

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ M/HE₂/1 С ОБЫЧНЫМИ И СО СДВИНУТЫМИ ВХОДНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Тарасов В. Н. – д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, Россия.

Бахарева Н. Ф. – д-р техн. наук, профессор, заведующая кафедрой информатики и вычислительной техники Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, Россия.

АННОТАЦИЯ

Актуальность. В теории массового обслуживания исследования частных систем типа M/G/1 актуальны в связи с тем, что они до сих пор активно используются в современной теории телетрафика. Рассмотрена задача вывода решения для среднего времени ожидания в очереди в замкнутой форме двух систем с обычными и со сдвинутыми экспоненциальными и гиперэрланговскими входными распределениями.

Цель работы. Получение решения для основной характеристики системы – среднего времени ожидания требований в очереди для двух систем массового обслуживания типа M/G/1 и G/G/1 с обычными и со сдвинутыми экспоненциальными и гиперэрланговскими входными распределениями.

Метод. Для решения поставленной задачи использован классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли. Данный метод позволяет получить решение для среднего времени ожидания для рассматриваемых систем в замкнутой форме. Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли играет важную роль в теории систем G/G/1. Для практического применения полученных результатов использован известный метод моментов теории вероятностей.

Результаты. Получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для пары систем, с помощью которых выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди в замкнутой форме. Сдвинутое экспоненциальное распределение трансформирует систему M/G/1 в систему G/G/1.

Выводы. Получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемых систем и с их помощью выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди для этих систем в замкнутой форме. Эти выражения расширяют и дополняют известные формулы теории массового обслуживания для среднего времени ожидания для систем M/G/1 и G/G/1 с произвольными законами распределений входного потока и времени обслуживания. Такой подход позволяет рассчитать среднее время ожидания для указанных систем в математических пакетах для широкого диапазона изменения параметров трафика. Все остальные характеристики систем являются производными от времени ожидания.

Кроме среднего времени ожидания, такой подход дает возможность определить и моменты высших порядков времени ожидания. Учитывая тот факт, что вариация задержки пакетов (джиттер) в телекоммуникациях определяется как разброс времени ожидания от его среднего значения, то джиттер можно будет определить через дисперсию времени ожидания.

Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемых систем позволяет получить решение в замкнутой форме и эти полученные решения публикуются впервые.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: гиперэрланговский и экспоненциальный законы распределения, сдвинутые распределения, интегральное уравнение Линдли, метод спектрального разложения, преобразование Лапласа.

СОКРАЩЕНИЯ

ИУЛ – интегральное уравнение Линдли;
СМО – система массового обслуживания;
ФРВ – функция распределения вероятностей.

НОМЕНКЛАТУРА

$a(t)$ – функция плотности распределения интервалов между поступлениями требований;

$A^*(s)$ – преобразование Лапласа функции $a(t)$;

$b(t)$ – функция плотности распределения времени обслуживания;

$B^*(s)$ – преобразование Лапласа функции $b(t)$;

c_λ – коэффициент вариации интервалов поступлений требований;

c_μ – коэффициент вариации времени обслуживания;

D_W – дисперсия времени ожидания;

H_2 – гиперэкспоненциальное распределение второго порядка;

HE_2 – сдвинутое гиперэрланговское распределение второго порядка;

HE_2^- – гиперэрланговское распределение второго порядка;

G – произвольный закон распределения;

M – экспоненциальный закон распределения;

M^- – сдвинутое экспоненциальное распределение;

\bar{W} – среднее время ожидания в очереди;

$W^*(s)$ – преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания;

$W(y)$ – ФРВ времени ожидания требования в очереди;

z – любое число из интервала $(-1, 1)$;

λ – интенсивность входного потока – параметр экспоненциального распределения;

μ_1 – первый параметр гиперэрланговского распределения времени обслуживания;

μ_2 – второй параметр гиперэрланговского распределения времени обслуживания;

ρ – коэффициент загрузки системы;

$\bar{\tau}_\lambda$ – средний интервал между поступлениями требований;

$\bar{\tau}_\lambda^2$ – второй начальный момент интервала между поступлениями требований;

$\bar{\tau}_\mu$ – среднее время обслуживания;

$\bar{\tau}_\mu^2$ – второй начальный момент времени обслуживания;

$\Phi_+(s)$ – преобразование Лапласа ФРВ времени ожидания;

$\psi_+(s)$ – первая компонента спектрального разложения;

$\psi_-(s)$ – вторая компонента спектрального разложения.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена анализу СМО $M/HE_2/1$ с обычными и со сдвинутыми экспоненциальными (M) и гиперэрланговскими (HE_2) входными распределениями. В открытом доступе авторам не удалось обнаружить результаты для среднего времени ожидания требований в очереди в таких СМО. Как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания является главной характеристикой для любых СМО. По этой характеристике, например, оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при их моделировании с помощью СМО. Рассматриваемая СМО $M/HE_2/1$ с обычными распределениями по введенной Кендаллом трехпозиционной символике для их классификации $A/B/K$ относится к типу $M/G/1$, а эта же СМО со сдвинутыми распределениями – к типу $G/G/1$. В трехпозиционной символике в первой позиции задается вид закона распределения интервалов между требованиями входного потока, во второй позиции – вид закона распределения времени обслуживания требований и в третьей позиции – количество каналов обслуживания.

В теории массового обслуживания исследования систем $G/G/1$ и $M/G/1$ актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телеграфика, к тому же до сих пор не существует решения для системы $G/G/1$ в конечном виде для общего случая.

В исследовании систем $G/G/1$ важную роль играет метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли и большинство результатов в теории массового обслуживания получены именно с помощью данного метода.

Объектом исследования является СМО типа $M/G/1$ и $G/G/1$.

Предметом исследования является среднее время ожидания в системах $M/HE_2/1$ с обычными и со сдвинутыми входными распределениями.

Целью работы является получение решения в замкнутой форме для основной характеристики системы – среднего времени ожидания требований в очереди для вышеперечисленных СМО.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе автора [1] впервые приведены результаты по исследованию системы со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями, полученные с помощью метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ). Результаты работы [1] позволяют развить теорию систем с запаздыванием во времени также на гиперэрланговское распределение.

Одна из форм ИУЛ выглядит так:

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u) dC(u), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

При кратком изложении метода спектрального разложения решения ИУЛ будем придерживаться подхода и символики автора классики теории массового обслуживания [2]. Суть решения ИУЛ методом спектрального разложения состоит в нахождении закона распределения времени ожидания через следующее спектральное разложение: $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$, где $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ некоторые рациональные функции от s , которые можно разложить на множители. Функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям согласно [2]:

- для $\text{Re}(s) > 0$ функция $\psi_+(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости;
- для $\text{Re}(s) < D$ функция $\psi_-(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где D – некоторая положительная константа, определяемая из условия: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} < \infty$.

Кроме того, функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1. \quad (2)$$

В работе ставится задача нахождения решения для времени ожидания требований в очереди в СМО $M/HE_2/1$ с обычными и со сдвинутыми входными распределениями. Для решения задачи необходимо вначале построить для указанных систем спектральные разложения вида $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ с учетом условий (1), (2) в каждом случае.

2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли впервые подробно представлен в классике теории массового обслуживания [3], а впоследствии применялся во многих работах, включая [4,5]. Аналогичный подход к решению ИУЛ использован в [6]. Здесь вместо термина «спектральное разложение» использована факторизация, а вместо функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ – компоненты факторизации $\omega_+(z,t)$ и $\omega_-(z,t)$ функции $1-z \cdot \chi(t)$.

Такой подход для получения конечных результатов для рассматриваемых систем менее удобен, чем подход, описанный в [3] и проиллюстрированный многочисленными примерами.

В работе [1] впервые представлены результаты анализа СМО М/М/1 с запаздыванием со сдвинутыми экспоненциальными распределениями. В [2] эта идея развита на системы со сдвинутыми гиперэкспоненциальными и экспоненциальными распределениями. Аналогичные результаты для систем с обычными и со сдвинутыми гиперэрланговскими, эрланговскими и экспоненциальными входными распределениями приведены в [8, 9].

Практическое применение метода спектрального разложения решения ИУЛ для исследования систем с гиперэкспоненциальными и экспоненциальными входными распределениями показано [7]. В то же время, научной литературе, включая web-ресурсы, автору не удалось обнаружить результаты по времени ожидания для СМО с экспоненциальными и гиперэрланговскими входными распределениями 2-го порядка общего вида.

Технологии аппроксимации законов распределений подробно описаны в работах [11–13], а похожие исследования в теории массового обслуживания в последнее время проведены в [14–17].

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Рассмотрим СМО М/НЕ₂/1, для которой законы распределения входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности:

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (3)$$

$$b(t) = 4q\mu_1^2 t e^{-2\mu_1 t} + 4(1-q)\mu_2^2 t e^{-2\mu_2 t}. \quad (4)$$

Запишем преобразования Лапласа функций (3) и (4):

$$A^*(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda}; \quad B^*(s) = q \left(\frac{2\mu_1}{s + 2\mu_1} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{s + 2\mu_2} \right)^2.$$

В этом случае выражение для спектрального разложения решения ИУЛ примет следующий вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - s} \right) \left[q \left(\frac{2\mu_1}{s + 2\mu_1} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{s + 2\mu_2} \right)^2 \right] - 1. \quad (5)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, представим в виде:

$$\begin{aligned} & \left[q \left(\frac{2\mu_1}{s + 2\mu_1} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{s + 2\mu_2} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{q(16\mu_1^2\mu_2^2 + 16\mu_1^2\mu_2s + 4\mu_1^2s^2)}{(s + 2\mu_1)^2(s + 2\mu_2)^2} + \\ & + \frac{(1-q)(16\mu_1^2\mu_2^2 + 16\mu_1\mu_2^2s + 4\mu_2^2s^2)}{(s + 2\mu_1)^2(s + 2\mu_2)^2} = \\ & = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{(s + 2\mu_1)^2(s + 2\mu_2)^2}, \end{aligned}$$

где промежуточные параметры $b_0 = 16\mu_1^2\mu_2^2$, $b_1 = 16\mu_1\mu_2[q\mu_1 + (1-q)\mu_2]$, $b_2 = 4[q\mu_1^2 + (1-q)\mu_2^2]$. Продолжая разложение, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} &= \frac{\lambda(b_0 + b_1s + b_2s^2) - (2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2(\lambda - s)}{(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2(\lambda - s)} = \\ &= \frac{s(s^4 + d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0)}{(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2(\lambda - s)} = \\ &= \frac{s(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)(s + \sigma_3)(s + \sigma_4)}{(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2(\lambda - s)}, \end{aligned}$$

где коэффициенты многочлена четвертой степени

$$\begin{aligned} d_0 &= b_1\lambda + 16\mu_1\mu_2[\mu_1\mu_2 - \lambda(\mu_1 + \mu_2)], \\ d_1 &= 16\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2) - 4\lambda(\mu_1^2 + 4\mu_1\mu_2 + \mu_2^2) + b_2\lambda, \\ d_2 &= 4(\mu_1^2 + \mu_2^2) + 16\mu_1\mu_2 - 4\lambda(\mu_1 + \mu_2), \\ d_3 &= 4(\mu_1 + \mu_2) - \lambda \end{aligned}$$

положительны. Многочлен четвертой степени

$$s^4 + d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0 \quad (6)$$

с положительными коэффициентами имеет четыре действительных отрицательных корня, либо два действительных отрицательных корня и два комплексно сопряженных корня с отрицательными вещественными частями. Тогда окончательно спектральное разложение решения ИУЛ для системы М/НЕ₂/1 имеет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{s(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)(s + \sigma_3)(s + \sigma_4)}{(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2(\lambda - s)}, \quad (7)$$

где через $-\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3, -\sigma_4$ обозначены для удобства отрицательные корни многочлена (6). На рисунке показана комплексная s – плоскость с нулями и полюсами функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$, где полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками. Нули и полюсы нужны для построения функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ в отдельности.

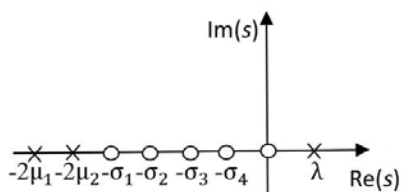


Рисунок 1 – Нули и полюсы функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ для системы М/НЕ₂/1

Далее с учетом условий (1), (2) строим функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$:

$$\psi_+(s) = \frac{s(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)(s + \sigma_3)(s + \sigma_4)}{(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2},$$

$$\psi_-(s) = \lambda - s.$$

Константа спектрального разложения

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)(s + \sigma_3)(s + \sigma_4)}{(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2} =$$

$$= \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}{16\mu_1^2 \mu_2^2}.$$

Эта константа определяет вероятность того, что поступающее в систему требование заставит ее свободной.

Далее по методике спектрального разложения строим функцию

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 (2\mu_1 + s)^2 (2\mu_2 + s)^2}{16\mu_1^2 \mu_2^2 s (s + \sigma_1)(s + \sigma_2)(s + \sigma_3)(s + \sigma_4)}.$$

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания $W^*(s) = s \cdot \Phi_+(s)$ будет равно:

$$W^*(s) = \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 (2\mu_1 + s)^2 (2\mu_2 + s)^2}{16\mu_1^2 \mu_2^2 (s + \sigma_1)(s + \sigma_2)(s + \sigma_3)(s + \sigma_4)}, \quad (8)$$

а среднее время ожидания $\bar{W} = -\frac{dW^*(s)}{ds}$ будет равно

$$\bar{W} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_3} + \frac{1}{\sigma_4} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}. \quad (9)$$

Преобразование Лапласа (8) позволяет кроме среднего времени ожидания находить также и моменты высшего порядка времени ожидания. С учетом определения вариации задержки – джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения [10], тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию времени ожидания.

Для того, чтобы воспользоваться выражением (9) для расчетов, необходимо задать входные параметры, в качестве которых используем величины $\bar{\tau}_\lambda$, $\bar{\tau}_\mu$, c_λ , c_μ . С помощью этих входных параметров необходимо

определить неизвестные параметры распределений (3) и (4) λ , q , μ_1 , μ_2 и коэффициенты многочлена (6).

Определение параметра λ распределения (3) не вызывает затруднений: $\lambda = 1/\bar{\tau}_\lambda$.

Для определения остальных параметров воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до второго порядка для распределения (4):

$$\bar{\tau}_\mu = \frac{q}{\mu_1} + \frac{(1-q)}{\mu_2}, \quad (10)$$

$$\bar{\tau}_\mu^2 = \frac{3}{2} \left[\frac{q}{\mu_1} + \frac{(1-q)}{\mu_2} \right]. \quad (11)$$

Рассматривая равенства (10) и (11) как форму записи метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (3) μ_1 , μ_2 , q . Система двух уравнений (10), (11) при этом является недоопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации:

$$c^2 = \frac{\bar{\tau}_\mu^2 - (\bar{\tau}_\mu)^2}{(\bar{\tau}_\mu)^2}, \quad (12)$$

как связующее условие между (10) и (11). Кроме того, коэффициент вариации будем использовать в расчетах в качестве входного параметра системы. Исходя из вида уравнения (10) положим

$$\mu_1 = 2q/\bar{\tau}_\mu, \quad \mu_2 = 2(1-q)/\bar{\tau}_\mu. \quad (13)$$

Подставив выражений (10), (11) вместе с частным решением (13) в (12) получим уравнение четвертой степени относительно параметра q :

$$q(1-q)[8(1+c_\mu^2)q^2 - 8(1+c_\mu^2)q + 3] = 0.$$

Отбросив тривиальные решения $q = 0$ и $q = 1$, получим квадратное уравнение $8(1+c_\mu^2)q^2 - 8(1+c_\mu^2)q + 3 = 0$, корни которого равны

$$q = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2(1+c_\mu^2)-3}{8(1+c_\mu^2)}}. \quad \text{Для однозначности выберем}$$

большой корень:

$$q = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2(1+c_\mu^2)-3}{8(1+c_\mu^2)}}. \quad (14)$$

Подставив значение вероятности q , определенное (14) в (13) найдем параметры μ_1 , μ_2 . Остается определить коэффициенты многочлена (6), найти его корни и воспользоваться расчетным выражением (9) для среднего времени ожидания. Теперь полученный результат (9) необходимо сопоставить с известной формулой Полячека-Хинчина.

В связи с тем, что данная система М/НЕ₂/1 относится к классу систем М/Г/1, рассмотрим известный результат для данной системы.

Среднее время ожидания в системе М/Г/1 дается формулой Полячека-Хинчина [2]:

$$\bar{W} = \frac{\lambda \tau_{\mu}^2}{2(1-\rho)},$$

где $0 < \rho = \lambda/\mu < 1$.

Для распределения НЕ₂ $\tau_{\mu}^2 = \frac{3}{2} \left[\frac{q}{\mu_1^2} + \frac{(1-q)}{\mu_2^2} \right]$ (см.

выражение (11)) и подставив сюда значения параметров q, μ_1, μ_2 , полученные по выражениям (13), (14), получим среднее время ожидания в системе М/НЕ₂/1 по формуле Полячека-Хинчина.

Многочисленные эксперименты с выражением (9) подтверждают полную идентичность двух разных результатов по системе М/НЕ₂/1.

Далее рассмотрим другую, качественно отличающуюся от прежней систему. Для системы М/НЕ₂/1 со сдвинутыми законами распределений интервалов входного потока и времени обслуживания эти законы задаются функциями плотности вида:

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad (15)$$

$$b(t) = 4q\mu_1^2(t-t_0)e^{-2\mu_1(t-t_0)} + 4(1-q)\mu_2^2(t-t_0)e^{-2\mu_2(t-t_0)}. \quad (16)$$

Такую СМО в отличие от обычной системы обозначим через М⁻/НЕ₂/1.

Утверждение. Спектральное разложение решения ИУЛ $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ для системы М⁻/НЕ₂/1 полностью совпадает со спектральным разложением для системы М/НЕ₂/1 и имеет вид (5).

Доказательство.

Запишем преобразования Лапласа функций (15) и (16):

$$A^*(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda} e^{-t_0 s};$$

$$B^*(s) = \left[q \left(\frac{2\mu_1}{s+2\mu_1} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{s+2\mu_2} \right)^2 \right] e^{-t_0 s}.$$

Тогда спектральное разложение решения ИУЛ для системы М⁻/НЕ₂/1 примет вид:

$$\begin{aligned} A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 &= \frac{\lambda}{\lambda-s} e^{t_0 s} \times \\ &\times \left[q \left(\frac{2\mu_1}{s+2\mu_1} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{s+2\mu_2} \right)^2 \right] e^{-t_0 s} - 1 = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-s} \left[q \left(\frac{2\mu_1}{s+2\mu_1} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{s+2\mu_2} \right)^2 \right] - 1. \end{aligned}$$

Здесь экспоненты со степенями с противоположными знаками обнуляются и операция сдвига тем самым нивелируется. Последнее выражение идентично (5). Утверждение доказано.

Теперь мы можем воспользоваться для системы М⁻/НЕ₂/1 результатами предыдущей системы с измененными вследствие сдвига числовыми характеристиками и, следовательно параметрами распределений (15) и (16).

Сначала определим числовые характеристики интервала между поступлениями требований и времени обслуживания. Для этого воспользуемся преобразованием Лапласа функций (15) и (16).

Значение первой производной функции $A^*(s)$ со знаком минус в точке $s=0$ равно

$$-\left. \frac{dA^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1}{\lambda} + t_0.$$

Отсюда среднее значение интервалов между соседними требованиями будет равно

$$\bar{\tau}_{\lambda} = \lambda^{-1} + t_0. \quad (17)$$

Значение второй производной функции $A^*(s)$ в точке $s=0$ дает второй начальный момент интервала поступления

$$\bar{\tau}_{\lambda}^2 = t_0^2 + 2 \left(\frac{t_0}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (18)$$

Отсюда определим коэффициент вариации интервалов поступления:

$$c_{\lambda} = (1 + \lambda t_0)^{-1}. \quad (19)$$

Для определения числовых характеристик распределения (16) воспользуемся преобразованием Лапласа $B^*(s)$, приведенным выше. Тогда среднее время обслуживания в системе равно

$$\bar{\tau}_{\mu} = q\mu_1^{-1} + (1-q)\mu_2^{-1} + t_0, \quad (20)$$

второй начальный момент времени обслуживания равен

$$\bar{\tau}_{\mu}^2 = t_0^2 + 2t_0 \left[\frac{q}{\mu_1} + \frac{(1-q)}{\mu_2} \right] + \frac{3q}{2\mu_1^2} + \frac{3(1-q)}{2\mu_2^2}. \quad (21)$$

Отсюда квадрат коэффициент вариации времени обслуживания будет равен

$$c_{\mu}^2 = \frac{\mu_1^2 - 2q\mu_2(\mu_1 - \mu_2) + q(1-2q)(\mu_1 - \mu_2)^2}{2[\mu_1 - q(\mu_1 - \mu_2) + t_0\mu_1\mu_2]^2}. \quad (22)$$

Заметим, что коэффициенты вариации $c_{\lambda} < 1$ и $c_{\mu} > 0$ при параметре сдвига $t_0 > 0$. Таким образом, очевидно, что система М⁻/НЕ₂/1 относится к типу Г/Г/1.

Рассматривая выражения (17)–(22) как запись метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (15) и (16) $\lambda, \mu_1, \mu_2, q, t_0$.

Из (17) получим значение $t_0 = \bar{\tau}_\lambda - \lambda^{-1}$ и подставив его в (19) найдем параметр распределения (15) $\lambda = 1/c_\lambda \bar{\tau}_\lambda$. Тогда параметр сдвига будет связан с параметрами поступлений условием

$$t_0 = \bar{\tau}_\lambda (1 - c_\lambda). \quad (23)$$

Выражение (23) будет определять диапазон изменения параметра сдвига $t_0 \in (0, 1)$.

Нахождение параметров распределения (16) μ_1, μ_2, q будет аналогичным нахождению этих параметров для распределения (4). Теперь исходя из вида уравнений (20) положим

$$\mu_1 = 2q/(\bar{\tau}_\mu - t_0), \quad \mu_2 = 2(1-q)/(\bar{\tau}_\mu - t_0), \quad (24)$$

и потребуем выполнения условия (22). Подставив частное решение (24) в (22) решаем полученное уравнение четвертой степени относительно параметра q с учетом условия $0 < q < 1$:

$$q = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3(\bar{\tau}_\mu - t_0)^2}{8[(\bar{\tau}_\mu - t_0)^2 + c_\mu^2 \bar{\tau}_\mu^2]}}$$

а затем определяем из (24) параметры μ_1, μ_2 .

Задавая значения $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu$ в качестве входных параметров системы, таким образом определяем известным методом моментов все неизвестные параметры распределений (15) и (16).

Теперь рассмотрим влияние параметра сдвига на коэффициенты вариаций распределений. Для экспоненциального закона распределения интервалов между поступлениями требований, параметр сдвига уменьшает коэффициент вариации в $1 + \lambda t_0$ раз.

Для обычного распределения HE_2 времени обслуживания, квадрат коэффициента вариации, как следует из (12), равен

$$c_\mu^2 = \frac{\mu_1^2 - 2q\mu_2(\mu_1 - \mu_2) + q(1-2q)(\mu_1 - \mu_2)^2}{2[\mu_1 - q(\mu_1 - \mu_2)]^2}.$$

Сравнивая последнее выражение с (22) убеждаемся, что параметр сдвига во времени $t_0 > 0$ уменьшает коэффициент вариации времени обслуживания в $1 + \frac{t_0\mu_1\mu_2}{[\mu_1(1-q) + \mu_2q]}$ раз. Теперь, учитывая квадратичную зависимость среднего времени ожидания от коэффициентов вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания, убеждаемся в том, что введение параметра сдвига в законы распределения, уменьшает среднее время ожидания в очереди в СМО.

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Ниже в табл. 1 приведены данные расчетов для системы $M/HE_2/1$ для случаев малой, средней и высокой загрузки $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$. Для сравнения в правой

колонке приведены данные для близкой системы $M/H_2/1$, для которой $c_\mu \geq 1$ [1].

Таблица 1 – Результаты экспериментов для СМО $M/HE_2/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания	
ρ	c_μ	для системы $M/HE_2/1$	для системы $M/H_2/1$
0,1	0,71	0,09	–
	2	0,28	0,37
	4	0,94	1,26
	8	3,61	4,81
0,5	0,71	0,75	–
	2	2,50	3,33
	4	8,50	11,33
	8	32,50	43,33
0,9	0,71	6,77	–
	2	22,50	30,0
	4	76,50	102,0
	8	292,50	390,0

В табл. 1 данные расчетов отличаются вполне закономерно. В формуле Полячека – Хинчина в числителе стоит второй начальный момент времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu^2$, который для распределения HE_2 равен

$$\bar{\tau}_\mu^2 = \frac{3}{2} \left[\frac{q}{\mu_1^2} + \frac{(1-q)}{\mu_2^2} \right],$$

$$\bar{\tau}_\mu^2 = 2 \left[\frac{q}{\mu_1^2} + \frac{(1-q)}{\mu_2^2} \right],$$

что в 4/3 раза больше предыдущего. Поэтому среднее время ожидания в системе $M/H_2/1$ ровно в 4/3 раза больше, чем в системе $M/HE_2/1$.

В таблице 2 приведены расчеты для системы $M^*/HE_2^*/1$ для случаев малой, средней и высокой загрузки $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$ при значении параметра сдвига $t_0 = 0,9$ и коэффициентах вариации времени обслуживания $c_\mu = 0,71; 2; 4; 8$ для системы $M/HE_2/1$.

Этим значениям c_μ в системе $M^*/HE_2^*/1$ соответствуют приближенно значения $c_\mu = 0,37; 1,05; 2,11; 4,21$ в связи с уменьшением коэффициента вариации согласно выражения (22) в результате введения параметра сдвига $t_0 > 0$.

Коэффициент вариации интервала во входном потоке c_λ при $t_0=0,9$ в зависимости от загрузки ρ принимает значения $c_\lambda = 0,91; 0,55; 0,19$. Таким образом, табл. 2 демонстрирует качественное и количественное влияние параметра сдвига $t_0 > 0$ на числовые характеристики распределений (15) и (16), а также на основную характеристику системы – среднее время ожидания. Коэффициент загрузки ρ в обеих таблицах определяется отношением средних интервалов $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$. Расчеты, приведенные в табл. 1–2 проведены для нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$.

Таблица 2 – Результаты экспериментов для СМО $M^*/HE_2/1$ и $M/HE_2/1$

Входные параметры		Время ожидания							
ρ	c_λ \ c_μ	для системы $M^*/HE_2/1$				для системы $M/HE_2/1$			
		$c_\mu = 0,37$	$c_\mu = 1,05$	$c_\mu = 2,11$	$c_\mu = 4,21$	$c_\mu = 0,71$	$c_\mu = 2$	$c_\mu = 4$	$c_\mu = 8$
0,1	0,91	0,01	0,06	0,25	0,99	0,09	0,28	0,94	3,61
0,5	0,55	0,07	0,56	2,23	8,87	0,75	2,50	8,50	32,50
0,9	0,19	0,66	5,01	20,08	79,80	6,77	22,50	76,50	292,50

Данные таблиц 1 и 2 хорошо согласуются с результатами двух моментной аппроксимации [18] в той области изменения параметров, в которой рассмотренные системы применимы.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для пары систем $M/HE_2/1$ и $M^*/HE_2/1$. С помощью этих разложений выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди для указанных СМО в замкнутой форме. Результаты расчетов сравниваются между этими двумя системами, а также с результатами аналогичной системы $M/H_2/1$.

Диапазон изменения параметров у системы со сдвинутыми входными распределениями $M^*/HE_2/1$ шире, чем у обычной системы $M/HE_2/1$ и поэтому эти системы взаимно дополняют друг друга. Указанные системы с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика.

6 ОБСУЖДЕНИЕ

Как и следовало ожидать, введение параметра сдвига $t_0 > 0$ в законы распределений приводит к уменьшению значений коэффициентов вариации c_λ и c_μ . С учетом того факта, что среднее время ожидания в очереди связано с коэффициентами вариаций квадратичной зависимостью, их уменьшение влечет за собой уменьшение времени ожидания в несколько раз. Полученное расчетное выражение расширяет и дополняет известные формулы теории массового обслуживания для среднего времени ожидания для систем $M/G/1$ и $G/G/1$ с произвольными законами распределений входного потока и времени обслуживания.

ВЫВОДЫ

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемых систем и с их помощью выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди для этих систем в замкнутой форме. Данные многочисленных экспериментов подтверждают полную адекватность полученных теоретических результатов.

Практическое значение работы заключается в том, что полученные результаты с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого необходимо знать числовые характеристики интервалов входящего трафика и времени обслуживания на уровне двух первых

моментов, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика [9, 10].

Перспективы дальнейших исследований просматриваются в продолжении исследования систем $M/G/1$ и $G/G/1$ с другими общими входными распределениями и в расширении и дополнении известных формул для среднего времени ожидания.

ЛИТЕРАТУРА / ЛИТЕРАТУРА

1. Тарасов В. Н. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием / В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева, И. А. Блатов // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 11. – С. 51–59.
2. Тарасов В.Н. Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием / В. Н. Тарасов // Автоматика и телемеханика. – 2018. – № 12. – С. 57–70.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. под редакцией В. И. Неймана / Л. Клейнрок. – М. : Машиностроение, 1979. – 432 с.
4. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems / N. Brannstrom. – Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004. – 79 p.
5. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods / W. Whitt // Operation Research. – 1982. – № 1. – P. 125–147.
6. Бочаров П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин – М. : Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
7. Тарасов В. Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями / В. Н. Тарасов // Проблемы передачи информации. – 2016. – № 1. – С. 16–26.
8. Тарасов В.Н. Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями / В.Н. Тарасов // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2018. – № 4. – С. 61–70.
9. Тарасов В. Н. Исследование систем массового обслуживания с сдвинутыми эрланговскими и экспоненциальными входными распределениями / В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2019. – № 1. – С.67–76.
10. [HTTPS://tools.ietf.org/html/rfc3393](https://tools.ietf.org/html/rfc3393). RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (дата обращения: 26.02.2016).
11. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals / A. Myskja // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers. – 1991. – P. 683–688.
12. Алиев Т. И. Основы моделирования дискретных систем / Т. И. Алиев – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.
13. Алиев Т. И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания / Т. И. Алиев // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – № 2(84). – С 88–93.
14. Aras A. K. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment / A. K. Aras, X. Chen & Y. Liu // Queueing Systems. –

2018. – Vol. 89, No. 1. – P. 81–125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
15. Jennings O. B. Comparisons of ticket and standard queues. // O. B. Jennings & J. Pender // Queueing Systems. – 2016. – Vol. 84, No. 1. – P. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
16. Gromoll H.C., Terwilliger B. & Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times / H. C. Gromoll, B. Terwilliger & B. Zwart // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89, No. 3. – P. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
17. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates / B. Legros // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89, No. 3. – P. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
18. Кругликов В. К. Анализ и расчет сетей массового обслуживания с использованием двумерной диффузионной аппроксимации / В. К. Кругликов, В. Н. Тарасов // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 8. – С. 74–83.

Received 09.07.2019.

Accepted 06.10.2019.

УДК 621.391.1: 621.395

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДВОХ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ М/М₂/1 ЗІ ЗВИЧАЙНИМИ ТА ЗСУНУТИМИ ВХІДНИМИ РОЗПОДІЛАМИ

Тарасов В. Н. – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри програмного забезпечення та управління в технічних системах Поволзького державного університету телекомунікацій та інформатики, Росія.

Бахарєва Н. Ф. – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри інформатики та обчислювальної техніки Поволзького державного університету телекомунікацій та інформатики, Росія.

АНОТАЦІЯ

Актуальність. В теорії масового обслуговування дослідження приватних систем типу М/М/1 є актуальними в зв'язку з тим, що вони й до сьогодні активно використовуються в сучасній теорії телетрафіку. Була розглянута задача виведення рішення для середнього часу очікування в черзі в замкнутій формі двох систем зі звичайними і зсунутими експонентними і гіперерлангівськими вхідними розподілами.

Мета роботи. Отримання рішення для основної характеристики системи – середнього часу очікування вимог в черзі для двох систем масового обслуговування типу М/М/1 і М/М/1 зі звичайними і зсунутими експонентними і гіперерлангівськими вхідними розподілами.

Метод. Для вирішення поставленого завдання був використаний класичний метод спектрального розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндлі. Цей метод дозволяє отримати рішення для середнього часу очікування для розглянутих систем в замкнутій формі. Метод спектрального розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндлі грає важливу роль в теорії систем М/М/1. Для практичного застосування отриманих результатів було використано відомий метод моментів теорії ймовірностей.

Результати. Були отримані спектральні розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндлі для пари систем, за допомогою яких виведені розрахункові формули для середнього часу очікування в черзі в замкнутій формі. Зрушений експоненціальний розподіл трансформує систему М/М/1 в систему М/М/1.

Висновки. Були отримані спектральні розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндлі для розглянутих систем і з їх допомогою виведені розрахункові формули для середнього часу очікування в черзі для цих систем в замкнутій формі. Ці формули розширюють і доповнюють відомі формули теорії масового обслуговування для середнього часу очікування для систем М/М/1 і М/М/1 з довільними законами розподілів вхідного потоку і часу обслуговування. Такий підхід дозволяє розрахувати середній час очікування для зазначених систем в математичних пакетах для широкого діапазону зміни параметрів трафіку. Всі інші характеристики систем є похідними часу очікування.

Крім середнього часу очікування, такий підхід дає можливість також визначити моменти вищих порядків часу очікування. З огляду на той факт, що варіація затримки пакетів (джиттер) в телекомунікації визначається як дисперсія часу очікування від його середнього значення, то джиттер можна буде визначити через дисперсію часу очікування.

Метод спектрального розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндлі для розглянутих систем дозволяє отримати рішення в замкнутій формі і ці отримані рішення публікуються вперше.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гіперерлангівський і експонентний закони розподілу, зсунуті розподіли, інтегральне рівняння Ліндлі, метод спектрального розкладання, перетворення Лапласа.

UDC 621.391.1:621.395

COMPARATIVE ANALYSIS OF TWO QUEUEING SYSTEMS M/M₂/1 WITH ORDINARY AND WITH THE SHIFTED INPUT DISTRIBUTIONS

Tarasov V. N. – Dr. Sc., Professor, Head of Department of Software and Management in Technical Systems of Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation.

Bakhareva N. F. – Dr. Sc., Professor, Head of Department of Informatics and Computer Engineering of Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation.

ABSTRACT

Context. In the queueing theory, studies of particular systems of the M/M/1 type are relevant in that they are still actively used in the modern theory of teletraffic. The problem of finding a solution for the mean waiting time in a queue in the closed form of two systems with ordinary and shifted exponential and hypererlangian input distributions is considered.

Objective. Obtaining a solution for the main system characteristic – for the average waiting time in a queue for two queuing systems of type M/G/1 and G/G/1 with conventional and offset exponential and hypererlangian input distributions.

Method. To solve this problem, we use the classical method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation. This method allows to obtain a solution for the average waiting time for the systems under consideration in closed form. The method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation plays an important role in the theory of systems G/G/1. For the practical application of the results obtained, the well-known method of moments of probability theory is used.

Results. Spectral decompositions of the solution of an integral equation of Lindley for couple of systems by means of which formulas for the average time of waiting in queue in the closed form are received. The shifted exponential distribution transforms the system M/G/1 into the system G/G/1.

Conclusions. The spectral decompositions of the solution of the Lindley integral equation for the systems under consideration are obtained and with their help, the formulas for the average waiting time in the queue for these systems in a closed form are derived. These expressions expand and complement the known queuing theory formulas for the average waiting time for M/G/1 and G/G/1 systems with arbitrary laws of input flow and service time distributions. This approach allows us to calculate the average latency for these systems in mathematical packages for a wide range of traffic parameters. All other characteristics of the systems are derived from the waiting time. In addition to the average waiting time, such an approach makes it possible to determine also moments of higher orders of waiting time. Given the fact that the packet delay variation (jitter) in telecommunications is defined as the spread of the waiting time from its average value, the jitter can be determined through the variance of the waiting time. The method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation for the systems under consideration makes it possible to obtain a solution in a closed form and these solutions are published for the first time.

KEYWORDS: hypererlangian and exponential distribution laws, shifted distributions, Lindley integral equation, spectral decomposition method, Laplace transform.

REFERENCES

1. Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Blatov I. A. Analysis and calculation of queuing system with delay, *Automation and Remote Control*, 2015, Vol.52, No.11, pp.1945–1951. DOI: 10.1134/S0005117915110041.
2. Tarasov V.N. Extension of the Class of Queueing Systems with Delay, *Automation and Remote Control*, 2018, Vol. 79, No. 12, pp. 2147–2157. DOI: 10.1134/S0005117918120056.
3. Kleinrock L. Теорія масового обслуговування. Moscow, Mashinostroenie Publ, 1979, 432 p.
4. Brannstrom N. A. Queueing Theory analysis of wireless radio systems. Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004, 79 p.
5. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods, *Operation Research*, 1982, Vol. 30, No. 1, pp. 125–147.
6. Bocharov P. P., Pechinkin A. V. Теорія масового обслуговування. Moscow, Publishing House of Peoples' Friendship University, 1995, 529 p.
7. Tarasov V.N. Analysis and comparison of two queueing systems with hypererlangian input distributions, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2018, Vol. 47, No.4, pp.61–70. DOI 10.15588/1607-3274-2018-4-6.
8. Tarasov V.N., Bakhareva N.F. Research of queueing systems with shifted erlangian and exponential input distributions, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2019, Vol. 48, No.1, pp. 67–76. DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-7.
9. Tarasov V.N. Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions. *Problems of Information Transmission*, 2016, Vol. 52, No. 1, pp. 14–23. DOI: 10.1134/S0032946016010038.
10. RFC 3393 [IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM)] Available at: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. (accessed: 26.02.2016).
11. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. Teletraffic and data traffic in a Period of Change. ITC-13. Elsevier Science Publishers, 1991, pp. 683–688.
12. Aliev T. I. Osnovy modelirovaniya diskretnyh system. SPb: SPbGU ITMO, 2009, 363 p.
13. Aliev T. I. Approksimaciya veroyatnostnyh raspredelenij v modelyah massovogo obsluzhivaniya, *Nauchno-tekhnicheskij vestnik informacionnyh tekhnologij, mekhaniki i optiki*, 2013, Vol. 84, No. 2, pp. 88–93.
14. Aras A.K., Chen X. & Liu Y. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 1, pp. 81–125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
15. Jennings O.B. & Pender J. Comparisons of ticket and standard queues, *Queueing Systems*, 2016, Vol. 84, No. 1, pp. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
16. Gromoll H.C., Terwilliger B. & Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 3, pp. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
17. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 3, pp. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
18. Kruglikov V. K., Tarasov V. N. Analysis and calculation of queuing-networks using the two-dimensional diffusion-approximation, *Automation and Remote Control*, 1983, Vol. 44, No. 8, pp. 1026–1034.