УДК 517.9

Панасенко Є. В.

Канд. фіз.-мат. наук, ст. викладач, Запорізький національний університет, Україна, E-mail: panasenko.yevgeniy@gmail.com

РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ В КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

У статті розглянуто крайову задачу в критичному випадку, яка виникає в теорії оптимального керування для матричних диференціальних рівнянь. Знайдено умову розв'язності таких задач. Запропоновано підхід до знаходження її розв'язку за допомогою теорії псевдообернених матриць.

Ключові слова: керуючий процес, крайова задача, псевдообернена матриця, нормальна фундаментальна матриця.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Всюди в навколишньому світі протікають різні процеси, характер яких залежить від багатьох умов і факторів. Змінюючи умови протікання процесів, людина може впливати на їх характер, змінювати їх, пристосовувати до своїх цілей. Це втручання в природний хід процесу і являє собою сутність керування в широкому сенсі слова. Можна сказати, що керування представляє собою таку організацію того чи іншого процесу, яке забезпечує досягнення певних цілей.

При розгляданні реальних керованих об'єктів перш за все виникає задача керування рухом [1], яка зводиться до розв'язку крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розмірності $n \times n$. Розв'язання таких задач приводить до певних труднощів, що характерно для випадків керування системами, в яких кількість процесів перевищує кількість відомостей про початковий стан. На практиці розв'язність таких прикладних задач ґрунтується на «фізичних міркуваннях» та немає строгого теоретичного підґрунтя.

Важливим частинним випадком є лінійні звичайні системи матричних диференціальних рівнянь, які моделюють лінійні технологічні та економічні процеси [2]. Це системи наступного вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u, \quad t_0 \le t \le T, \tag{1}$$

де $x(t) \in R^n$ – фазовий вектор, $u(t) \in R^m$ – вектор керування. Матриці $A(t)$ і $B(t)$ припускаються неперервними, розмірності $n \times n$ і $n \times m$ відповідно. Допустимим керуванням вважається довільне кусково-неперервне керування $u = u(t)$, причому всі точки розриву функції $u = u(t)$ – першого роду (якщо такі є). Кожному такому допустимому керуванню відповідає єдиний розв'язок крайової задачі:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$Mx(t_0) = \alpha, \tag{3}$$

де M – матриця розмірності $m \times n$, $\alpha \in R^m$. Зокрема, цікавлять умови існування розв'язку крайової задачі (2)–(3) і визначення функції $x(t)$, яка задовольняє крайовій умові (3) при відомому вхідному процесі $u(t)$. Якщо процес $x(t)$ отриманий, то визначення виходу системи $y(t)$ не представляється складним і виконується безпосередньо по рівнянню виходу $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$ [3, 4].

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Сьогодні у теорії керування при аналізі лінійних систем традиційно використовують підходи, які є досить відомими в теорії диференціальних рівнянь [5, 6, 7].

В залежності від вигляду крайової умови (3) отримуємо різні крайові задачі. Наприклад, в роботі [3] побудовано розв'язок для задачі Коші, коли $M = I_n$, де I_n – одинична матриця (визначено функцію $x(t)$ по заданому початковому стану x_0 при відомому вхідному процесі $u(t)$), використовуючи поняття фундаментальної (перехідної або імпульсної) матриці [2, 3] у вигляді

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \tag{4}$$

де $\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$.

В роботі [4] розглянута крайова задача при $t \in [0; T]$ і крайовою умовою загального вигляду $\ell x(\cdot) = \alpha$, $\alpha \in R^n$, де $\ell : D^n[0; T] \to R^n$ – лінійний обмежений вектор-функціонал. Для розв'язності задачі вимагається, щоб

$$\det[\ell X] \ne 0. \tag{5}$$

Таким чином розв'язність крайової задачі не залежить від неоднорідностей диференціального рівняння (2) і від $\alpha \in R^n$. Із вигляду (5), очевидно, що розв'язність задачі залежить тільки від фундаментальної матриці $X(t)$ та вектор-функціонала ℓ. При виконанні умови (5) розв'язок

DOI 10.15588/1607-3274-2013-2-13

задачі дається через матрицю Гріна

$$x(t) = X(t)[\ell X]^{-1}\alpha + \int_0^T G(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau . \qquad (6)$$

В даній роботі розглядається випадок, коли не вимагається виконання умови (5). Більш того, не вимагається, навіть, щоб матриця $[\ell X]$ була квадратною. В цьому випадку отримаємо крайову задачу, в якій кількість крайових умов не співпадає з кількістю невідомих у системі [6, 7].

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Наряду з неоднорідною крайовою задачею (2)–(3), розглянемо однорідну крайову задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \quad t_0 \le t \le T, \qquad (7)$$

$$Mx(t_0) = 0 . \qquad (8)$$

Розв'язок $x(t)$ рівняння (2)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + B(s)u(s))ds, \qquad (9)$$

неперервно-диференційований в кожній точці $t \in [t_0;T]$ і задовольняє рівнянню (2) всюди на відрізку $[t_0;T]$. Отже розв'язок $x(t)$ рівняння (2) будемо шукати в просторі $C^1([t_0;T])$ неперервно-диференційованих на $[t_0;T]$ функцій.

Знайдемо умови існування та структуру розв'язків неоднорідної скінченновимірної крайової задачі (2), (3).

Використовуючи апарат теорії псевдообернених матриць [6, 7], знайдемо необхідні та достатні умови розв'язності крайової задачі (2), (3) в просторі неперервно-диференційованих на відрізку $[t_0;T]$ функцій. Позначимо через $X(t,\tau)$ – нормальну фундаментальну матрицю, яка задовольняє матричному рівнянню:

$$\frac{dX(t,\tau)}{dt} = A(t)X(t,\tau);$$

$X(\tau,\tau) = I$ – одинична матриця. Загальний розв'язок матричного рівняння має вигляд [8]

$$x(t) = X(t)x_0 + \bar{x}(t), \qquad X(t) = X(t,t_0), \qquad (10)$$

де $x_0 = x(t_0)$ – елемент простору R^n, $\bar{x}(t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2), який може бути записаний у вигляді

$$\bar{x}(t) = X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Підставимо (10) в крайову умову (3) та отримаємо наступне алгебраїчне рівняння відносно елемента $x_0 \in \mathrm{R}^n$:

$$Qx_0 = \alpha, \qquad (11)$$

де $Q = MX(t_0)$ – матриця, отримана підстановкою в крайову умову (3) нормальної фундаментальної матриці $X(t)$ однорідної системи (7).

Відомо [5], що алгебраїчна система (11) розв'язна тоді і тільки тоді, коли права частина належить ортогональному доповненню $^{\perp}N(Q^*) = R(Q)$ підпростору $N(Q^*)$, тобто виконується умова

$$\mathrm{P}_{N(Q^*)}\alpha = 0. \qquad (12)$$

При цьому загальний розв'язок системи (11) має вигляд

$$x_0 = Q^+\alpha + \mathrm{P}_{N(Q)}c, \qquad (13)$$

де Q^+ – псевдообернена матриця по Пенроузу [9] до матриці Q; c – довільний елемент з простору R^n.

Підставимо x_0 у вираз (10), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (2), (3) у вигляді

$$x(t) = X(t)\mathrm{P}_{N(Q)}c + X(t)Q^+\alpha + K[f](t), \qquad (14)$$

де $K[f](t)$ – оператор Гріна задачі (2), (3), який діє на функцію $f(t) \in C([t_0;T])$ наступним чином:

$$K[f](t) := X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau . \qquad (15)$$

Випадки крайових задач, для яких виконана одна з умов $\operatorname{rank} Q = n$ або $\operatorname{rank} Q < n$, є відповідно некритичними і критичними, де $Q = MX(t_0)$ – $(m \times n)$ – вимірна матриця, отримана підстановкою у крайову умову нормальної фундаментальної матриці $X(t)$ однорідної системи (7).

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема. Якщо $\operatorname{rank} Q = n_1$, то однорідна крайова задача (7)–(8) має $r = n - n_1$ і тільки r лінійно незалежних розв'язків. Неоднорідна крайова задача (2)–(3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконана умова $\mathrm{P}_{N(Q^*)}\alpha = 0$ і при цьому має r-параметричну родину розв'язків

$$x(t,c_r) = X(t)\mathrm{P}_{N(Q)}c_r + X(t)Q^+\alpha +$$
$$+ X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau , \qquad (16)$$

де $\mathrm{P}_{N(Q)} = I - Q^+Q$, $\mathrm{P}_{N(Q^*)} = I - QQ^+$ – ортопроектори на ядро $N(Q)$ і коядро $N(Q^*)$ матриці Q відповідно, Q^+ – псевдообернена матриця до матриці Q.

Приклад

Нехай керуючий процес описується крайовою задачею (2)–(3), де $x(t) \in \mathrm{R}^3$ – фазовий вектор, $t_0 = \sqrt{3} \le t \le 3 = T$, $u(t) = \left(1+t^2\right) \in \mathrm{R}^1$ – вектор керування та задані матриці $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t}{1+t^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2t}{1+t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Нормальна фундаментальна матриця для заданої задачі має вигляд $X(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Рівняння (11) представляє собою систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

відносно елемента $x_0 \in \mathrm{R}^3$. $\mathrm{P}_{N(Q^*)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, тому умова розв'язності (12) для даної крайової задачі виконана насправді для довільних $\alpha \in \mathrm{R}^2$ у тому числі і для $\alpha = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^2$. Система (17) є недовизначеною, розв'язок якої знаходиться за формулою (13), де

$$Q^+ = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{P}_{N(Q)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Неоднорідна крайова задача має 3-параметричну родину розв'язків (формула (16)):

$$x(t) = \begin{pmatrix} \left(1+t^2\right)\left(t-\sqrt{3}\right) + \frac{7}{2} + \frac{7}{2}t^2 + \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9}t^2\right)c_1 + \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{9}t^2\right)c_2 + \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9}t^2\right)c_3 \\ \left(1+t^2\right)\left(t-\sqrt{3}\right) - 5 - 5t^2 + \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{9}t^2\right)c_1 + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9}t^2\right)c_2 + \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{9}t^2\right)c_3 \\ -1 + \frac{4}{9}c_1 + \frac{2}{9}c_2 + \frac{4}{9}c_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^3. \qquad (18)$$

У достовірності отриманого результату можна переконатися елементарною перевіркою, а саме, підставити (18) в крайову задачу (2)–(3).

ВИСНОВКИ

Робота присвячена знаходженню умов розв'язності та побудови розв'язку критичних крайових задач, які виникають в задачах теорії керування руху, в яких кількість крайових умов не співпадає з кількістю невідомих у системі. Крім того, даний підхід можна застосувати до задач про аналітичне конструювання регуляторів і про оптимальну стабілізацію [2, 6], при розв'язку яких виникають матричні рівняння Ріккаті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ванько, В. И.* Вариационное исчисление и оптимальное управление: Учеб. для вузов / В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 488 с.
2. *Егоров, А. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. 2-е изд., испр. / А. И. Егоров. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
3. *Андриевский, Б. Р.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. – С.Пб. : Наука, 2000. – 475 с.
4. *Максимов, В. П.* Теория оптимального управления. Часть 2 элементы теории линейных операторов и операторных уравнений / В. П. Максимов, П. М. Симонов. – Пермь : Перм. гос. ун-т, 2010. – 80 с.
5. *Бойчук, А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач / А. А. Бойчук. – К. : Наукова думка, 1990. – 96 с.
6. *Бойчук, А. А.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко. – К. : Институт математики НАНУ, 1995. – 320 с.
7. *Boichuk, A. A.* Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems / A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. – VSP, Utrecht-Boston, 2004. – 317 p.
8. *Далецкий, Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 536 с.
9. *Penrose, R.* Generalized Inverse for Matrices / R. Penrose // Proc. Cambriadge Philos. Soc. – 1955. – Vol. 51, № 3. – P. 406–413.

Стаття надійшла до редакції 14.03.2013.

Панасенко Е. В.
Канд. физ.-мат. наук, доцент, Запорожский национальный университет, Украина

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В статье рассмотрена краевая задача в критическом случае, которая возникает в теории оптимального управления для матричных дифференциальных уравнений. Найдено условие разрешимости таких задач. Предложен подход к нахождению решения задачи с помощью теории псевдообратных матриц. Такие задачи могут возникать при моделировании линейных технологических и экономических процессов. Кроме того, данный подход применим к задачам об аналитическом конструировании регуляторов и об оптимальной стабилизации.

Ключевые слова: управляемый процесс, краевая задача, псевдобратная матрица, нормальная фундаментальная матрица.

Panasenko Y. V.
Ph.D. Candidate (Candidate of Physico-mathematical Sciences), Associate Professor, Zaporizhzhya National University, Ukraine

SOLUTION OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL IN THE CRITICAL CASE

The article describes the boundary-value problem of the theory of optimal control for matrix differential equations in the critical case.

This problem is urgent for wide range of applications like modeling of linear technological and economic processes. A problem of controlling movement is reduced to solutions of boundary-value problems of $n \times n$ systems of ordinary differential equations of the first order. Solution of these tasks is very complex in case of control of systems in which the number of processes exceeds the amount of information about the initial state.

The paper is devoted to finding conditions for solvability and construction solutions of boundary-value problems in critical case of the theory of motion control, in which the number of boundary conditions does not coincide with the number of unknowns in the system. The condition of solvability of such problems is found. Author describes the approach for solution to the problem with the help of theory of pseudoinverse matrices.

In addition this approach is applicable to the problem of analytic construction of regulators and the optimal stabilization.

Keywords: controlled process, boundary-value problem, pseudoinverse matrix, normal fundamental matrix.

REFERENCES

1. Vanko V. I., Yermoshina O. V., Kuvyrkin G. N. Variatsionnoye ischisleniye i optimalnoye upravleniye: Ucheb. dlya vuzov. Moscow, Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, 2006, 488 p.
2. Egorov A. I. Obyknovennye differentsialnye uravneniya s prilozheniyami. 2-e izd., ispr. Moscow, FIZMATLIT, 2005, 384 p.
3. Andrievskii B. R., Fradkov A. L. Izbrannye glavy teorii avtomaticheskogo upravleniya s primerami na yazyke MATLAB, Sankt-Peterburg, Nauka, 2000, 475 p.
4. Maksimov V. P., Simonov P. M. Teoriya optimalnogo upravleniya. Chast 2 elementy teorii lineinykh operatorov i operatornykh uravnenii. Perm, Perm. gos. un-t, 2010, 80 p.
5. Boichuk A. A. Konstruktivnye metody analiza kraevykh zadach. Kiev, Naukova dumka, 1990, 96 p.
6. Boichuk A. A., Zhuravlev V. F., Samoilenko A. M. Obobshchenno-obratnye operatory i neterovy kraevye zadachi. Kiev, Institut matematiki NANU, 1995, 320 p.
7. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems. VSP, Utrecht-Boston, 2004, 317 p.
8. Daletskii Yu. L., Krein M. G. Ustoichivost reshenii differentsialnykh uravnenii v banakhovom prostranstve. Moscow, Nauka, 1970, 536 p.
9. Penrose R. Generalized Inverse for Matrices, *Proc. Cambriadge Philos. Soc.*, 1955, Vol. 51, No. 3, pp. 406–413.