Таким образом, общее количество элементов исходных данных было равно $N = 501$ (включая концы интервала), а максимальной положительной частоте отвечало значение $\nu_{max} = 50$. В качестве модельной функции использовалась функция (17), частота которой менялась с шагом $\Delta\nu = 1/((N-1)\cdot\Delta x) = 0{,}2$ в интервале (полосе частот) $[0;\, 50]$. Поскольку $\nu_1 = 1$ и $\nu_2 = 2$, то эти значения частоты попадали в узлы построенной сетки, а именно в шестой и в 11-й узлы, соответственно. С целью сравнения результатов, на основе алгоритма дискретного преобразования Фурье строился дискретный спектр исходных данных. Кроме моделирования данной задачи с указанным значением параметра масштаба шума Коши, выполнялось также ее моделирование со значительно увеличенным (в 10, 100 и 1000 раз) значением этого параметра. Такое моделирование имело целью исследовать потенциальные возможности предложенного подхода и показать его преимущество над подходом, основанным на методе дискретного преобразования Фурье.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 1 и рис. 2 приведены результаты моделирования задачи оценивания двух значений неизвестного линейного параметра, которым являлся амплитудный параметр A. На рис. 1а приведена одна из случайных реализаций зависимости (20), а на рис. 1б приведена зависимость (21), которая использовалась в качестве модели.



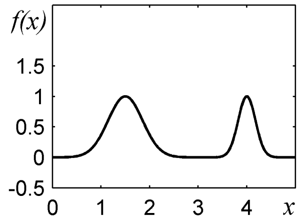


Рисунок 1 – Моделирование задачи с линейным параметром:
а – исходная зависимость с шумом Коши; б – модель

Рис. 2а, рис. 2б и рис. 2в отображают целевые функции, которые были получены для $\beta = 0$ и $q = 2$ в случаях $\alpha = 0{,}001$, $\alpha = 0{,}03$ и $\alpha = 1$, условно обозначенных как случаи недостаточного, оптимального и чрезмерного сглаживания, соответственно. Для всех этих трех случаев расширенный межквартильный интервал был равен $[0{,}909;\, 2{,}032]$, сформированный шаг сетки $\Delta A = 0{,}011$, $c = \Delta A$ и $P = 103$. Для лучшей визуализации графиков функционала квазипротяженности интервал значений параметра A был продолжен влево и вправо с шагом ΔA таким образом, чтобы он был не меньше интервала $[0;\, 3]$.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-4-2

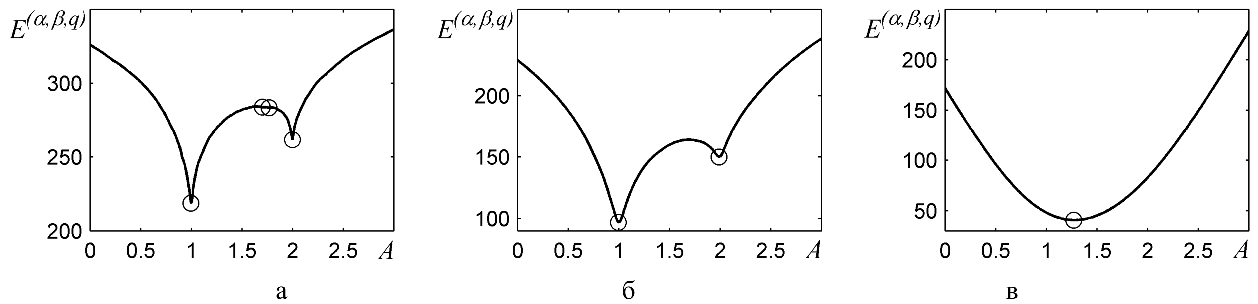


Рисунок 2 – Целевая функция для линейного параметра при:
а – недостаточном сглаживании; б – оптимальном сглаживании; в – чрезмерном сглаживании; найденные локальные минимумы обозначены кружками

На рис. 2а видно, что для $\alpha = 0{,}001$ было получено четыре локальных минимума, которым отвечали значения 0,997; 1,701; 1,767 и 1,999, соответственно. Однако этот результат оказался неустойчивым при уменьшении шага сетки ΔA до величины $\Delta A = 0{,}001$, что привело к увеличению количества локальных минимумов до семи штук, которым отвечали значения 0,998; 1,003; 1,403; 1,703; 1,760; 1,772 и 1,998, соответственно. При этом первые два из них, которые были самыми глубокими, оказались расположены слишком близко друг к другу. Поэтому использованное здесь значение параметра сглаживания $\alpha = 0{,}001$ следует считать недостаточным. На рис. 2б видно, что для $\alpha = 0{,}03$ было получено два локальных минимума, которым отвечали значения $0{,}997$ и $1{,}988$, соответственно. При этом уменьшение шага сетки не приводило к появлению новых локальных минимумов. На рис. 2в видно, что для $\alpha = 1$ был получен один локальный минимум, которому отвечало значение $1{,}272$. Этот минимум также был устойчив к уменьшению шага сетки. Таким образом, выбор значения $\alpha = 0{,}03$ оказался наилучшим, так как он привел к верной оценке как количества значений амплитудного параметра, так и самих значений. Более того, для $\alpha = 0{,}03$ моделирование по множеству из 100 случайных реализаций шума Коши показало устойчивость получаемых оценок к различным реализациям шума. Так, в этом случае количество локальных минимумов всегда равнялось двум, а оценки искомых значений амплитудного параметра имели такие характеристики: среднее значение оценок равнялось $\overline{A}_1 = 1{,}003$ и $\overline{A}_2 = 1{,}990$, дисперсия (квадрат отклонения от среднего значения) оценок составляла величины $\mathrm{var}(A_1) = 1{,}54 \cdot 10^{-5}$ и $\mathrm{var}(A_2) = 2{,}21 \cdot 10^{-5}$, среднеквадратическая ошибка оценивания была равна $err(A_1) = 0{,}005$ и $err(A_2) = 0{,}011$, а максимальное (по модулю) отклонение от истинного значения составляло величины $\delta(A_1) = 0{,}012$ и $\delta(A_2) = 0{,}025$. Отметим также, что при проведении моделирования выбор $\alpha = 0{,}01$ приводил к появлению лишнего (третьего) локального минимума в 14 случаях из 100, а выбор $\alpha = 0{,}1$ приводил к потере более слабого (второго) локального минимума в 3 случаях из 100. Однако выбор $\alpha = 0{,}08$ давал по-прежнему устойчивый результат, так как всегда приводил к двум локальным минимумам. При увеличении параметра масштаба шума Коши в 10 раз выбор $\alpha = \upsilon = 0{,}1$ практически всегда (в 98 случаях из 100) приводил к потере более слабого (второго) минимума. Таким образом, для случая неизвестного линейного параметра область применимости предложенного подхода оказалась ограничена относительно большими значениями отношения сигнал/шум, которое можно рассматривать как отношение разности искомых амплитудных значений к значению параметра масштаба шума.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-4-2

На рис. 3. и рис. 4 приведены результаты моделирования для второго примера задачи оценивания нескольких значений неизвестного линейного параметра. На рис. 3а приведена одна из случайных реализаций исходной зависимости (22) для $\upsilon = 0{,}1$, а на рис. 3б – применяемая модель линии: $f(x) = kx + B$ с одним из возможных значений параметра B.

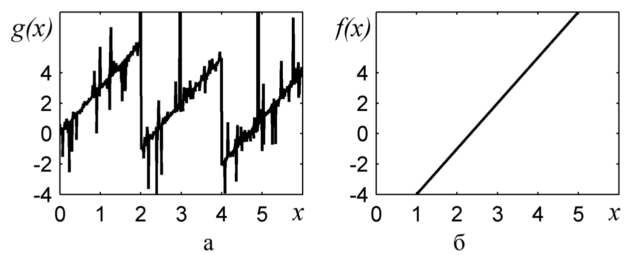
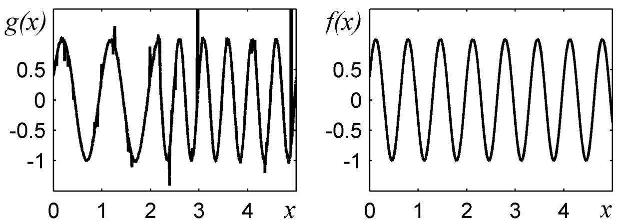


Рисунок 3 – Моделирование задачи с линейным параметром:
а – исходная зависимость с шумом Коши; б – модель

Рис. 4а, рис. 4б и рис. 4в отображают соответствующие целевые функции, которые были получены для $\beta = 0$ и $q = 2$ в случаях $\alpha = 0{,}001$; $\alpha = 0{,}03$ и $\alpha = 1$. Для всех этих случаев расширенный межквартильный интервал был равен $[-14{,}030; 0{,}051]$, а сформированный шаг сетки $\Delta B = 0{,}138$, $c = \Delta B$ и $P = 103$. Для лучшей визуализации графиков функционала квазипротяженности интервал значений параметра B был продолжен влево и вправо с шагом ΔB таким образом, чтобы он был не меньше $[-30; 10]$. Из рассмотрения указанных рисунков видно, что для значений α, которые меньше значения υ, функционал квазипротяженности содержит лишние локальные минимумы, а для значения α, которое больше значения υ, количество локальных минимумов равно количеству искомых значений параметра B. Действительно, для $\alpha = 0{,}001$ была получена пятерка значений: $(-14{,}030;\ -6{,}990;\ -3{,}262;\ -2{,}710;\ 0{,}051)$; для $\alpha = 0{,}03$ была получена четверка значений: $(-14{,}030;$ $-6{,}990;\ -3{,}262;\ 0{,}051)$ и для $\alpha = 1$ – тройка значений: $(-13{,}754;\ -6{,}990;\ 0{,}225)$. Из этих результатов можно заключить, что для данного моделирования лучшим значением параметра сглаживания является значение $\alpha = 1$.

На рис. 5 и рис. 6 приведены результаты моделирования задачи оценивания двух значений неизвестного нелинейного параметра, которым являлась частота синусоидального сигнала. На рис. 5а приведена одна из случайных реализаций зависимости (16) в шуме Коши, а на рис. 5б приведена модель с одним из возможных значений частоты.



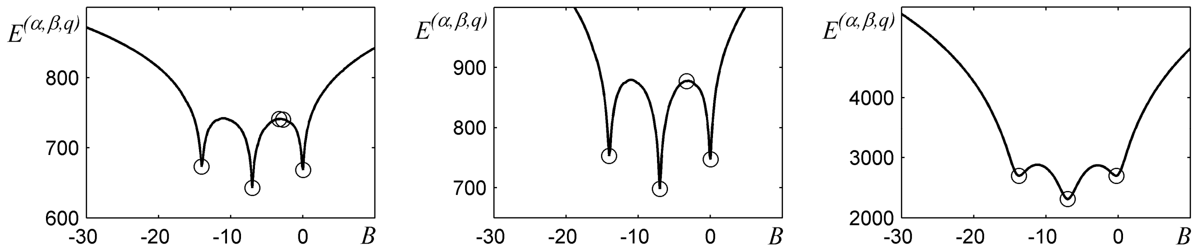
а б

Рисунок 5 – Моделирование задачи с нелинейным параметром: а – исходная зависимость с шумом Коши; б – модель

Рис. 6а, рис. 6б и рис. 6в отображают целевые функции, которые были получены для $\beta = 0$ и $q = 2$ в случаях $\alpha = 0{,}001$; $\alpha = 0{,}03$ и $\alpha = 1$; при этом область их визуализации была ограничена полосой частот $[0; 10]$. На этих рисунках видно, что оценки искомых значений частоты, которым отвечают местоположения двух самых глубоких локальных минимумов, практически точно совпадают с искомыми значениями частоты. Моделирование этой задачи со значительно (в 10, 100 и 1000 раз) меньшим значением шага $\Delta\nu$ показало значительное увеличение общего количества локальных минимумов. В частности, для случая $\alpha = 0{,}001$ уменьшение $\Delta\nu$ в 1000 раз привело к росту количества локальных минимумов с 76 до 39857 штук. Однако при этом основные локальные минимумы не расщеплялись, а количество локальных минимумов, которые были глубже, чем среднее арифметическое значение функционала, оставалось равным двум. Таким образом, для данной задачи порог, равный среднему арифметическому значению функционала, позволяет выполнить отбор основных локальных минимумов.

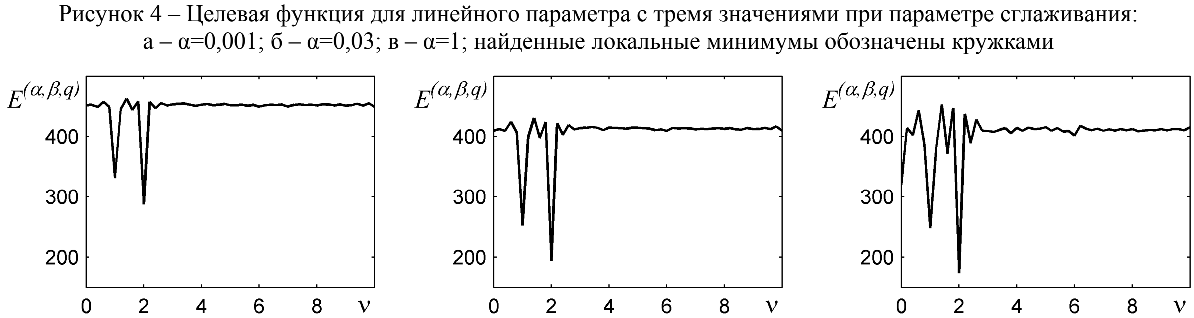
Моделирование данной задачи для $\alpha = 0{,}03$ по множеству из 100 случайных реализаций шума Коши показало устойчивость получаемых оценок. Так, в случае $\Delta\nu = 0{,}2$ два самых глубоких локальных минимума всегда давали такие оценки искомых значений частоты, которые были равны истинным значениям. Улучшение желаемой точности оценивания путем задания величины $\Delta\nu = 0{,}002$ практически не изменило этот результат: оценка частоты ν_1 в 98 случаях из 100 была равна искомому первому значению $1{,}000$ и в оставшихся двух случаях была равна $0{,}998$, а оценка частоты ν_2 в 100 случаях из 100 была равна искомому второму значению $2{,}000$.

На рис. 7 приведены результаты моделирования данной задачи в условиях относительно сильного шу-



а б в

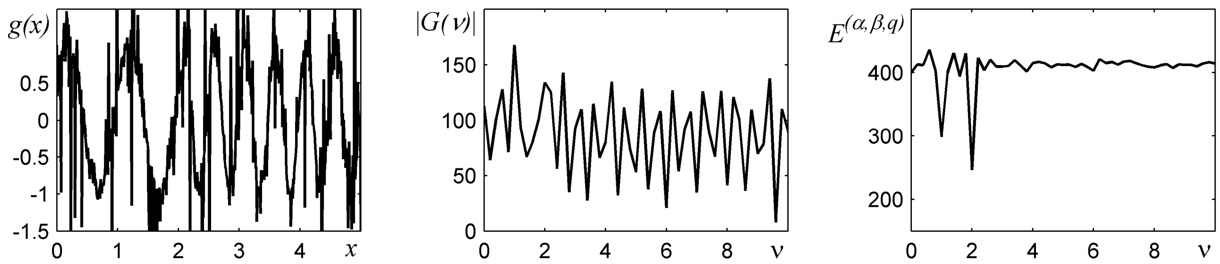
Рисунок 4 – Целевая функция для линейного параметра с тремя значениями при параметре сглаживания: а – α=0,001; б – α=0,03; в – α=1; найденные локальные минимумы обозначены кружками



а б в

Рисунок 6 – Целевая функция для нелинейного параметра при параметре сглаживания: а – α=0,001; б – α=0,03; в – α=1

DOI 10.15588/1607-3274-2019-4-2



а б в

Рисунок 7 – Моделирование при сильном шуме:
а – исходные данные; б – модуль спектра; в – функционал квазипротяженности

ма, который моделировался шумом Коши с параметром масштаба $\upsilon = 0{,}1$. На рис. 7а представлена одна из случайных реализаций исходных данных $g(x)$. На рис. 7б представлен модуль Фурье-спектра $G(\nu)$ этой случайной реализации, который был получен посредством применения к ней дискретного преобразования Фурье и вычисления модуля. Здесь видно, что при заданном уровне шуме невозможно оценить искомые значения частоты. На рис. 7в представлена целевая функция, которая отвечает функционалу квазипротяженности с параметрами $\alpha = \upsilon$, $\beta = 0$ и $q = 2$. Здесь видно, что два самых глубоких локальных минимума позволяют корректно оценить искомые значения частоты. Более того, увеличение уровня шума еще в 10 раз (путем установления значения $\upsilon = 1$) не устранило возможность корректного оценивания значения частоты посредством функционала квазипротяженности. Однако увеличение уровня шума еще в 10 раз (путем установления значения $\upsilon = 10$) сделало это невозможным.

6 ОБСУЖДЕНИЕ

Оценки количества значений и непосредственно самих значений неизвестного линейного параметра показывают, что они существенно зависят от величины параметра сглаживания α . Из сравнения рис. 2а, рис. 2б и рис. 2в видно, что при недостаточном сглаживании имеем близко расположенные друг к другу локальные минимумы, а при чрезмерном сглаживании имеем только один минимум. Поэтому если априорно известно, что неизвестный параметр может принимать несколько значений, то появление множества близкорасположенных минимумов целевой функции говорит о недостаточном сглаживании, а появление только одного минимума – о чрезмерном сглаживании функционала. Однако даже в случае оптимального сглаживания (рис. 2б) нельзя надеяться на получение оценки с точностью, которая меньше величины масштаба шума. В самом деле, полученные результаты показывают, что в этом случае максимальное отклонение оценок от истинных значений оказалось больше заданной точности в два раза.

При сильном сглаживании функционала квазипротяженности возможна потеря его слабых локальных минимумов, которая приводит к ошибкам оценивания. Поскольку при наличии шума сглаживание функционала является необходимой операцией, то при потере слабых минимумов предложенный подход можно улучшить путем поиска точек перегиба функционала, в которые могут превращаться его локальные минимумы при сильном сглаживании.

Следует также отметить, что для данной задачи арифметическое усреднение реализаций исходных данных не позволяет улучшить их качество, так как такое усреднение реализаций шума Коши бесполезно.

Оценки количества значений и непосредственно самих значений неизвестного нелинейного параметра показывают, что они слабо зависят от параметра сглаживания α. Однако они требуют использования достаточно мелкого шага сетки по такому параметру. В представленном примере такая сетка была сформирована по аналогии с сеткой метода дискретного преобразования Фурье. С другой стороны, подобная сетка может быть сформирована и на основе множества «пробных» значений параметра, получаемых в результате решения соответствующего нелинейного уравнения.

В целом, результаты моделирования подтверждают целесообразность и демонстрируют эффективность предложенного подхода.

ВЫВОДЫ

Решена актуальная проблема оценивания неизвестного параметра заданной модели данных в условиях, когда на интервале наблюдения данных этот параметр принимает несколько значений. Для решения этой проблемы предложен подход, который заключается в постановке и решении задачи минимизации функционала квазипротяженности от функции невязки данных с их моделью. Этот подход обеспечивает индивидуализацию значений неизвестного параметра в виде локальных минимумов соответствующей целевой функции. Результаты численного моделирования задачи для случаев линейного и нелинейного параметров подтвердили эффективность применения предложенного подхода.

Научная новизна полученных результатов состоит в том, что впервые предложен общий подход к оцениванию неизвестного параметра с несколькими значениями, позволяющий путем минимизации функционала квазипротяженности функции невязки по

DOI 10.15588/1607-3274-2019-4-2

неизвестному параметру заданной модели данных и поиска его основных локальных минимумов получить оценки нескольких значений неизвестного параметра.

Практическое значение полученных результатов заключается в том, что они могут использоваться для постановки и решения задач обработки данных в условиях, когда на интервале наблюдения модель данных представляется кусочной функцией с одной и той же самой функциональной зависимостью.

Перспективы дальнейших исследований связаны с разработкой методов решения задач для случая нескольких неизвестных параметров, каждый из которых может принимать несколько значений.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках госбюджетной научно-исследовательской темы Днипровского национального университета «Алгоритмічне та програмне забезпечення інформаційних технологій» (номер государственной регистрации 0119U101205).

ЛІТЕРАТУРА / ЛИТЕРАТУРА

1. Little M. A. Generalized methods and solvers for noise removal from piecewise constant signals. I. Background theory / M. A. Little, N. S. Jones // Proceedings of the Royal Society A. – 2011. – Vol. 467. – P. 3088–3114. DOI:10.1098/rspa.2010.0671.
2. Little M. A. Generalized methods and solvers for noise removal from piecewise constant signals. II. New methods / M. A. Little, N. S. Jones // Proceedings of the Royal Society A. – 2011. – Vol. 467. – P. 3115–3140. DOI: 10.1098/rspa.2010.0674.
3. Каплун Д. И. Разработка и исследование демодуляторов сигналов с псевдослучайной перестройкой рабочей частоты / [Д. И. Каплун, В. В. Гульванский, И. И. Канатов и др.] // Известия вузов России. Радиоэлектроника. – 2017. – № 6. – С. 15–21.
4. Куликов Е. И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. – М. : Сов. радио, 1978. – 296 с.
5. Millar R. B. Maximum Likelihood Estimation and Inference: With Examples in R, SAS and ADMB / R. B. Millar. – New York : Wiley, 2011. – 376 p.
6. Wolberg J. Data Analysis Using the Method of Least Squares: Extracting the Most Information from Experiments / J. Wolberg. – Berlin : Springer-Verlag, 2005. – 250 p. DOI: 10.1007/3-540-31720-1.
7. Elgmati E. A. Quartile Method Estimation of Two-Parameter Exponential Distribution Data with Outliers / E. A. Elgmati, N. B. Gredni // International Journal of Statistics and Probability. – 2016. – Vol. 5, № 5. – P. 12–15. DOI: 10.5539/ijsp.v5n5p12.
8. Chandola V. Anomaly detection: A survey / V. Chandola, A. Banerjee, V. Kumar // ACM Computing Surveys. – 2009. – Vol. 41, № 3. – P. 15–58. DOI: 10.1145/1541880.1541882.
9. Huber P. Robust statistics. 2nd ed. / P. Huber, E. M. Ronchetti. – Hoboken : Wiley, 2009. – 370 p.
10. Shevlyakov G. L. Robustness in data analysis: criteria and methods / G. L. Shevlyakov, N. O. Vil'chevski. – Utrecht : VSP, 2002. – 310 p.
11. Borulko V. F. Minimum-duration filtering / V. F. Borulko, S. M. Vovk // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2016, №1. – С.7–14. DOI: 10.15588/1607-3274-2016-1-1.
12. Vovk S. M. Determination of amplitude levels of the piecewise constant signal by using polynomial approximation / S. M. Vovk, V. F. Borulko // Radioelectronics and Communications Systems. – 2017. – Vol. 60, Issue 3. – P. 113–122. DOI: 10.3103/S0735272717030037.
13. Вовк С. М. Критерій мінімуму протяжності / С. М. Вовк // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 1 (120). – Дніпро, 2019. – С. 19–25.

Received 09.07.2019.
Accepted 25.09.2019.

УДК 004.02

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА З ДЕКІЛЬКОМА ЗНАЧЕННЯМИ

Вовк С. М. – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна.

Прокопчук О. М. – аспірант кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна.

АНОТАЦІЯ

Актуальність. В умовах, коли на різних частинах інтервалу спостереження параметр заданої моделі даних набуває різних значень, виникає задача оцінювання параметра з декількома значеннями. Об'єктом дослідження в даній роботі є процес оцінювання параметра з декількома значеннями.

Мета. Метою роботи є розробка підходу до вирішення завдання оцінювання декількох значень невідомого параметра для заданої моделі даних.

Метод. Підхід до вирішення завдання оцінювання невідомого параметра з декількома значеннями заснований на побудові функції відхилу даних від їх моделі і подальшому застосуванні до неї критерію мінімуму протяжності. Критерій мінімуму протяжності дозволяє індивідуалізувати значення невідомого параметра у вигляді локальних мінімумів функціоналу квазіпротяжності для заданої функції відхилу. У дискретному випадку пропонований підхід полягає в пошуку основних локальних мінімумів багатоекстремальної цільової функції. Для вирішення цього завдання в одновимірному випадку запропоновано простий метод, ефективність якого проілюстрована на прикладах задач з одним невідомим лінійним параметром та з одним невідомим нелінійним параметром моделі.

Результати. На відміну від традиційних підходів, заснованих на критерії найменших квадратів або критерії найменших модулів, які забезпечують можливість оцінювання тільки одного значення невідомого параметра, запропонований підхід забезпечує можливість оцінювання декількох значень невідомого параметра. Чисельне моделювання одновимірних задач апроксимації даних моделями з одним невідомим лінійним параметром та з одним невідомим нелінійним параметром під-

DOI 10.15588/1607-3274-2019-4-2

твердило доцільність запропонованого підходу і його ефективність в умовах, коли необхідне згладжування не призводить до втрати слабких локальних мінімумів.

Висновки. Для оцінювання невідомого параметра з декількома значеннями доцільно використовувати підхід, який полягає в постановці та рішенні задачі мінімізації функціоналу квазіпротяжності, який побудований на основі функції відхилу даних від заданої моделі. Цей підхід забезпечує індивідуалізацію значень невідомого параметра шляхом формування відповідних локальних мінімумів цільової функції, які відповідають шуканим значенням параметра. Результати чисельного моделювання одновимірних задач для випадків лінійного та нелінійного параметра підтвердили ефективність застосування запропонованого підходу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: обробка, оцінювання, критерій, протяжність, апроксимація.

UDC 004.02

ESTIMATION OF PARAMETER WITH SEVERAL VALUES

Vovk S. M. – PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer Science and Information Technology, Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine.

Prokopchuk O. M. – Postgraduate student of the Department of Computer Science and Information Technology, Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine.

ABSTRACT

Context. The problem of estimating a parameter with several values on different parts of the data interval is considered. The object of this research is the estimation of several values of an unknown parameter.

Objective. The approach to the estimation of several values of an unknown parameter for a given data model is to be developed.

Method. The approach to solve the estimation problem of the unknown parameter with several values is based on the constructing a function of the residual between the data and their model and on the subsequent applying the minimum-extent criterion to it. The minimum-extent criterion allows detecting the values of unknown parameter in the form of local minima for the quasi-extent functional of residual function. In the discrete case, the proposed approach is to search for the main local minima of the multi-extremal objective function. To solve this problem in the one-dimensional case a simple method is proposed. The performance of this method is illustrated by the examples of the problems both with one unknown linear parameter of the model and with one unknown non-linear parameter of the model.

Results. Unlike the traditional approaches based on the criterion of least squares or criterion of mean-absolute deviation which provide the possibility of estimating just one value of unknown parameter, the proposed approach provides estimating the several values of unknown parameter. Numerical simulation of the one-dimensional approximation problem with models containing the one unknown linear parameter and the one unknown non-linear parameter confirmed the feasibility of the proposed approach and its performance when the necessary smoothing does not lead to the loss of weak local minima.

Conclusions. To estimate the several values of unknown parameter it is advisable to use the approach which consists in solving the minimization problem of the quasi-extent functional for the residual function of data. This approach provides an individualization of the values of unknown parameter by forming the corresponding local minima of the objective function. The results of numerical simulation of the one-dimensional problem for both the linear and non-linear parameter confirmed the performance of the proposed approach.

KEYWORDS: processing, estimation, criterion, extent, approximation.

REFERENCES

1. Little M. A., Jones N. S. Generalized methods and solvers for noise removal from piecewise constant signals. I. Background theory, *Proceedings of the Royal Society A*, 2011, Vol. 467, pp. 3088–3114. DOI:10.1098/rspa.2010.0671.
2. Little M. A., Jones N. S. Generalized methods and solvers for noise removal from piecewise constant signals. II. New methods, *Proceedings of the Royal Society A,* 2011, Vol. 467, pp. 3115–3140. DOI: 10.1098/rspa.2010.0674.
3. Kaplun D. I., Gulvanskiy V. V., Kanatov I. I., Klionskiy D. M., Hachaturyan A. B., Butusov D. N., Lapitskiy V. F., Bobrovskiy V. I. Razrabotka i issledovanie demodulyatorov signalov s psevdosluchaynoy perestroykoy rabochey chastotyi, *Izvestiya vuzov Rossii. Radioelektronika,* 2017, No. 6, pp. 15–21.
4. Kulikov E. I., Trifonov A. P. Otsenka parametrov signalov na fone pomeh. Moscow, Sov. radio, 1978, 296 p.
5. Millar R. B. Maximum Likelihood Estimation and Inference: With Examples in R, SAS and ADMB / R. B. Millar. – New York: Wiley, 2011. – 376 p.
6. Wolberg J. Data Analysis Using the Method of Least Squares: Extracting the Most Information from Experiments. Berlin, SpringerVerlag, 2005, 250 p. DOI: 10.1007/3-540-31720-1.
7. Elgmati E. A., Gredni N. B. Quartile Method Estimation of Two-Parameter Exponential Distribution Data with Outliers, *International Journal of Statistics and Probability*, 2016, Vol. 5, No. 5, pp. 12–15. DOI: 10.5539/ijsp.v5n5p12.
8. Chandola V., Banerjee A., Kumar V. Anomaly detection: A survey, *ACM Computing Surveys*, 2009, Vol. 41, No. 3, pp. 15–58. DOI: 10.1145/1541880.1541882.
9. Huber P., Ronchetti E. M. Robust statistics. 2nd ed. Hoboken, Wiley, 2009, 370 p.
10. Shevlyakov G. L., Vil'chevski N. O. Robustness in data analysis: criteria and methods. Utrecht, VSP, 2002, 310 p.
11. Borulko V. F., Vovk S. M. Minimum-duration filtering, *Radio Electronics, Computer Science, Control,* 2016, No. 1, pp. 7–14. DOI: 10.15588/1607-3274-2016-1-1.
12. Vovk S. M., Borulko V. F. Determination of amplitude levels of the piecewise constant signal by using polynomial approximation, *Radioelectronics and Communications Systems,* 2017, Vol. 60, Issue 3, pp. 113–122. DOI: 10.3103/S0735272717030037.
13. Vovk S. M. Kryterii minimumu protiazhnosti, *Systemni tekhnolohii. Rehionalnyi mizhvuzivskyi zbirnyk naukovykh prats*. Dnipro, 2019, Vypusk 1 (120), pp. 19–25.

DOI 10.15588/1607-3274-2019-4-2