

## ОСОБЛИВОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ ТВІРНИХ МАСИВІВ ДЛЯ СИНТЕЗУ ШВИДКИХ АЛГОРИТМІВ ДКП I–IV

**Процько І. О.** – д-р техн. наук, доцент кафедри автоматизованих систем управління Національного університету «Львівська політехніка», Львів, Україна.

### АНОТАЦІЯ

**Актуальність.** Дискретні косинусні перетворень забезпечують високу ефективність застосувань в сучасних засобах оброблення інформації. Адаже обчислення прямих і зворотних перетворень в дійсній області особливо актуально для ефективного розв'язання конкретних практичних завдань у сфері інформаційних технологій. Застосування швидких перетворень зі значним зменшенням обчислювальних затрат вимагає розробки нових ефективних методів синтезу алгоритмів та їх виконання для різних видів дійсних дискретних косинусних перетворень.

**Мета роботи** – визначення відмінностей та спільних особливостей обчислення твірних масивів для синтезу швидких алгоритмів чотирьох основних видів дискретних косинусних перетворень на основі циклічних згорток.

**Метод.** В роботі виконано аналіз особливостей обчислення твірних масивів на основі циклічного розкладу підстановки, яка визначається з рядків/стовпців аргументів базисних функцій ядра дискретного косинусного перетворення.

**Результати.** Підсумком дослідження є визначення та узагальнення основних відмінностей та спільних особливостей обчислення твірних масивів для формування блочно-циклічних структур в базисних матрицях дискретних косинусних перетворень довільних обсягів.

**Висновки.** У проведеному дослідженні проаналізовано особливості обчислення твірних масивів для чотирьох основних видів дискретних косинусних перетворень. Основна ідея застосування узагальненого математичного апарату для ефективного обчислення різних видів дискретних косинусних перетворень на основі циклічних згорток полягає у використанні твірних масивів, що містять стислий опис блочно-циклічної структури базису перетворення. Твірні масиви визначаються за допомогою циклічного розкладу підстановки і забезпечують приведення базисної матриці перетворення до набору циклічних зліва підматриць. Аналіз особливостей вибору послідовностей підстановки, виконання циклічного розкладу підстановки, відбір підмасивів для формування твірних масивів забезпечують можливість ефективної організації обчислень для різних видів та обсягів дискретних косинусних перетворень.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** дискретне косинусне перетворення, циклічна згортка, твірний масив, циклічний розклад підстановки.

### АБРЕВІАТУРИ

IEC – International Electrotechnical Commission;  
ISO – International Organization for Standardization;  
ITU-T – International Telecommunication Union;  
ДКП – дискретне косинусне перетворення;  
ДПФ – дискретне перетворення Фур'є;  
ІТ – інформаційні технології;  
НВІС – надвеликі інтегральні схеми;  
ШКП – швидкі косинусні перетворення;  
ЦЗ – циклічна згортка.

### НОМЕНКЛАТУРА

$C^{I-IV}_N$  – базисна матриця дискретного косинусного перетворення видів I–IV;

$C_a^{I-IV}$  – матриця аргументів базисних функцій дискретного косинусного перетворення видів I–IV;

$c_{k,n}$  – елемент матриці аргументів базисних функцій;

$h_{ij}$  – елемент твірної підмасиви;

$H(n')$  – твірний масив;

$H_i(L_i)$  – твірний підмасив;

$Hr(N)$  – твірний масив рядків;

$Hc(N)$  – твірний масив стовпців;

$n'$  – обсяг твірної масиви;

$N$  – обсяг дискретного косинусного перетворення;

$P(k)$  – циклічні матриці;

$Q(k)$  – циклічні матриці;

$T$  – період повторення базисної функції;

$X$  – матриця стовпець вхідної послідовності дискретного косинусного перетворення;

$Y$  – матриця стовпець вихідна послідовність дискретного косинусного перетворення;

$\gamma$  – нормалізуючий множник.

### ВСТУП

ДКП відносять до ортогональних тригонометричних перетворень, які відповідають властивостям ДПФ [1]. Для широкого практичного застосування міжнародними організаціями стандартизації ISO/IEC та ITU-T рекомендовано 8 видів ДКП I–VIII [2]. Ортогональні тригонометричні базисні системи ДКП I–VIII забезпечують обчислення прямих і зворотних перетворень в дійсній області, що особливо актуально для ефективного розв'язання конкретних практичних завдань в сфері ІТ.

Одним з підходів ефективного обчислення ДКП, яку відзначають у багатьох виданнях із цифрової обробки інформації [3], є застосування алгоритмів ШКП на основі ЦЗ. Дискретні перетворення і згортка – два різні, але тісно взаємопов'язані розділи цифрового опрацювання інформації. Ефективне обчислення цифрової згортки в більшості завдань реалізується за допомогою швидкої згортки, яка базується на використанні швидких перетворень класу Фур'є. А ефективне обчислення ДКП може реалізуватись через використання швидких ЦЗ. В роботі [4] розглянуто розвиток методів обчислення ДКП на основі ЦЗ. Одним з цих

методів використовується твірний масив для приведення структури дійсної базисної системи ДКП до набору блочно-циклічних структур і, відповідно, до обчислення перетворень на основі ЦЗ [5].

**Об'єктом дослідження** є алгоритмічний та програмний процес обчислення твірних масивів для синтезу ШКП на основі ЦЗ.

**Предметом дослідження** є особливості визначення твірних масивів для синтезу алгоритмів обчислення основних видів ДКП I–IV на основі ЦЗ.

**Метою роботи** є визначення відмінностей та спільних особливостей обчислення твірних масивів для синтезу швидких алгоритмів чотирьох основних видів ДКП на основі ЦЗ.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

В загальному перетворення ДКП I–IV в матричній формі має вигляд:

$$Y = \gamma C_N^{I-IV} X. \quad (1)$$

Для  $k$ -го базисного вектора  $n$ -тий елемент (без нормалізуючого множника) для кожного з видів ДКП I–IV має вигляд:

$$\text{ДКП - I: } \cos[kn\pi/N], \quad (k, n = 0, 1, \dots, N). \quad (2)$$

$$\text{ДКП - II: } \cos[k(2n+1)\pi/2N], \quad (k, n = 0, 1, \dots, N-1). \quad (3)$$

$$\text{ДКП - III: } \cos[(2k+1)n\pi/2N], \quad (k, n = 0, 1, \dots, N-1). \quad (4)$$

$$\text{ДКП - IV: } \cos[(2k+1)(2n+1)\pi/4N], \quad (k, n = 0, 1, \dots, N-1). \quad (5)$$

Функції (2–5) для кожного з видів ДКП мають різні вирази аргументів і, відповідно, різну періодичність ( $2N, 4N, 8N$ ) та симетричність (відносно  $\pi, \pi/2, \pi/4$ ) на періоді повторення.

Для визначення твірних масивів використовують підстановки на основі рядків/стовпців аргументів функції базисної матриці  $C_N^{I-IV}$  перетворення [6]. Тому визначимо відмінності та спільні особливості вибору підстановок, виконання циклічного розкладу підстановки для формування твірних масивів, що використовуються для синтезу алгоритмів обчислення основних видів ДКП I–IV на основі ЦЗ.

## 2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Більшість алгоритмів для швидкого обчислення ДПФ на основі ЦЗ застосовують переіндексацію рядків/стовпців базисної матриці. Відповідно публікації Ч. Рейдера [7] для перетворень класу Фур'є з обсягом, що дорівнює простому числу, для переіндексації використовуються примітивні елементи. В роботі [8] описано удосконалений алгоритм переформування базисних матриць дискретних перетворень класу Фур'є до блочно-циклічних структур.

Загальний підхід обчислення ДКП довільного обсягу  $N$  на основі ЦЗ сформульовано Ю. Х. Чаном та В.-Ч. Сіу в [9], в якому переформування обчислення ДКП зводиться до вигляду:

$$Y(k) = \{2T(k) + x(0)\} \cos(k\pi/2N), \quad k=0, 1, \dots, N-1; \quad (6)$$

$$T(k) = \frac{1}{2}[P(k) + P(2N-k) + Q(k) + Q(2N-k)] \sec[k^2\pi/2N], \quad (7)$$

$\{P(k)+P(2N-k)\}$ ,  $\{Q(k)+Q(2N-k)\}$  відповідають циклічним матрицям, що визначають обчислення на основі ЦЗ.

Загальний алгоритм, як зазначають автори, не є оптимальним із точки зору обчислювальної складності, але підтверджує можливість ефективного обчислення ДКП за допомогою ЦЗ. Тому алгоритми ДКП на основі ЦЗ продовжуються досліджуватись авторами в напрямі удосконалення попередніх робіт [10].

Багато публікацій присвячено реалізації на апаратному рівні обчислення ДКП видів I–IV на основі ЦЗ, що пов'язано з ефективною реалізацією ЦЗ в процесі розробки НВІС та широкому їх застосуванню в системах обробки відео та аудіо інформації [11].

Підхід застосування твірних масивів для ефективного обчислення дискретних перетворень з гармонічним базисом на основі ЦЗ розроблено в роботах [12, 13]. Визначення твірних масивів, що відповідають примітивним так і не примітивним елементам, використовується для формування блочно-циклічних структур у базисних матрицях ДКП I–IV. Використання твірних масивів на фоні узагальненого підходу приведення обчислення перетворень до ЦЗ має свої особливості для різних видів ДКП I–IV. Аналіз відмінностей та спільних особливостей формування блочно-циклічних структур для синтезу алгоритмів обчислення ДКП I–IV дозволяє забезпечити ефективнішу організацію виконання перетворень.

## 3 МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

Підхід ефективного обчислення ДКП на основі ЦЗ, що базується на декомпозиції матриці аргументів базисної функції розглянуто в роботі [13].

В результаті застосування підходу, структуру базисної матриці можна задати твірним масивом

$$H(n) = H_0(L_0)H_1(L_1)\dots H_k(L_k) = (h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1L_1})(h_{21}, h_{22}, \dots, h_{2L_2})\dots (h_{kL_1}, h_{kL_2}, \dots, h_{kL_k}). \quad (8)$$

Число підмасивів  $k$  в твірному масиві  $H(n)$  визначається конкретним значенням  $N$  обсягу перетворень ДКП I–IV.

Твірний масив компактно описується у вигляді циклічного розкладу підстановки, який формується за

підстановкою з рядків/стовпців аргументів функції базисної матриці  $C^{I-IV}_N$  перетворення (1).

Розглянемо особливості визначення твірних масивів для різних видів ДКП I–IV, що використовуються для формування блочно-циклічних структур базисів перетворень і, відповідно, приводять до обчислення ДКП на основі ЦЗ.

Твірний масив в алгоритмі обчислення ДКП-I обсягу  $N$ , відповідно робіт [5, 13], використовує для переіндексації рядків/стовпців базисної матриці  $C^I_a$  цілочисельні елементи, які є аргументами функції (2), циклічний розклад підстановки. Підстановка задається двома рядками, що містять набір цілочисельних аргументів базисної функції (2), з матриці  $C^I_a$ , доповненої одним додатковим  $N$ -м рядком та стовпцем.

Для ДКП-I обсягу  $N$  базисна функція (2) є періодичною відносно  $2N$  вибірок, тому рядки з набором аргументів базисної функції обсягом  $N+1$  можна записати у вигляді:

$$C^I_a(k, n) = [(k \cdot n) \bmod(2N)], \quad (k, n = 0, 1, \dots, N). \quad (9)$$

Базисна функція (2) симетрична відносно аргумента  $N$ , що відповідає значенню  $\pi$ , тому  $k$ -рядків можна записати у вигляді:

$$C^I_a(k, n) = 2N - [(c_{k,n}) \bmod(2N)],$$

якщо  $[(c_{k,n}) \bmod 2N] > N, \quad (k, n = 0, 1, \dots, N). \quad (10)$

Для формування підстановки вибирають два рядки базисної матриці  $C^I_a$ . Ці рядки є довільними, але не повинні мати індекс, що є елементом розкладу обсягу  $N$  перетворення. Найпростіше, не обчислюючи, використати перший рядок аргументів функції базисної матриці  $C^I_a$ , що відповідає натуральному ряду.

Наприклад, ДКП-I обсягу  $N=15$  твірний масив визначаємо за підстановкою

1-й рядок	(0	1	2	3	4	5	6	7
2-й рядок	(0	2	4	6	8	10	12	14
1-й рядок	8	9	10	11	12	13	14	
2-й рядок	1	3	5	7	9	11	13	

В результаті сформоване значення твірного масиву у вигляді циклічного розкладу підстановки

$$H(15) = H_0(1)H_1(4)H_2(4)H_3(4)H_4(2) = (0)(1, 2, 4, 8)(14, 13, 11, 7)(6, 12, 9, 3)(10, 5).$$

Отже, серед основних особливостей, які необхідно враховувати у процесі формування твірного масиву для ДКП-I, можна зазначити:

– розмірність рядків аргументів підстановки  $N+1$ , до яких входить один додатковий елемент  $(c_{k,N})$ ;

– твірний масив  $H(n)$  формується на основі рядків, які визначаються за виразом (10), в якому враховується властивість симетричності базисної функції (2).

Твірний масив в алгоритмі обчислення ДКП-II обсягу  $N$ , відповідно робіт [5, 13], використовує для переіндексації рядків/стовпців базисної матриці  $C^{II}_a$ , елементами якої є аргументи функції (3), циклічний розклад підстановки.

Твірний масив, що формує блочно-циклічну структуру базисної матриці в алгоритмі обчислення ДКП-II обсягу  $N$ , визначається для набору числа значень аргументів базисної функції обсягу

$$n' = (L_1 + L_2 + \dots + L_k) = 2N. \quad (11)$$

Для ДКП-II обсягу  $N$  базисна функція (3) є періодичною відносно  $4N$  вибірок. Тому  $k$ -й рядок аргументів базисної функції в матриці  $C^{II}_a$  можна записати у вигляді:

$$C^{II}_a(k, n) = (c_{k,n}) \bmod(4N), \quad (k, n = 0, 1, \dots, 2N). \quad (12)$$

Аргумент  $c_{k,n}$ , відповідно виразу (3), для кожного  $n$ -го елемента  $k$ -тої компоненти ДКП-II дорівнює

$$c_{k,n} = k(2n+1), \quad (k, n = 0, 1, \dots, 2N). \quad (13)$$

Тобто, базисний вектор містить послідовність непарних цілочисельних елементів. Для формування підстановки вибирають два стовпці базисної матриці  $C^{II}_a$ . Ці стовпці є довільними, але не повинні мати індекс, що є елементом розкладу обсягу  $N$  перетворення.

Базисна функція (3) симетрична відносно аргумента  $2N$ , що відповідає значенню  $\pi$ , тому значення елементів  $c_{k,n}$  стовпців зменшується відповідно властивості симетричності

$$C^{II}_a(k, n) = 4N - [(c_{k,n}) \bmod(4N)],$$

якщо  $[(c_{k,n}) \bmod 4N] > 2N, \quad (k, n = 0, 1, \dots, 2N). \quad (14)$

Внаслідок різних виразів індексів стовпців та рядків (13), що входять до аргументів базисної функції (3) для переіндексації необхідно використовувати твірний масив  $Hr(n)$  рядків та твірний масив  $Hc(n)$  стовпців.

Наприклад, для ДКП-II обсягу  $N=7$  задамо підстановку, що має початковий 0-й стовпець аргументів базисної функції в матриці  $C^{II}_a$ , які відповідає натуральному ряду, та 1-й стовпець з індексами, що не є елементом розкладу обсягу  $N$  перетворення.

Твірний масив визначаємо за підстановкою, елементами якої визначені відповідно властивості симетричності (14),

0-й стовпець	(0	1	2	3	4	5	6
1-й стовпець	(0	3	6	9	12	13	10
0-й стовпець	7	8	9	10	11	12	13)
1-й стовпець	7	4	1	2	5	8	11)

$$H(14) = H_0(1)H_1(3)H_2(3)H_3(1)H_4(3)H_5(3) = (0)(1,3,9)(2,6,10)(7)(12,8,4)(13,11,5).$$

Твірний масив  $Hr(7)$  для індексації *рядків* базисної матриці ДКП-II використовує відібрані з твірного масиву  $H(14)$  підмасиви з першими непарними та парними елементами меншими  $N$

$$Hr(7) = (0)(1,3,9)(2,6,10),$$

що забезпечує обчислення  $N=7$  вихідних значень ДКП-II перетворення.

Твірний масив  $Hc(7)$  для індексації *стовпців* базисної матриці ДКП-II використовує відібрані з  $H(14)$  підмасиви з першими непарними елементами меншими  $N$

$$Hc(7) = (1,3,9)(5,13,11)(7),$$

перехід  $(2n+1) \rightarrow n$  для значень елементів і матиме вигляд

$$Hc(7) = (0,1,4)(2,6,5)(3),$$

що забезпечує врахування  $N=7$  вхідних значень ДКП-II перетворення.

Серед основних *особливостей*, які необхідно враховувати у процесі формування твірного масиву для ДКП-II, можна зазначити:

- розмірність *стовпців* аргументів підстановки  $2N$  для формування твірного масиву  $H(n)$ ;
- твірний масив  $H(n)$  формується на основі елементів, які визначаються за виразом (14), що враховує властивості симетричності базисної функції (3);
- для переіндексації базисної матриці використовуються твірний масив рядків  $Hr(N)$  та твірний масив *стовпців*  $Hc(N)$ , що формуються на основі визначеного твірного масиву  $H(2N)$ .

Твірний масив в алгоритмі обчислення ДКП-III обсягу  $N$ , відповідно робіт [5, 13], використовує для переіндексації рядків/стовпців базисної матриці  $C_a^{III}$ , елементами якої є аргументи базисної функції (4), циклічний розклад підстановки.

Базисні матриці аргументів функцій ДКП-II і ДКП-III транспоновані

$$C_a^{III} = (C_a^{II})^T. \quad (15)$$

Адже,  $c_{k,n}$  аргумент в ДКП-II для кожного  $n$ -го елемента  $k$ -тої компоненти базисного вектора визначається за (13), а в ДКП-III для кожного  $n$ -го елемента  $k$ -тої компоненти базисного вектора аргументи дорівнюють

$$c_{k,n} = (2k+1)n, \quad (k, n = 0, 1, \dots, 2N). \quad (16)$$

Тобто, базисний вектор ДКП-III містить послідовність непарних цілочисельних елементів по стовпцях. Для формування підстановки вибирають два рядки базисної матриці  $C_a^{III}$ . Ці рядки є довільними, але не повинні мати індекс, що є елементом розкладу обсягу  $N$  перетворення.

Отже, формування твірних масивів для ДКП-III буде визначатись відповідно виразу (14), як і для ДКП-II.

Внаслідок різних виразів індексів стовпців та рядків (16), що входять до аргументів базисної функції (4) для переіндексації необхідно використовувати твірний масив  $Hr(n)$  рядків та твірний масив  $Hc(n)$  стовпців.

Твірні масиви  $H(2N)$  ДКП-II і ДКП-III для одного обсягу  $N$  однакові, однак відрізняються розміщенням блочно-циклічних структур в базисних матрицях аргументів, що визначає кількість ЦЗ та порядок об'єднання їхніх результатів в обчислювальному алгоритмі. Тому для ДКП-III твірний масив  $Hr(N)$  для індексації рядків та твірний масив  $Hc(N)$  для індексації стовпців відрізнятимуться.

Наприклад, ДКП-III обсягу  $N=7$  задамо підстановку, що має початковий 1-й рядок аргументів базисної функції в матриці  $C_a^{III}$ , який відповідає натуральному ряду, та 2-й рядок з індексами, що не є елементом розкладу обсягу  $N$  перетворення.

Тоді твірний масив визначаємо за підстановкою

1-й рядок	(0	1	2	3	4	5	6
2-й рядок	(0	3	6	9	12	13	10
1-й рядок	7	8	9	10	11	12	13)
2-й рядок	7	4	1	2	5	8	11)

$$H(14) = H_0(1)H_1(3)H_2(3)H_3(1)H_4(3)H_5(3) = (0)(1,3,9)(2,6,10)(7)(12,8,4)(5,13,11).$$

Твірний масив  $Hc(7)$  для індексації *стовпців* базисної матриці ДКП-III використовує відібрані з твірного масиву  $H(14)$  підмасиви з першими непарними та парними елементами меншими  $N$

$$Hc(7) = (0)(1,3,9)(2,6,10),$$

що забезпечує врахування  $N=7$  вхідних значень ДКП-III перетворення.

Твірний масив  $Hr(7)$  для індексації *рядків* базисної матриці ДКП-III використовує відібрані з масиву  $H(14)$  підмасиви з першими непарними елементами меншими  $N$

$$Hr(7) = (1,3,9)(5,13,11)(7),$$

і перехід  $(2k+1) \rightarrow k$  матиме вигляд

$$Hr(7) = (0, 1, 4)(2, 6, 5)(3),$$

що забезпечує визначення  $N=7$  вихідних значень перетворення з відповідною корекцією їх знаків (плюс/мінус).

Серед основних *особливостей*, які необхідно враховувати у процесі формування твірного масиву для ДКП-III, можна зазначити:

- розмірність рядків аргументів підстановки  $2N$  для формування твірного масиву  $H(n)$ ;
- твірний масив  $H(n)$  формується на основі елементів, які визначаються за виразом (14), що враховує властивості симетричності базисної функції (4);
- для переіндексації базисної матриці використовуються твірний масив рядків  $Hr(N)$  та твірний масив стовпців  $Hc(N)$ , що формуються на основі визначеного твірного масиву  $H(2N)$ .

Твірні масиви рядків та стовпців в Таблиці 1 аналогічно виразу (15) підтверджують взаємозворотність ДКП-II і ДКП-III.

Таблиця 1 – Твірні масиви рядків та стовпців ДКП-II, III обсягу  $N=7$

ДКП-II, N=7	$Hr(7)=0(1,3,9)(2,6,10),$	$Hc(7)=(1,3,9)(2,6,10)(7)$ $\Rightarrow (0,1,4)(2,6,5)(3),$
ДКП-III, N=7	$Hr(7)=(1,3,9)(5,13,11)(7)$ $\Rightarrow (0,1,4)(2,6,5)(3)$	$Hc(7)=(0)(1,3,9)(2,6,10),$

Твірний масив в алгоритмі обчислення ДКП-IV обсягу  $N$ , відповідно робіт [5, 13], використовує для переіндексації рядків/стовпців аргументів функції (5) базисної матриці  $C_a^{IV}$  циклічний розклад підстановки. Підстановку задається двома рядками аргументів базисної функції (5) з матриці  $C_a^{IV}$ .

Для ДКП-IV обсягу  $N$  базисна функція (5) є періодичною відносно  $8N$  вибірок

$$C_a^{IV}(k, n) = ((2k + 1)(2n + 1)) \bmod(8N), \quad (17)$$

$$(k, n = 0, 1, \dots, 2N - 1).$$

Базисна функція (5) симетрична відносно аргумента  $4N$ , що відповідає значенню  $\pi$ , тому рядки можна записати у вигляді:

$$C_a^{IV}(k, n) = 8N - [(c_{k,n}) \bmod(8N)], \quad (18)$$

якщо  $[(c_{k,n}) \bmod(8N) > 4N, (k, n = 0, 1, \dots, N)]$ .

Твірний масив, що формує блочно-циклічну структуру базисної матриці в алгоритмі обчислення ДКП-IV обсягу  $N$ , визначається для обсягу (11).

Для формування підстановки вибирають два рядки базисної матриці  $C_a^{IV}$ . Ці рядки є довільними, але не повинні мати індекс, що є елементом розкладу обсягу  $N$  перетворення.

Наприклад, для ДКП-IV обсягу  $N=8$  вибираємо 0-й рядок аргументів функції базисної матриці  $C_a^{IV}$ , що відповідає натуральному ряду, та 1-й рядок з індекса-

ми, що не є елементом розкладу обсягу  $N$  перетворення.

Тоді твірний масив визначаємо за підстановкою

0-й рядок	(1	3	5	7	9	11	13	15
1-й рядок	(3	9	15	21	27	31	25	19
0-й рядок	17	19	21	23	25	27	29	31)
1-й рядок	13	7	63	5	11	17	23	29)

що відповідає циклічному розкладу підстановки

$$H(16) = (1, 3, 9, 27, 17, 13, 25, 11, 31, 29, 23, 5, 15, 19, 7, 21).$$

Враховуючи що в ДКП-IV індекси аргументів базисної функції збільшені, то перехід  $(2n+1) \rightarrow n$  для матиме вигляд

$$H(16) = (0, 1, 4, 13, 8, 6, 12, 5, 15, 14, 11, 2, 7, 9, 3, 10).$$

Враховуючи, що базисна функція (5) асиметрична відносно аргумента  $2N$ , який відповідає значенню  $\pi/2$ , твірний масив можна записати вдвічі меншого обсягу у вигляді:

$$H(8) = (0, 1, 4, 13, 8, 6, 12, 5).$$

Це забезпечить визначення  $N=8$  вихідних значень ДКП-IV, з яких 5 обчислюються безпосередньо, а інші обчислені 3 вихідні значення потребують корекції знаку на протилежний для елементів з  $H(8)$  більших  $N$ .

Отже, серед основних *особливостей*, які необхідно враховувати у процесі формування твірного масиву для ДКП-IV, можна відзначити:

- розмірність рядків аргументів підстановки  $2N$ , що складаються з непарних елементів;
- твірний масив  $H(N)$  формується на основі рядків з елементів, які визначаються за виразом (18), що враховує властивості симетричності базисної функції (5).

#### 4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для визначення твірних масивів  $H(n)$ , які використовуються для формування блочно-циклічної структури базисної матриці ДКП I-IV для послідовностей довільного обсягу  $N$ , враховується що:

- обчислення рядків підстановки виконується з врахуванням властивостей періодичності та симетричності базисної функції (2–5);
- визначення циклічного розкладу підстановки може складатись з включення одного або більше циклічних підмасивів у процесі формування твірного масиву  $H(n)$ ;
- формування твірного масиву рядків  $Hr(N)$  і твірного масиву стовпців  $Hc(N)$  на основі визначеного твірного масиву  $H(n)$  повинно забезпечити та обчислення  $N$  вихідних значень з врахуванням всіх вхідних значень перетворення.

Для побудови підстановки вибирається дві довільні послідовності, які не повинні мати індекс в базисній матриці  $C^{I-IV}$ , що є елементом розкладу обсягу  $N$  перетворення. Послідовності підстановки мають розмірність, що дорівнює  $T/2$  півперіоду повторення (табл. 2) базисної функції ДКП I–IV.

Таблиця 2 – Період повторення базисної функції ДКП I–IV

Вид	I	II	III	IV
ДКП, $T$	$2N$	$4N$	$4N$	$8N$

Для пришвидшення визначення твірних масиву перша послідовність вибирається з початкового рядка/стовпця, що відповідає натуральному ряду. Елементи другої послідовності обчислюються на основі операції добутку за модулем відповідно виразу (10) для ДКП-I, (14) для ДКП-II та ДКП-III, (18) для ДКП-IV.

Визначення циклічного розкладу підстановки відноситься до загальних комбінаційних обчислень [14]. Однак, твірний масив  $H(n)$  може складатись з набору твірних підмасивів різної розмірності, що ускладнює алгоритм визначення циклічного розкладу підстановки. Для визначення циклічного розкладу підстановки розроблено програмне забезпечення, блок-схема алгоритму якого подано на рис. 1. Початковими даними є дві підстановки BuildMatrixA[T], BuildMatrixD[T], а результатом обчислень твірний масив hashAr-

ray[size]. В блок-схемі алгоритму використовується три цикли і одна функція. Вкладений цикл з індексом  $k$  використовує функцію isExist(Array, i) для вибору першого елемента кожного циклічного підмасиву. Цикл з індексом  $j$  виконує перевірку умови завершення підмасиву циклічного розкладу з визначенням hashSize індексу першого елемента наступного підмасиву циклічного розкладу в масиві hashArray-Block[hashSize].

## 5 РЕЗУЛЬТАТИ

В результаті програмної реалізації обчислено твірні масиви для формування блочно-циклічної структури базисної матриці різних видів ДКП I–IV для довільних обсягів. Приведемо приклади обчислених твірних масивів  $H(n)$  в залежності від вибору  $k$  індексу рядків, який не дорівнює множнику розкладу обсягу  $N$  перетворення,

– для ДКП-I,  $N=14, k=1-3, 1-5$

$H(13) = (1, 3, 9) (2, 6, 10) (4, 12, 8) (5, 13, 11) (7);$

$H(13) = (1, 5, 3, 13, 9, 11) (2, 10, 6) (4, 8, 12) (7);$

– для ДКП-II,  $N=20, k=1-7, 3-7$

$(0) (1, 7, 31, 23) (2, 14, 18, 34) (3, 21, 13, 11) (4, 28, 36, 12) (5, 35)$

$(6, 38, 26, 22) (8, 24) (9, 17, 39, 33) (10) (15, 25)$

$(16, 32) (19, 27, 29, 37) (20) (30);$

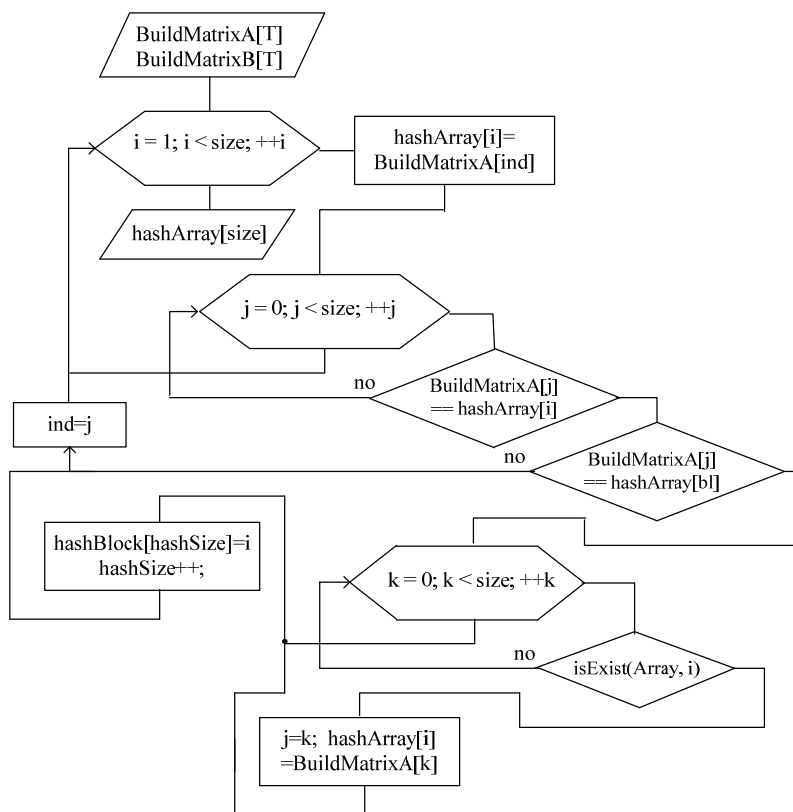


Рисунок 1 – Блок-схема алгоритму визначення циклічного розкладу підстановки

(0)(3,7,37,33)(6,14)(9,21,31,19)(12,28)(15,35,25,5)(18,38)  
 (24)(27,17,13,23)(30,10)(36,4)(39,11,1,29)(32)(26,34)(20)  
 (8)(2,22)(16);  
 – для ДКП-IV,  $N=11$ ,  $k=1-3$ ,  $1-7$   
 (1, 3, 9, 27, 7, 21, 25, 13, 39, 29) (5, 15, 43, 41, 35, 17,  
 37, 23, 19, 31) (11, 33);  
 (1, 7, 39, 9, 25) (3, 21, 29, 27, 13) (5, 35, 19, 43, 37) (11)  
 (15, 17, 31, 41, 23)(33).

В табл. 3 подано обчислені твірні масиви для синтезу алгоритмів ДКП I–IV для обсягу  $N=8$  на основі виконання 8,4,2,1–точкових ЦЗ.

Таблиця 3 – Твірні масиви ДКП I–IV обсягу  $N=8$

ДКП-I, N=8	$H(8) = (0)(1,3,9,11)(2,6)(4)$	
ДКП-II, N=8	$H_s(8) = (0)(1,3,9,5,15,13,7,11)$ (2,6,14,10) (4,12)	$H_c(8) =$ (0,1,4,2,7,6,3,5)
ДКП-III, N=8	$Hr(8)$ (0,1,4,13,8,9,12,5)	$Hc(8)=(0)(1,3,9,5,15,13,7,11)$ (2,6,14,10)(4,12)(8)
ДКП-IV, N=8	$H(8) = (0,1,4,13,8,6,12,5)$	

## 6 ОБГОВОРЕННЯ

Твірні масиви  $H(n)$ , що характеризуються числом підмасивів  $k$ , кількістю елементів  $L_i$  в підмасиві, однотипністю елементів в підмасиві, визначають кількість та розміщення блочно-циклічних структур в базисних матрицях ДКП I–IV. Ці характеристики визначають в процесі синтезу алгоритму кількість ЦЗ та порядок об'єднання їхніх результатів, які виконуватимуться під час обчислення перетворень. Число підмасивів  $k$  в твірному масиві  $H(n)$  визначається конкретним значенням  $N$  обсягу перетворень ДКП I–IV. У випадку, якщо обсяг  $N$  складене число, то число підмасивів в  $H(n)$  буде  $k > 1$ , а елементи в підмасивах будуть кратні множникам розкладу обсягу перетворення.

З поданих розділі 5 прикладів результатів твірних масивів  $H(n)$  та їхніх характеристик можна зазначити, що твірні масиви для ДКП-I,  $N=14$ , з  $k=1-3$ ,  $1-5$  та для ДКП-IV,  $N=11$  з  $k=1-3$ ,  $1-7$  мають однакову обчислювальну складність, а твірні масиви для ДКП-II,  $N=20$  з  $k=1-7$ ,  $3-7$  мають різну обчислювальну складність.

Обчислювальні затрати формування циклічного розкладу підстановки залежать від  $T$  періоду базисної функції перетворення ДКП I–IV і включають:

1)  $T$  операцій добутку за модулем  $[(i \times j) \bmod T]$  для обчислення двох рядків для підстановки (у випадку коли перший рядок відповідає послідовності натурального кількості операцій зменшується вдвічі);

2) від  $T$  до  $T \cdot (T/3)$  доступів до елементів підстановки для формування твірного масиву  $H(T/2)$ , де вважатимемо  $(T/3)$  – максимальна кількість підмасивів для випадку, що їх розмірність 3 елементи.

Для формування твірного масиву  $H(T/2)$  використання першого рядка/стовпця аргументів функції базисної матриці ДКП I–IV, що відповідає натуральному ряду, в якості підстановки BuildMatrixA[T] (рис. 1) зменшує кількість доступів до елементів підстановки.

Адже, в цьому випадку індекс рядка підстановки співпадає з його значенням.

Твірні масиви зі зменшеною кількістю елементів рядків  $Hr(N)$  і стовпців  $Hc(N)$  визначаються на основі твірного масиву  $H(T/2)$  відбором з нього підмасивів з першими непарними та парними елементами меншими  $N$ , які забезпечують обчислення  $N$  вихідних значень перетворення з використанням всіх вхідних даних.

## ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто особливості обчислення твірних масивів за двома підстановками для синтезу швидких алгоритмів кожного з чотирьох основних видів ДКП I–IV на основі ЦЗ та спільного алгоритму визначення циклічного розкладу підстановки, яка може складатись з набору циклічних підмасивів різної розмірності.

**Наукова новизна** роботи полягає в тому, що визначено особливості формування підстановок та обчислення за ними твірних масивів для кожного з чотирьох видів ДКП I–IV, які використовують для синтезу ефективних алгоритмів обчислення перетворень на основі ЦЗ.

**Практичне значення** застосування визначених відмінностей та спільних особливостей формування твірних масивів для синтезу алгоритмів обчислення ДКП I–IV дозволяє забезпечити ефективнішу програму [14] або апаратну [15] організацію виконання перетворень за кожним конкретним обсягом на основі ЦЗ.

**Напрямок подальших досліджень** полягає в детальному аналізі блочно-циклічних структур базисних матриць за допомогою визначених характеристик твірних масивів в процесі синтезу алгоритмів обчислення ДКП I–IV на основі ЦЗ.

## ПОДЯКИ

Робота виконана в рамках держбюджетної науково-дослідної роботи ДБ/Нейрозахист (номер держ. реєстрації № ДР 0119U002256) (2019–20р.) національного університету «Львівська політехніка».

## ЛІТЕРАТУРА / ЛИТЕРАТУРА

1. Britanak V. Discrete Cosine and Sine Transforms / V. Britanak, P. Yip, K. R. Rao. – New York : Academic Press, 2007.
2. ITU-T Recommendations [Electronic resource]. – Access mode: [http://www.itu.int/net4/ipr/details\\_ps.aspx?sector=ITU-T&id=H262-48](http://www.itu.int/net4/ipr/details_ps.aspx?sector=ITU-T&id=H262-48)
3. Blahut R. E. Fast algorithms for signal processing / R. E. Blahut. – Cambridge : University Press, 2010. DOI: 10.1017/CBO9780511760921
4. Prots'ko I. Becoming of Discrete Harmonic Transform Using Cyclic Convolutions / I. Prots'ko, R. Rykmas // American Journal of Circuits, Systems and Signal Processing. – 2015. – Vol. 1. – P. 114–119.
5. Пат. 96540 Україна, МПК<sup>2006</sup> G06F 17/16. Спосіб приведення дискретних гармонічних складових цифрових сигналів до циклічних згорток / І. О. Процько (Україна); Заявник Національний університет «Львівська політех-

- ніка». – № а201014053; заявл. 25.11.2010; опубл. 10.11.2011, Бюл. №21.
6. Prots'ko I. The generalized technique of computation the discrete harmonic transforms / I. Prots'ko // *Perspective Technologies and Methods in MEMS Design*, Polyana, Ukraine, May 2008 : proceedings. – Lviv : Вежа і Ко, 2008. – P.101–102. DOI: 10.1109/MEMSTECH.2008.4558753
  7. Rader C. M. Discrete Fourier Transforms When the Number of Data Samples is Prime / C. M. Rader // *Proceedings of IEEE*. – 1968. – Vol. 56. – P. 1107–1108. DOI: 10.1109/PROC.1968.6477
  8. Winograd's discrete Fourier transform algorithm // *Two-dimensional Digital Signal Processing. Transforms and Median Filters* / [J.-O. Eklundh, T. S. Huang, S. G. Tyan, S. Zohar]. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1981. – P. 89–152.
  9. Chan Y.-H. Generalized approach for the realization of discrete cosine transform using cyclic convolutions / Y. H. Chan, W.-C. Siu // *IEEE international conference on Acoustics, Speech, and Signal processing: digital speech processing*, Minneapolis, USA, 27–30 April 1993: proceedings. – Washington: IEEE Computer Society, DC, 1993. – Vol. III. – P. 277–280. DOI: 10.1109/ICASSP.1993.319489
  10. Yin R.-X. New Fast Algorithm for Computing Prime length DCT through Cyclic Convolutions / R.-X. Yin, W.-C. Siu // *Signal Processing*. – May 2001, Switzerland. – Vol. 81. – P. 895–906.
  11. Chiper D. F. A New VLSI algorithm and Architecture for the hardware implementation of type IV discrete cosine transform using a pseudo-band correlation structure / D. F. Chiper // *Central European Journal of Computer Science*. – 2011. – Vol. 1, No. 2. – P. 90–97. DOI: 10.2478/s13537-011-0015-7
  12. Prots'ko I. O. Development of WFTA based on the hashing array / I. O. Prots'ko, V. M. Teslyuk // *Radio Electronics, Computer Science, Control*. – 2018. – № 2. – P. 135–142.
  13. Prots'ko I. Algorithm of Efficient Computation of DCT I-IV Using Cyclic Convolutions / I. Prots'ko // *International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*. – 2013. – Vol. 7, Issue 1. – P. 1–9.
  14. Knuth D. E. *The Art of Computer Programming; Seminumerical Algorithms*. 3rd ed., t.1 / D. E. Knuth. – New York : Addison-Wesley Publishing Co., 1997.
  15. Math Kernel Library Homepage [Electronic resource]. – Access mode: URL: <https://software.intel.com/en-us/intel-mkl>
  16. Jridi M. A generalized algorithm and reconfigurable architecture for efficient and scalable orthogonal approximation of DCT / M. Jridi, A. Alfalou, PK Meher // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*. – 2014. – Vol. 62, No 2, – P. 449–457.

Стаття надійшла до редакції 20.02.2020.

Після доробки 06.04.2020.

УДК 681.391, 621.372

## ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБРАЗУЮЩИХ МАССИВОВ ДЛЯ СИНТЕЗА БЫСТРЫХ АЛГОРИТМОВ ДКП I–IV

**Процько І. О.** – д-р техн. наук, доцент кафедри автоматизованих систем управління Національного університету «Львівська політехніка», Україна.

### АННОТАЦІЯ

**Актуальність.** Дискретні косинусні перетворення забезпечують високу результативність застосувань в сучасних засобах обробки інформації. Вибір вичислення прямих і зворотних перетворення в дійсній області особливо актуально для ефективного рішення конкретних практичних завдань в сфері інформаційних технологій. Застосування швидких перетворення з значительним зменшенням обчислювальних витрат вимагає розробки нових ефективних методів синтезу алгоритмів і їх виконання для різних видів дійсних дискретних перетворення.

**Ціль роботи** – визначення особливостей і загальних особливостей вичислення образуючих масивів для синтезу швидких алгоритмів чотирьох основних видів дискретних косинусних перетворення на основі циклічних сверток.

**Метод.** В роботі виконано аналіз особливостей вичислення образуючих масивів на основі циклічного розкладання підстановки, яка визначається з рядків/стовпців аргументів базисних функцій ядра дискретного косинусного перетворення.

**Результати.** Вислідом дослідження є визначення і узагальнення основних особливостей і загальних особливостей вичислення образуючих масивів для формування блочно-циклічних структур в базисних матрицях дискретного косинусного перетворення довільних розмірностей.

**Висновки.** В проведеному дослідженні проаналізовані особливості вичислення образуючих масивів для чотирьох основних видів дискретних косинусних перетворення. Основна ідея застосування узагальненого математичного апарату для ефективного вичислення різних видів дискретного косинусного перетворення на основі циклічних сверток полягає в використанні образуючих масивів, що містять стиснуте описання блочно-циклічної структури базису перетворення. Образуючі масиви визначаються з допомогою циклічного розкладання підстановки і забезпечують приведення базисної матриці перетворення до набору циклічних слів підматриць. Аналіз особливостей вибору послідовностей підстановки, виконання циклічного розкладання підстановки, вибір підмасиву для формування образуючих масивів забезпечують можливість ефективної організації вичислень для різних видів і розмірностей дискретних косинусних перетворення.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** дискретне косинусне перетворення, циклічна свертка, образуючий масив, циклічне розкладання підстановки.



PECULIARITIES OF COMPUTATION THE HASHING ARRAYS FOR THE SYNTHESIS  
OF FAST ALGORITHMS OF DCT I-IV

**Protsko I. O.** – Dr. Sc., Associate Professor, Department of Automated Control Systems, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine.

ABSTRACT

**Actuality.** Discrete cosine transforms provide high efficiency of applications in modern information processing facilities. After all, the computation of forward and reverse transforms in the real field is especially important for the effective solution of specific practical problems in the field of information technology. The use of fast transforms with a significant reduction in computational cost requires the development of new efficient methods for synthesizing algorithms and performing them for different types of real discrete transforms.

**The purpose** of the work is to determine the differences and common features of computing hashing arrays for the synthesis of fast algorithms of four basic types of discrete cosine transforms based on cyclic convolutions.

**Method.** The paper analyzes the peculiarities of the computation of hashing arrays based on the cyclic decomposition of a substitution, which is determined from the rows/columns of arguments of the basic functions of the kernel of a discrete cosine transform.

**Results.** The result of the research is to determine and generalize the main differences and common features of the computation of hashing arrays for the formation of block-cyclic structures in the basis matrices of discrete cosine transforms of arbitrary sizes.

**Conclusions.** The research analyzes the peculiarities of computing hashing arrays for four main types of discrete cosine transforms. The basic idea of using a generalized mathematical apparatus to efficiently compute different types of discrete cosine transformations based on cyclic convolutions is to use hashing arrays containing a brief description of the block-cyclic structure of the transformation basis. Hashing arrays are determined by the cyclic decomposition of the substitution and ensure that the basic transformation matrix is reduced to a set of cyclic left submatrices. The analysis of the peculiarities of the choice of the substitution sequences, the execution of the cyclic decomposition of the substitution, the selection of arrays for the formation of hashing arrays provide the possibility of efficient organization of computations for different types and sizes of discrete cosine transforms.

**KEYWORDS:** discrete cosine transformation, cyclic convolution, hashing array, cyclic decomposition of the substitution.

REFERENCES

1. Britanak V., Yip P., Rao K. R. Discrete Cosine and Sine Transforms. New York, Academic Press, 2007, 368 p.
2. ITU-T Recommendations [Electronic resource]. Access mode: [http://www.itu.int/net4/ipr/details\\_ps.aspx?sector=ITU-T&id=H262-48](http://www.itu.int/net4/ipr/details_ps.aspx?sector=ITU-T&id=H262-48)
3. Blahut R. E. Fast algorithms for signal processing. Cambridge, University Press, 2010. DOI: 10.1017/CBO9780511760921
4. Prots'ko I., Rykmas R. Becoming of Discrete Harmonic Transform Using Cyclic Convolutions, *American Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*, 2015, Vol. 1, pp. 114–119.
5. Процько І. О. (Україна); Пат. 96540 Україна, МПК<sup>2006</sup> G06F 17/16. Спосіб приведення дискретних гармонічних складових цифрових сигналів до циклічних згорток. Заявник Національний університет «Львівська політехніка». № а201014053; заявл. 25.11.2010; опубл. 10.11.2011, Бюл. №21.
6. Prots'ko I. The generalized technique of computation the discrete harmonic transforms, *Perspective Technologies and Methods in MEMS Design, Polyana, Ukraine, May 2008, proceedings*. Lviv, Veza & Co, 2008, pp. 101–102. DOI: 10.1109/MEMSTECH.2008.4558753
7. Rader C. M. Discrete Fourier Transforms When the Number of Data Samples is Prime, *Proceedings of IEEE*, 1968, Vol. 56, pp. 1107–1108. DOI: 10.1109/PROC.1968.6477
8. Eklundh J.-O., Huang T. S., Tyan S. G., Zohar S. Winograd's discrete Fourier transform algorithm, *Two-dimensional Digital Signal Processing. Transforms and Median Filters*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1981, pp. 89–152.
9. Chan Y.-H., Siu W.-C. Generalized approach for the realization of discrete cosine transform using cyclic convolutions, *IEEE international conference on Acoustics, Speech, and Signal processing: digital speech processing, Minneapolis, USA, 27–30 April 1993: proceedings*. Washington, IEEE Computer Society, DC, 1993, Vol. III, pp. 277–280. DOI: 10.1109/ICASSP.1993.319489
10. Yin R.-X., Siu W.-C. New Fast Algorithm for Computing Prime length DCT through Cyclic Convolutions, *Signal Processing*, May 2001, Switzerland, Vol. 81, pp. 895–906.
11. Chipper D. F. A New VLSI algorithm and Architecture for the hardware implementation of type IV discrete cosine transform using a pseudo-band correlation structure, *Central European Journal of Computer Science*, 2011, Vol. 1, No. 2, pp. 90–97. DOI: 10.2478/s 13537-011-0015-7
12. Prots'ko I. O., Teslyuk V. M Development of WFTA based on the hashing array, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2018, No. 2, pp. 135–142.
13. Prots'ko I. Algorithm of Efficient Computation of DCT I–IV Using Cyclic Convolutions, *International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*, 2013, Vol. 7, Issue 1, pp. 1–9.
14. Knuth D. E. The Art of Computer Programming; Seminumerical Algorithms. 3rd ed., t.1. New York, Addison-Wesley Publishing Co., 1997, 784 p.
15. Math Kernel Library Homepage [Electronic resource]. Access mode: URL: <https://software.intel.com/en-us/intel-mkl>
16. Jridi M., Alfalou A., Meher PK A generalized algorithm and reconfigurable architecture for efficient and scalable orthogonal approximation of DCT, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2014, Vol. 62, No 2, pp. 449–457.