

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ $H_2/E_2/1$ И ЕЕ АНАЛОГА СО СДВИНУТЫМИ ВХОДНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Тарасов В. Н. – д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, Россия.

АННОТАЦИЯ

Актуальность. В теории массового обслуживания исследования систем $G/G/1$ актуальны в связи с тем, что нельзя получить решения для времени ожидания в конечном виде в общем случае при произвольных законах распределений входного потока и времени обслуживания. Поэтому важны исследования таких систем для частных случаев входных распределений. Рассмотрена задача вывода решения для среднего времени ожидания в очереди в замкнутой форме для пары систем с обычными и со сдвинутыми гиперэкспоненциальными и эрланговскими входными распределениями.

Цель работы. Получение решения для основной характеристики систем – среднего времени ожидания требований в очереди для двух систем массового обслуживания типа $G/G/1$ с обычными и со сдвинутыми гиперэкспоненциальными и эрланговскими входными распределениями.

Метод. Для решения поставленной задачи использован классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли. Данный метод позволяет получить решение для среднего времени ожидания для рассматриваемых систем в замкнутой форме. Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли играет важную роль в теории систем $G/G/1$. Для практического применения полученных результатов использован известный метод моментов теории вероятностей.

Результаты. Впервые получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для двойственной пары систем, с помощью которых выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди в замкнутой форме.

Выводы. Получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемых систем и с их помощью выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди для этих систем в замкнутой форме. Показано, что в системах с запаздыванием во времени среднее время ожидания меньше, чем в обычных системах. Полученные расчетные выражения для времени ожидания расширяют и дополняют известную формулу теории массового обслуживания для среднего времени ожидания для систем $G/G/1$ с произвольными законами распределений входного потока и времени обслуживания. Такой подход позволяет рассчитать среднее время ожидания для указанных систем в математических пакетах для широкого диапазона изменения параметров трафика. Все остальные характеристики систем являются производными от времени ожидания.

Кроме среднего времени ожидания, такой подход дает возможность определить и моменты высших порядков времени ожидания. Учитывая тот факт, что вариация задержки пакетов (джиттер) в телекоммуникациях определяется как разброс времени ожидания от его среднего значения, то джиттер можно будет определить через дисперсию времени ожидания.

Полученные результаты публикуется впервые.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: гиперэкспоненциальное и эрланговское распределения, преобразование Лапласа, среднее время ожидания в очереди.

СОКРАЩЕНИЯ

ИУЛ – интегральное уравнение Линдли;
СМО – система массового обслуживания;
ФРВ – функция распределения вероятностей.

НОМЕНКЛАТУРА

$a(t)$ – функция плотности распределения интервалов между поступлениями требований;

$A^*(s)$ – преобразование Лапласа функции $a(t)$;

$b(t)$ – функция плотности распределения времени обслуживания;

$B^*(s)$ – преобразование Лапласа функции $b(t)$;

c_λ – коэффициент вариации интервалов поступлений требований;

c_μ – коэффициент вариации времени обслуживания;

E_2 – распределение Эрланга второго порядка;

E_2^- – сдвинутое распределение Эрланга второго порядка;

G – произвольный закон распределения;

H_2 – гиперэкспоненциальное распределение второго порядка;

H_2^- – сдвинутое гиперэкспоненциальное распределение второго порядка;

M – экспоненциальный закон распределения;

M^- – сдвинутый экспоненциальный закон распределения;

\bar{W} – среднее время ожидания в очереди;

$W^*(s)$ – преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания;

z – любое число из интервала $(-1, 1)$;

λ_1 – первый параметр гиперэкспоненциального распределения входного потока;

λ_2 – второй параметр гиперэкспоненциального распределения входного потока;

μ – параметр распределения Эрланга времени обслуживания;

ρ – коэффициент загрузки системы;

\bar{c}_λ – средний интервал между поступлениями требований;

$\bar{\tau}_\lambda^2$ – второй начальный момент интервала между поступлениями требований;

$\bar{\tau}_\mu$ – среднее время обслуживания;

$\bar{\tau}_\mu^2$ – второй начальный момент времени обслуживания;

$\Phi_+(s)$ – преобразование Лапласа ФРВ времени ожидания;

$\Psi_+(s)$ – первая компонента спектрального разложения;

$\Psi_-(s)$ – вторая компонента спектрального разложения.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена анализу СМО $H_2/E_2/1$ с обычными и со сдвинутыми вправо от нулевой точки гиперэкспоненциальными (H_2) и эрланговскими (E_2) входными распределениями. В работе [1] впервые приведены результаты по исследованию системы $M/M/1$ с запаздыванием во времени со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями, полученные классическим методом спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) [3]. Сдвиг экспоненциальных распределений вправо от нулевой точки трансформирует классическую систему $M/M/1$ в систему $G/G/1$.

В работе [1] показано, что среднее время ожидания требования в очереди в системе $M/M/1$ с запаздыванием во времени меньше, чем в классической системе $M/M/1$ при одинаковом коэффициенте загрузки за счет того, что коэффициенты вариации времен поступления c_λ и обслуживания c_μ становятся меньше единицы при параметре запаздывания $t_0 > 0$. Результаты работы [1] совместно с [2, 7–9] позволяют также развить метод спектрального разложения решения (ИУЛ) на систему $H_2/E_2/1$. В результате этого будем иметь новую СМО $H_2/E_2/1$ с запаздыванием во времени, которую обозначим $H_2^-/E_2^-/1$ в отличие от обычной системы. Подробности применения метода спектрального разложения решения (ИУЛ) для систем с гиперэкспоненциальными и экспоненциальными входными распределениями можно увидеть в работе автора [7].

Рассматриваемые СМО с обычными и сдвинутыми входными распределениями относятся к типу $G/G/1$.

В теории массового обслуживания исследование систем $G/G/1$ актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика, к тому же нельзя получить решения для таких систем в конечном виде для общего случая. Проблему можно было бы решить с помощью законов распределения Вейбулла или Гамма наиболее общего вида, которые обеспечивают диапазон изменения коэффициентов вариаций от 0 до ∞ в зависимости от величины их параметров. Оказывается, что преобразование Лапласа функции плотности распределения Вейбулла не может быть выражено в элементарных функциях.

Преобразование Лапласа функции плотности гамма распределения включает параметры этого закона в показатели степени:

$$F(s) = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta} dt = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta s + 1} \right)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) = \frac{1}{\beta(\beta s + 1)^{\alpha-1}}.$$

Это означает, что решение для главной характеристики среднего времени ожидания в системе надо будет определять для каждой конкретной пары параметров α и β этого закона распределения, что не имеет смысла. Таким образом, оба упомянутых закона распределения как наиболее общие, не могут быть использованы в теории массового обслуживания. Тем самым, среднее время ожидания в системе $G/G/1$ в общем случае на основании этих законов распределений не может быть определено. Поэтому остается использовать другие частные законы распределений.

В исследовании систем $G/G/1$ важную роль играет метод спектрального разложения решения ИУЛ и большинство результатов в теории массового обслуживания получены именно с помощью данного метода.

Объектом исследования является СМО типа $G/G/1$.

Предметом исследования является среднее время ожидания в системах $H_2/E_2/1$, $H_2^-/E_2^-/1$.

Целью работы является получение решения в замкнутой форме для основной характеристики системы – среднего времени ожидания требований в очереди для вышеперечисленных СМО.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе ставится задача нахождения решения для времени ожидания требований в очереди в СМО $H_2/E_2/1$, $H_2^-/E_2^-/1$. При использовании метода спектрального разложения решения ИУЛ будем придерживаться подхода и символики автора классики теории массового обслуживания [2]. Нам необходимо найти закон распределения случайной величины – времени ожидания в системе через спектральное разложение вида: $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \Psi_+(s) / \Psi_-(s)$, где $\Psi_+(s)$ и $\Psi_-(s)$ некоторые рациональные функции от s , которые возможно разложить на множители. Функции $\Psi_+(s)$ и $\Psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям согласно [2]:

- для $\text{Re}(s) > 0$ функция $\Psi_+(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости;
- для $\text{Re}(s) < D$ функция $\Psi_-(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где D – некоторая положительная константа, определяемая из условия: $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) / e^{-Dt} < \infty$.

Кроме того, функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \operatorname{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty, \operatorname{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1. \quad (2)$$

Для решения поставленной задачи необходимо вначале построить для указанных систем спектральные разложения вида $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ с учетом условий (1), (2) в каждом случае.

2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли впервые подробно представлен в классике теории массового обслуживания [2], а впоследствии применялся во многих работах, включая [3,4]. Аналогичный подход к решению ИУЛ использован в [5]. Здесь вместо термина «спектральное разложение» использована факторизация, а вместо функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ – компоненты факторизации $\omega_+(z, t)$ и $\omega_-(z, t)$ функции $1 - z \cdot \chi(t)$.

Такой подход для получения конечных результатов для рассматриваемых систем менее удобен, чем подход, описанный в [2] и проиллюстрированный для лучшего понимания многочисленными примерами.

В работе [6] впервые представлены результаты анализа СМО со сдвинутыми экспоненциальными распределениями.

Практическое применение метода спектрального разложения решения ИУЛ для исследования систем с гиперэкспоненциальными и экспоненциальными входными распределениями показано в работах [6–9]. В то же время, научной литературе, включая web-ресурсы, автору не удалось обнаружить результаты по времени ожидания для СМО с экспоненциальными и гиперэкспоненциальными входными распределениями 2-го порядка общего вида.

Аппроксимативные методы относительно законов распределений подробно описаны в работах [11–13], а похожие исследования в теории массового обслуживания в последнее время проведены в [14–17]

3. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для системы $H_2/E_2/1$ законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида:

$$a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (3)$$

$$b(t) = 4\mu^2 t e^{-2\mu t}. \quad (4)$$

Запишем преобразования Лапласа функций (3) и (4):

$$A^*(s) = p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2}, \quad B^*(s) = \left(\frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2.$$

Тогда выражение для спектрального разложения решения ИУЛ для системы $H_2/E_2/1$ примет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] \times \left(\frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 - 1 = \frac{-s(s + s_1)(s + s_2)(s - s_3)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(2\mu + s)^2},$$

т.к. многочлен 4-й степени в числителе этого выражения можно представить в виде разложения $-s(s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0)$ с коэффициентами $c_2 = 4\mu - \lambda_1 - \lambda_2$, $c_1 = 4\mu(\mu - \lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2$, $c_0 = 4\mu[\lambda_1 \lambda_2 + \mu(\lambda_1 p - \lambda_1 - \lambda_2 p)]$. В свою очередь кубический многочлен $s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0$ с такими коэффициентами в стационарном режиме функционирования СМО при $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda < 1$ имеет два действительных отрицательных корня $-s_1, -s_2$ и один положительный корень s_3 .

Окончательно

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s + s_1)(s + s_2)(s - s_3)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(2\mu + s)^2}. \quad (5)$$

Поэтому с учетом условий (1), (2) за функцию $\psi_+(s)$ примем

$$\psi_+(s) = s(s + s_1)(s + s_2) / (s + 2\mu)^2,$$

т.к. нули кубического многочлена $s = 0, s = -s_1, s = -s_2$ и полюс $s = -2\mu$ лежат в области $\operatorname{Re}(s) \leq 0$, а за функцию

$$\psi_-(s) = -(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s) / (s - s_3).$$

Теперь выполнение условий (1) и (2) для построенных функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ очевидно. Это подтверждает и рисунок, где отображены нули и полюсы отношения $\psi_+(s) / \psi_-(s)$ на комплексной s – плоскости для исключения ошибок построения спектрального разложения. На рис. 1 полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

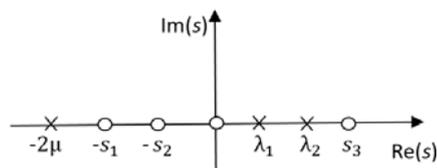


Рисунок 1– Нули и полюсы функции $\psi_+(s) / \psi_-(s)$ для системы $H_2/E_2/1$

Далее по методике спектрального разложения найдем константу K :

$$K = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{(s + s_1)(s + s_2)}{(s + 2\mu)^2} = \frac{s_1 s_2}{4\mu^2}.$$

Построим функцию $\Phi_+(s) = K / \psi_+(s)$, через которую найдем преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания:

$$W^*(s) = s \cdot \Phi_+(s) = \frac{s_1 s_2 (s + 2\mu)^2}{4\mu^2 (s + s_1)(s + s_2)}.$$

Окончательно

$$W^*(s) = \frac{s_1 s_2 (s + 2\mu)^2}{4\mu^2 (s + s_1)(s + s_2)}. \quad (6)$$

Производная от функции $W^*(s)$ со знаком минус в т. $s = 0$ и даст среднее время ожидания:

$$\begin{aligned} -\frac{dW^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} &= -\frac{d}{ds} \left[\frac{s_1 s_2 (s + 2\mu)^2}{4\mu^2 (s + s_1)(s + s_2)} \right] \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

Тогда среднее время ожидания для системы $H_2/E_2/1$ будет равно:

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}, \quad (7)$$

где s_1, s_2 абсолютные значения отрицательных корней $-s_1$ и $-s_2$ кубического многочлена $s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0$ с приведенными выше коэффициентами. Таким образом, среднее время для системы $H_2/E_2/1$ однозначно определено в виде замкнутой формы (7).

Такой подход к использованию метода спектрального разложения позволяет определить не только среднее время ожидания из (6), но и моменты высших порядков времени ожидания. Вторая производная от функции (6) при $s = 0$ дает второй начальный момент времени ожидания. С учетом определения вариации задержки – джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения [10], тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию времени ожидания.

Для практического применения расчетного выражения (7) необходимо определить числовые характеристики распределений (3) H_2 и (4) E_2 . Для этого воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до третьего порядка для распределения (3):

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}, \quad \bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2}, \quad \bar{\tau}_\lambda^3 = \frac{6p}{\lambda_1^3} + \frac{6(1-p)}{\lambda_2^3}. \quad (8)$$

При аппроксимации с использованием первых двух моментов неизвестные параметры распределения (3) λ_1, λ_2, p определяются с помощью следующих выражений [6]:

$$\lambda_1 = 2p / \bar{\tau}_\lambda, \quad \lambda_2 = 2(1-p) / \bar{\tau}_\lambda,$$

$$p = \frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{(c_\lambda^2 - 1) / (c_\lambda^2 + 1)}]. \quad (2)$$

Отсюда следует, что коэффициент вариации $c_\lambda \geq 1$. При аппроксимации с использованием первых трех моментов для нахождения параметров распределения (3) необходимо в пакете Mathcad решить систему трех уравнений (8), полученных методом моментов. При этом необходимым и достаточным условием существования решения является выполнение условия: $\bar{\tau}_\lambda^3 \cdot \bar{\tau}_\lambda \geq 1,5 \bar{\tau}_\lambda^2$ [11].

Для распределения (4) имеем:

$$\bar{\tau}_\mu = \frac{1}{\mu}, \quad \bar{\tau}_\mu^2 = \frac{3}{2\mu^2}, \quad c_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, гиперэкспоненциальный закон распределения второго порядка может определяться полностью двумя первыми моментами и перекрывать весь диапазон изменения коэффициента вариации $(1, \infty)$. Величины $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu = 1/\sqrt{2}$ будем считать входными параметрами для расчета среднего времени ожидания для системы $H_2/E_2/1$ с использованием выражения (7). Тогда алгоритм расчета сведется к последовательному определению параметров распределения (3) из выражений (9) и к нахождению нужных корней многочлена $s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0$ с приведенными выше коэффициентами, а затем к использованию расчетного выражения (7).

Теперь рассмотрим систему $H_2/E_2/1$ с запаздыванием. Такую систему мы уже обозначили выше как $H_2^-/E_2^-/1$. Для нее потоки описываются следующими функциями плотности:

$$a(t) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1(t-t_0)} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-t_0)}, & t > t_0, \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0, \end{cases} \quad (10)$$

$$b(t) = \begin{cases} 4\mu^2 (t-t_0) e^{-2\mu(t-t_0)}, & t > t_0, \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (11)$$

Утверждение. Спектральное разложение решения ИУЛ для системы $H_2^-/E_2^-/1$ $A^*(-s) * B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ имеет точно такой же вид (5), что и для системы $H_2/E_2/1$.

Доказательство. Преобразование Лапласа функций (10) и (11) имеют вид:

$$A^*(s) = [p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2}] \cdot e^{-t_0 s},$$

$$B^*(s) = \left(\frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 e^{-t_0 s}.$$

Тогда

$$A^*(-s) \times B^*(s) - 1 = \left[p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] \cdot e^{t_0 s} \times \\ \times \left(\frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 e^{-t_0 s} - 1 = \\ = \left[p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] \times \left(\frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 - 1.$$

Показатели степени у экспонент в спектральном разложении обнуляются и таким образом операция сдвига во времени нивелируются. Спектральные разложения решения ИУЛ для обеих систем совпадают и имеют вид (5). Утверждение 1 доказано.

Следовательно, все проведенные выше выкладки для системы $H_2/E_2/1$ справедливы и для системы $H_2^-/E_2^-/1$. Таким образом, для системы $H_2^-/E_2^-/1$ можно воспользоваться полученными выше результатами для системы $H_2/E_2/1$, но с измененными числовыми характеристиками сдвинутых распределений (10) и (11).

Определим числовые характеристики сдвинутых распределений H_2^- (10) и E_2^- (11). Для их определения воспользуемся свойством преобразования Лапласа функции плотности воспроизводить моменты:

$$-\frac{dA^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} = -\frac{d}{ds} \left\{ \left[p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} \right] e^{-t_0 s} \right\} \Big|_{s=0} = \\ = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0.$$

Отсюда среднее значение интервала между поступлениями требований:

$$\bar{\tau}_\lambda = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0. \quad (12)$$

Найдя вторую производную от преобразования $A^*(s)$ при $s=0$ определим 2-й начальный момент интервала между поступлениями

$$\bar{\tau}_\lambda^2 = 2[p\lambda_1^{-2} + (1-p)\lambda_2^{-2}] + t_0^2 + 2t_0[p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1}]. \quad (13)$$

Тогда квадрат коэффициента вариации:

$$c_\lambda^2 = \frac{[(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2]}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2}. \quad (14)$$

Положив, как и в случае с обычным распределением (3)

$$\lambda_1 = 2p / (\bar{\tau}_\lambda - t_0), \quad \lambda_2 = 2(1-p) / (\bar{\tau}_\lambda - t_0) \quad (15)$$

и подставив (15) в (14) получим уравнение четвертой степени относительно параметра p . Решив его с учетом условия $0 < p < 1$ определяем параметр p :

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{2[(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2]}}. \quad (16)$$

Подставив выражение (16) в (15) находим неизвестные параметры распределения (10) λ_1, λ_2 . При этом в качестве p можно выбрать любое из двух значений.

Остается определить числовые характеристики распределения (11). Среднее время обслуживания в системе $H_2^-/E_2^-/1$ равно

$$\bar{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0. \quad (17)$$

Отсюда параметр μ распределения (11) будет равен $\mu = 1 / (\bar{\tau}_\mu - t_0)$.

Отсюда диапазон изменения параметра сдвига определится из условия $0 < t_0 < \bar{\tau}_\mu$.

Второй начальный момент времени обслуживания равен

$$\bar{\tau}_\mu^2 = t_0^2 + \frac{2t_0}{\mu} + \frac{3}{2\mu^2}. \quad (18)$$

Отсюда коэффициент вариации времени обслуживания будет равен

$$c_\mu = [\sqrt{2}(1 + \mu t_0)]^{-1} \quad (19)$$

Таким образом, все параметры распределений (10) и (11) при задании значений $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu, t_0$ в качестве входных данных для системы $H_2^-/E_2^-/1$ будут определены однозначно методом моментов.

Заметим, что коэффициенты вариации $c_\lambda > 0$ и $c_\mu < 1/\sqrt{2}$ при параметре сдвига $t_0 > 0$. Таким образом, очевидно, что система $H_2^-/E_2^-/1$ также относится к типу G/G/1.

Теперь рассмотрим влияние параметра сдвига на коэффициенты вариаций распределений. Для обычного распределения H_2

$$c_\lambda^2 = \frac{[(1-p^2)\lambda_1^2 - 2p\lambda_1\lambda_2(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2]}{[(1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2}.$$

Сравнивая последнее выражение с (14) убеждаемся, что параметр сдвига во времени $t_0 > 0$ уменьшает коэффициент вариации интервалов поступлений в

$1 + \frac{t_0\lambda_1\lambda_2}{[\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p]}$ раз. Аналогично для эрланговского

закона времени обслуживания, параметр сдвига уменьшает коэффициент вариации времени обслуживания в $(1 + \mu t_0)$ раз. Учитывая квадратичную зависимость среднего времени ожидания от коэффициентов вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания, убеждаемся в том, что введение параметра сдвига в законы распределения, уменьшает среднее время ожидания в очереди в СМО.

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Ниже в табл. 1 приведены данные расчетов для системы $H_2/E_2/1$ для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$.

Таблица 1 – Результаты экспериментов для СМО $H_2/E_2/1$ в сравнении с $H_2/M/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания	
ρ	c_λ	для системы $H_2/E_2/1$	для системы $H_2/M/1$
0,1	1	0,083	0,111
	2	0,141	0,187
	4	0,171	0,230
	8	0,182	0,245
0,5	1	0,751	1,000
	2	1,764	2,162
	4	4,082	4,831
	8	8,911	10,402
0,9	1	6,752	9,000
	2	20,016	22,409
	4	73,321	75,786
	8	286,642	289,134

Для сравнения справа в колонке приведены данные по системе $H_2/M/1$. Так как коэффициент вариации для распределения E_2 меньше коэффициента вариации экспоненциального распределения M , то и среднее время ожидания в системе $H_2/E_2/1$ будет меньше, чем в системе $H_2/M/1$. Данные табл. 1 полностью подтверждают этот факт.

В табл. 2 приведены данные расчетов для системы $H_2^-/E_2^-/1$ также для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$ при $c_\lambda = 2$. Заметим, что система $H_2/E_2/1$ применима при $c_\lambda \geq 1$ и $c_\mu = 1/\sqrt{2}$, а система $H_2^-/E_2^-/1$ – при $c_\lambda > 0$ и $c_\mu < 1/\sqrt{2}$. Таким образом, система $H_2^-/E_2^-/1$ применима для широкого диапазона изменения параметров, чем обычная система $H_2/E_2/1$ и расширяет ее возможности.

В правой колонке табл. 2 для сравнения приведены результаты для обычной системы $H_2/E_2/1$.

Коэффициент загрузки ρ в обеих таблицах определяется отношением средних интервалов $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$. Расчеты, приведенные в таблицах, проведены для нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$. Данные таблиц 1 и 2 хорошо согласуются с результатами двух моментной аппроксимации [18] в той области изменения параметров, в которой рассмотренные системы применимы.

Система $H_2^-/E_2^-/1$ применима и в случае $c_\lambda < 1$, в частности при $\rho = 0,9$, $c_\lambda = 0,2$, $t_0 = 0,9$, $c_\mu = 0,071$, среднее время ожидания будет равно $\bar{W} = 0,072$ единиц времени, снизившись в несколько десятков раз по сравнению с обычной системой.

Таблица 2 – Результаты экспериментов для СМО $H_2^-/E_2^-/1$

Входные параметры			Среднее время ожидания	
ρ	c_μ	t_0	для системы $H_2^-/E_2^-/1$	для системы $H_2/E_2/1$
0,1	0,071	0,9	0,001	0,141
	0,354	0,5	0,035	
	0,636	0,1	0,114	
	0,700	0,01	0,138	
0,5	0,071	0,9	0,015	1,764
	0,354	0,5	0,472	
	0,636	0,1	1,480	
	0,700	0,01	1,735	
0,9	0,071	0,9	0,748	20,016
	0,354	0,5	14,769	
	0,636	0,1	19,157	
	0,700	0,01	19,931	

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для систем $H_2/E_2/1$ и $H_2^-/E_2^-/1$ с помощью которых выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди для этих систем в замкнутой форме.

Операция сдвига во времени уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем, что среднее время ожидания в системе $G/G/1$ связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в системе с запаздыванием будет меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки. Например, для системы $H_2^-/E_2^-/1$ при нагрузке $\rho = 0,9$ и параметре сдвига $t_0 = 0,9$ коэффициент вариации интервалов поступления c_λ уменьшается с 2 для обычной системы до 1,105, коэффициент вариации времени обслуживания c_μ уменьшается с $1/\sqrt{2}$ до 0,071, а время ожидания уменьшается с 20,016 единиц времени для обычной системы до 0,748 единиц времени для системы с запаздыванием.

6 ОБСУЖДЕНИЕ

С уменьшением значения параметра t_0 среднее время ожидания в системе $H_2^-/E_2^-/1$ стремится к среднему времени ожидания в обычной системе $H_2/E_2/1$. Это полностью подтверждает адекватность построенной математической модели массового обслуживания. Данные таблицы 2 подтверждают тот факт, что за счет уменьшения коэффициентов вариации c_λ и c_μ вследствие ввода параметра сдвига t_0 , уменьшается среднее время ожидания в системе $H_2^-/E_2^-/1$ с запаздыванием.

Диапазон изменения параметров у системы $H_2^-/E_2^-/1$ шире, чем у системы $H_2/E_2/1$, поэтому указанные системы с успехом могут быть применены в современной теории телеграфика. Полученное расчетное выражение для времени ожидания расширяет и дополняет известную незавершенную формулу теории массового обслуживания для среднего времени ожидания для систем $G/G/1$ с произвольными законами распределений входного потока и времени обслуживания.

ВЫВОДЫ

В работе классическим методом спектрального разложения решена задача определения главной характеристики СМО – среднего времени ожидания в очереди для двух систем $H_2/E_2/1$ и $H_2^-/E_2^-/1$.

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемых систем и с их помощью выведены расчетные выражения для среднего времени ожидания в очереди для этих систем в замкнутой форме. Эти выражения расширяют и дополняют известную формулу теории массового обслуживания для среднего времени ожидания для систем типа $G/G/1$ с произвольными законами распределений входного потока и времени обслуживания.

Практическое значение работы заключается в том, что полученные результаты с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого необходимо знать числовые характеристики интервалов входящего трафика и времени обслуживания на уровне двух первых моментов, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика [8, 9].

Перспективы дальнейших исследований просматриваются в продолжении исследования систем типа $G/G/1$ с другими общими входными распределениями и в расширении и дополнении формул для среднего времени ожидания.

ЛІТЕРАТУРА / LITERATURA

1. Тарасов В. Н. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием / В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева, И. А. Блатов // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 11. – С. 51–59.
2. Тарасов В. Н. Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием / В. Н. Тарасов // Автоматика и телемеханика. – 2018. – № 12. – С. 57–70.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. под редакцией В. И. Неймана / Л. Клейнрок. – М.: Машинное строительство, 1979. – 432 с.
4. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems / N. Brannstrom. – Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004. – 79 p.

5. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods / W. Whitt // Operation Research. – 1982. – № 1. – P. 125–147.
6. Бочаров П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
7. Тарасов В. Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями / В. Н. Тарасов // Проблемы передачи информации. – 2016. – Т. 52, № 1. – С. 16–26.
8. Тарасов В. Н. Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями / В. Н. Тарасов // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2018. – № 4. – С. 61–70.
9. Тарасов В. Н. Исследование систем массового обслуживания с сдвинутыми эрланговскими и экспоненциальными входными распределениями / В. Н. Тарасов // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2019. – № 1. – С. 67–76.
10. [HTTPS://tools.ietf.org/html/rfc3393](https://tools.ietf.org/html/rfc3393). RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (дата обращения: 26.02.2016).
11. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals / A. Myskja // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers. – 1991. – P. 683–688.
12. Алиев Т. И. Основы моделирования дискретных систем / Т. И. Алиев. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.
13. Алиев Т. И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания / Т. И. Алиев // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – № 2(84). – С. 88–93.
14. Aras A.K. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment / A. K. Aras, X. Chen, Y. Liu // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89, № 1. – P. 81–125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
15. Jennings O.B., Comparisons of ticket and standard queues / O. Jennings, J. Pender // Queueing Systems. – 2016. – Vol. 84, № 1. – P. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
16. Gromoll H. C. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times / H. C. Gromoll, B. Terwilliger, B. Zwart // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89, № 3. – P. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
17. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates / B. Legros // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89, № 3. – P. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
18. Кругликов В. К. Анализ и расчет сетей массового обслуживания с использованием двумерной диффузионной аппроксимации / В. К. Кругликов, В. Н. Тарасов // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 8. – С. 74–83.

Received 18.11.2019.

Accepted 23.02.2020.

УДК 621.391.1: 621.395

Тарасов В. Н. – д-р техн. наук, профессор, завідувач кафедри програмного забезпечення та управління в технічних системах Півольського державного університету телекомунікацій та інформатики, Росія.

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ $H_2/E_2/1$ ТА ЇЇ АНАЛОГА ЗІ ЗСУНУТИМИ ВХІДНИМИ РОЗПОДІЛАМИ

Актуальність. В теорії масового обслуговування дослідження систем $G/G/1$ актуальні в зв'язку з тим, що не можна отримати рішення для часу очікування в кінцевому вигляді в загальному випадку при довільних законах розподілів вхідного потоку і часу обслуговування. Тому важливі дослідження таких систем для окремих випадків вхідних розподілів. Була розглянута задача виведення рішення для середнього часу очікування в черзі в замкнутій формі для пари систем зі звичайними і зі зсунутими гіперекспонентними та ерлангівськими вхідними розподілами.

Мета роботи. Отримання рішення для основної характеристики системи – середнього часу очікування вимог в черзі для двох систем масового обслуговування типу $G/G/1$ зі звичайними та зі зсунутими гіперекспонентними та ерлангівськими вхідними розподілами.

Метод. Для вирішення поставленого завдання був використаний класичний метод спектрального розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндли. Цей метод дозволяє отримати рішення для середнього часу очікування для розглянутих систем в замкнутій формі. Метод спектрального розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндли грає важливу роль в теорії систем $G/G/1$. Для практичного застосування отриманих результатів було використано відомий метод моментів теорії ймовірностей.

Результати. Вперше отримано спектральні розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндли для двох систем, за допомогою яких виведені розрахункові формули для середнього часу очікування в черзі в замкнутій формі.

Висновки. Отримано спектральні розкладання рішення інтегрального рівняння Ліндли для розглянутих систем, та з їх допомогою виведені розрахункові формули для середнього часу очікування в черзі для цих систем в замкнутій формі. Показано, що в сис-

© Тарасов В. Н., 2020

DOI 10.15588/1607-3274-2020-1-10

темах з запізненням у часі середній час очікування менше, ніж в звичайних системах. Ці формули розширюють і доповнюють відомі формули теорії масового обслуговування для середнього часу очікування для систем $G/G/1$ з довільними законами розподілів вхідного потоку і часу обслуговування. Такий підхід дозволяє розрахувати середній час очікування для зазначених систем в математичних пакетах для широкого діапазону зміни параметрів трафіку. Всі інші характеристики систем є похідними часу очікування.

Крім середнього часу очікування, такий підхід дає можливість також визначити моменти вищих порядків часу очікування. З огляду на той факт, що варіація затримки пакетів (джиттер) в телекомунікації визначається як дисперсія часу очікування від його середнього значення, то джиттер можна буде визначити через дисперсію часу очікування.

Отримані результати публікуються вперше.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гіперекспонентний та ерлангівський закони розподілу, інтегральне рівняння Ліндлі, метод спектрального розкладання, перетворення Лапласа.

UDC 621.391.1:621.395

ANALYSIS OF $H_2/E_2/1$ SYSTEM AND HER OF THE ANALOG WITH SHIFTED INPUT DISTRIBUTIONS

Tarasov V. N. – Dr. Sc., Professor, Head of Department of Software and Management in Technical Systems of Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation.

ABSTRACT

Context. In the queuing theory of a research of the $G/G/1$ systems are relevant because it is impossible to receive decisions for the average waiting time in queue in a final form in case of arbitrary laws of distributions of an input flow and service time. Therefore, the study of such systems for particular cases of input distributions is important. The problem of finding a solution for the average waiting time in queue in a closed form for two systems with ordinary and shifted hyperexponential and erlangian input distributions is considered.

Objective. Obtaining a solution for the main system characteristic – the average waiting time in queue for two queuing systems of type $G/G/1$ with ordinary and shifted hyperexponential and erlangian input distributions.

Method. To solve this problem, we used the classical method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation. This method allows to obtaining a solution for the average waiting time for systems under consideration in a closed form. The method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation plays an important role in the theory of systems $G/G/1$. For the practical application of the results obtained, the well-known method of moments of probability theory is used.

Results. The spectral decompositions of the solution of the Lindley integral equation for a pair of dual systems are for the first time received, with the help of which the formulas for the average waiting time in a closed form are derived.

Conclusions. The spectral expansions of the solution of the Lindley integral equation for the systems under consideration are obtained and with their help the formulas for the average waiting time in the queue for these systems in a closed form are derived. It is shown that in systems with a time lag, the average waiting time is less than in conventional systems. The obtained formula for the average waiting time expands and complements the well-known queuing theory incomplete formula for the average waiting time for $G/G/1$ systems with arbitrary laws of the input flow distribution and service time. This approach allows us to calculate the average latency for these systems in mathematical packages for a wide range of traffic parameters. All other characteristics of the systems are derived from the waiting time. In addition to the average waiting time, such an approach makes it possible to determine also moments of higher orders of waiting time. Given the fact that the packet delay variation (jitter) in telecommunications is defined as the spread of the waiting time from its average value, the jitter can be determined through the variance of the waiting time. The results are published for the first time.

KEYWORDS: hyperexponential and erlangian distribution laws, Lindley integral equation, spectral decomposition method, Laplace transform.

REFERENCES

1. Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Blatov I. A. Analysis and calculation of queuing system with delay, *Automation and Remote Control*, 2015, Vol. 76, No. 11, pp. 1945–1951. DOI: 10.1134/S0005117915110041.
2. Tarasov V. N. Extension of the Class of Queueing Systems with Delay, *Automation and Remote Control*, 2018, Vol. 79, No. 12, pp. 2147–2157. DOI: 10.1134/S0005117918120056.
3. Kleinrock L. Теорія масового обслуговування. Moscow, Mashinostroenie Publ, 1979, 432 p.
4. Brannstrom N. A. Queueing Theory analysis of wireless radio systems. Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004, 79 p.
5. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods, *Operation Research*, 1982, Vol. 30, No. 1, pp. 125–147.
6. Bocharov P. P., Pechinkin A. V. Теорія масового обслуговування. Moscow, Publishing House of Peoples' Friendship University, 1995, 529 p.
7. Tarasov V. N. Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions, *Problems of Information Transmission*, 2016, Vol. 52, No. 1, pp. 14–23. DOI: 10.1134/S0032946016010038.
8. Tarasov V. N. Analysis and comparison of two queueing systems with hypererlangian input distributions, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2018, Vol. 47, No. 4, pp. 61–70. DOI 10.15588/1607-3274-2018-4-6.
9. Tarasov V. N., Bakhareva N. F. Research of queueing systems with shifted erlangian and exponential input distributions, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2019, Vol. 48, No. 1, pp. 67–76. DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-7.
10. RFC 3393 [IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM)] Available at: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. (accessed: 26.02.2016).
11. Myskja A. An improved heuristic approximation for the $GI/GI/1$ queue with bursty arrivals. Teletraffic and datatraffic in a Period of Change. ITC-13. Elsevier Science Publishers, 1991, pp. 683–688.
12. Aliev T. I. Osnovy modelirovaniya diskretnykh sistem. SPb: SPbGU ITMO, 2009, 363 p.
13. Aliev T. I. Approksimaciya veroyatnostnykh raspredelenij v modelyah massovogo obsluzhivaniya. Nauchno-tehnicheskij vestnik informacionnykh tekhnologij, mekhaniki i optiki, 2013, Vol. 84, No. 2, pp. 88–93.
14. Aras A.K., Chen X. & Liu Y. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 1, pp. 81–125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
15. Jennings O.B. & Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016, Vol. 84, No. 1, pp. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
16. Gromoll H.C., Terwilliger B. & Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 3, pp. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
17. Legros B. $M/G/1$ queue with event-dependent arrival rates, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 3, pp. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
18. Kruglikov V.K., Tarasov V.N. Analysis and calculation of queueing-networks using the two-dimensional diffusion-approximation, *Automation and Remote Control*, 1983, Vol. 44, No. 8, pp. 1026–1034.