

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДЕРЖКИ НА ОСНОВЕ СИСТЕМ С ГИПЕРЭРЛАНГОВСКИМ И ЭРЛАНГОВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

**Тарасов В. Н.** – д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, Россия.

### АННОТАЦИЯ

**Актуальность.** Исследования систем G/G/1 в теории массового обслуживания актуальны в связи с тем, что такие системы представляют интерес для анализа задержки систем передачи данных. В тоже время нельзя получить решения для задержки в конечном виде в общем случае при произвольных законах распределений входного потока и времени обслуживания. Поэтому важны исследования таких систем для частных случаев входных распределений. Рассмотрена задача вывода решения для средне задержки в очереди в замкнутой форме для двух систем с обычными и со сдвинутыми гиперэрланговскими и эрланговскими входными распределениями.

**Цель работы.** Получение решения для основной характеристики системы – средней задержки требований в очереди для двух систем массового обслуживания типа G/G/1 с обычными и со сдвинутыми гиперэрланговскими и эрланговскими входными распределениями.

**Метод.** Для решения поставленной задачи использован метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли. Данный метод позволяет получить решение для средней задержки ожидания для рассматриваемых систем в замкнутой форме. Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли играет важную роль в теории систем G/G/1. Для практического применения полученных результатов использован известный метод моментов теории вероятностей.

**Результаты.** Впервые получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для двух систем, с помощью которых выведены расчетные выражения для средней задержки в очереди в замкнутой форме. Тем самым построены математические модели задержки требований в очереди для этих систем.

**Выводы.** Полученные формулы расширяют и дополняют известную формулу теории массового обслуживания для среднего времени ожидания для систем G/G/1 с произвольными законами распределений входного потока и времени обслуживания. Такой подход позволяет рассчитать среднюю задержку для указанных систем в математических пакетах для широкого диапазона изменения параметров трафика.

Кроме средней задержки, такой подход дает возможность определить и моменты высших порядков задержки. Учитывая тот факт, что вариация задержки пакетов (джиттер) в телекоммуникациях определяется как разброс задержки от ее среднего значения, то джиттер можно будет определить через дисперсию задержки.

Полученные результаты публикуется впервые.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** эрланговский и гиперэрланговский законы распределения, интегральное уравнение Линдли, метод спектрального разложения, преобразование Лапласа.

### СОКРАЩЕНИЯ

ИУЛ – интегральное уравнение Линдли;  
СМО – система массового обслуживания;  
ФРВ – функция распределения вероятностей.

### НОМЕНКЛАТУРА

$c_\lambda$  – коэффициент вариации интервалов поступлений требований;

$c_\mu$  – коэффициент вариации времени обслуживания;

$E_2$  – распределение Эрланга второго порядка;

$E_2^-$  – сдвинутое распределение Эрланга второго порядка;

$f_\lambda(t)$  – функция плотности распределения интервалов между поступлениями требований;

$f_\mu(t)$  – функция плотности распределения времени обслуживания;

$F_\lambda^*(s)$  – преобразование Лапласа функции  $f_\lambda(t)$ ;

$F_\mu^*(s)$  – преобразование Лапласа функции  $f_\mu(t)$ ;

$HE_2$  – гиперэрланговское распределение второго порядка;

$HE_2^-$  – сдвинутое гиперэрланговское распределение второго порядка;

G – произвольный закон распределения;

M – экспоненциальный закон распределения;

$\bar{W}$  – средняя задержка в очереди;

$W^*(s)$  – преобразование Лапласа функции плотности задержки;

$\lambda_1$  – первый параметр гиперэрланговского распределения входного потока;

$\lambda_2$  – второй параметр гиперэрланговского распределения входного потока;

$\mu$  – параметр эрланговского распределения времени обслуживания;

$\rho$  – коэффициент загрузки системы;

$\bar{\tau}_\lambda$  – средний интервал между поступлениями требований;

$\bar{\tau}_\lambda^2$  – второй начальный момент интервала между поступлениями требований;

$\bar{\tau}_\mu$  – среднее время обслуживания;

$\bar{\tau}_\mu^2$  – второй начальный момент времени обслуживания;

$\Phi_+(s)$  – преобразование Лапласа ФРВ задержки;

$\psi_+(s)$  – первая компонента спектрального разложения;

$\psi_-(s)$  – вторая компонента спектрального разложения.

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена анализу систем массового обслуживания, образованными обычными и сдвинутыми гиперэрланговскими ( $HE_2$ ) и эрланговскими ( $E_2$ ) распределениями. В открытом доступе автору не удалось обнаружить результаты для среднего времени ожидания требований в очереди в таких СМО. Как известно из теории массового обслуживания, средняя задержка является главной характеристикой для любых СМО. По этой характеристике, например, оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при их моделировании с помощью СМО, а также она востребована при проектировании различных систем передачи данных. Рассматриваемые СМО с обычными и сдвинутыми входными распределениями относятся к общему типу систем G/G/1, для которых нет конечного решения.

В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика, к тому же нельзя получить решения для таких систем в конечном виде для общего случая. Законы распределений Вейбулла или Гамма наиболее общего вида, известные из курса теории вероятностей, которые обеспечивают диапазон изменения коэффициентов вариаций описываемых случайных величин от 0 до  $\infty$  в зависимости от величины их параметров, не позволяют их использовать в теории массового обслуживания. Поэтому остается использовать различные частные законы распределений.

В исследовании систем G/G/1 важную роль играет метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли и большинство результатов в теории массового обслуживания получены именно с помощью данного метода.

В работе автора [1] приведены результаты по исследованию систем со сдвинутыми вправо от нулевой точки гиперэкспоненциальными и экспоненциальными входными распределениями, полученные с помощью метода спектрального

разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ). Результаты данной работы позволили развить теорию данного метода также на гиперэрланговское распределение [2].

При дальнейшем использовании метода спектрального разложения решения ИУЛ будем придерживаться подхода и символики автора классики теории массового обслуживания [3].

**Объектом исследования** является СМО типа G/G/1.

**Предметом исследования** является среднее время ожидания в системах  $HE_2/E_2/1$  и  $HE_2^-/E_2^-/1$ .

**Целью работы** является получение решения в замкнутой форме для основной характеристики системы – средней задержки требований в очереди для вышеперечисленных СМО.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе ставится задача нахождения решения для средней задержки требований в очереди в СМО  $HE_2/E_2/1$  и  $HE_2^-/E_2^-/1$ . Для решения задачи необходимо вначале построить для указанных систем спектральные разложения вида

$F_\lambda^*(-s) \cdot F_\mu^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ , где  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  некоторые рациональные функции от  $s$ , которые возможно разложить на множители. Функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять следующим условиям согласно [3]:

- для  $\text{Re}(s) > 0$  функция  $\psi_+(s)$  является аналитической без нулей в этой полуплоскости;
  - для  $\text{Re}(s) < D$  функция  $\psi_-(s)$  является аналитической без нулей в этой полуплоскости, (1)
- где  $D$  – некоторая положительная константа,

определяемая из условия:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} < \infty$ .

Кроме того, функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1. \quad (2)$$

## 2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли впервые подробно представлен в классике теории массового обслуживания [3], а впоследствии применялся во многих работах, включая [4, 5]. Аналогичный подход к решению ИУЛ используется в русскоязычной литературе, где вместо термина «спектральное разложение» использована факторизация, а вместо функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  – компоненты факторизации  $\omega_+(z, t)$  и  $\omega_-(z, t)$  функции  $1 - z \cdot \chi(t)$ , где  $\chi(t)$  – характеристическая функция случайной

величины  $\xi$  с произвольной функцией распределения  $C(t)$ , а  $z$  – любое число из интервала  $(-1, 1)$ .

Такой подход для получения конечных результатов для рассматриваемых систем менее удобен, чем подход, описанный в [3] и проиллюстрированный для лучшего понимания многочисленными примерами.

Практическое применение метода спектрального разложения решения ИУЛ для исследования систем с различными входными распределениями показано в работах [6–9]. В то же время, научной литературе, включая web-ресурсы, автору не удалось обнаружить результаты по средней задержке для СМО, образованной гиперэрланговским и эрланговским распределениями 2-го порядка общего вида.

Среди зарубежных публикаций следует выделить [10], в которой предложено рассматривать очередь запросов к Интернет ресурсам как очереди с запаздыванием во времени, но безотносительно к системам массового обслуживания.

Аппроксимативные методы относительно законов распределений подробно описаны в работах [12–14], а похожие исследования в теории массового обслуживания в последнее время проведены в [15–24]

### 3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для системы  $HE_2/E_2/1$  законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида:

$$f_{\lambda}(t) = 4p\lambda_1^2 t e^{-2\lambda_1 t} + 4(1-p)\lambda_2^2 t e^{-2\lambda_2 t}, \quad (3)$$

$$f_{\mu}(t) = 4\mu^2 t e^{-2\mu t}. \quad (4)$$

Решение для средней задержки требований в очереди для системы  $HE_2/E_2/1$  будем строить на основе классического метода спектрального разложения решения ИУЛ, как это показано в [1, 2, 6–9]. Такой подход позволяет определить не только среднее время ожидания, но и моменты высших порядков времени ожидания. С учетом определения вариации задержки – джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения [10], тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию задержки.

Преобразования Лапласа функций (3) и (4) будут соответственно:

$$F_{\lambda}^*(s) = p \left( \frac{2\lambda_1}{s+2\lambda_1} \right)^2 + (1-p) \left( \frac{2\lambda_2}{s+2\lambda_2} \right)^2;$$

$$F_{\mu}^*(s) = \left( \frac{2\mu}{s+2\mu} \right)^2.$$

Тогда спектральное разложение решения ИУЛ для системы  $HE_2/E_2/1$  примет вид:

$$F_{\lambda}^*(-s) \cdot F_{\mu}^*(s) - 1 = \Psi_+(s) / \Psi_-(s)$$

$$\Psi_+(s) = \left[ p \left( \frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 - s} \right)^2 + (1-p) \left( \frac{2\lambda_2}{2\lambda_2 - s} \right)^2 \right] \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 - 1.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, введя промежуточные параметры  $a_0 = 16\lambda_1^2 \lambda_2^2$ ,  $a_1 = 16\lambda_1 \lambda_2 [p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2]$ ,  $a_2 = 4[p\lambda_1^2 + (1-p)\lambda_2^2]$  представим в виде:

$$\begin{aligned} & \left[ p \left( \frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 - s} \right)^2 + (1-p) \left( \frac{2\lambda_2}{2\lambda_2 - s} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{p(16\lambda_1^2 \lambda_2^2 - 16\lambda_1^2 \lambda_2 s + 4\lambda_1^2 s^2)}{(2\lambda_1 - s)^2 (2\lambda_2 - s)^2} + \\ & + \frac{(1-p)(16\lambda_1^2 \lambda_2^2 - 16\lambda_1 \lambda_2^2 s + 4\lambda_2^2 s^2)}{(2\lambda_1 - s)^2 (2\lambda_2 - s)^2} = \\ & = \frac{a_0 - a_1 s + a_2 s^2}{(2\lambda_1 - s)^2 (2\lambda_2 - s)^2}. \end{aligned}$$

Продолжая разложение, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} &= \frac{4\mu^2(a_0 - a_1 s + a_2 s^2)}{(2\lambda_1 - s)^2 (2\lambda_2 - s)^2 (2\mu + s)^2} - \\ & - \frac{(2\lambda_1 - s)^2 (2\lambda_2 - s)^2 (2\mu + s)^2}{(2\lambda_1 - s)^2 (2\lambda_2 - s)^2 (2\mu + s)^2} = \\ & = \frac{-s(s^5 - c_4 s^4 - c_3 s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0)}{(2\lambda_1 - s)^2 (2\lambda_2 - s)^2 (2\mu + s)^2} = \\ & = \frac{-s(s + s_1)(s + s_2)(s - s_3)(s - s_4)(s - s_5)}{(2\lambda_1 - s)^2 (2\lambda_2 - s)^2 (2\mu + s)^2}. \end{aligned}$$

Окончательно, спектральное разложение решения ИУЛ для системы  $HE_2/E_2/1$  имеет вид:

$$\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} = \frac{-s(s + s_1)(s + s_2)(s - s_3)(s - s_4)(s - s_5)}{(2\lambda_1 - s)^2 (2\lambda_2 - s)^2 (2\mu + s)^2}. \quad (5)$$

Исследование многочлена в числителе этого разложения и определение его корней, является основным моментом метода спектрального разложения решения ИУЛ. Поэтому выпишем многочлен пятой степени в числителе разложения.

$$s^5 - c_4 s^4 - c_3 s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0 \quad (6)$$

Его коэффициенты, собранные с помощью символьных операций Mathcad, равны:

$$\begin{aligned} c_0 &= -4a_1 \mu^2 + 64\mu \lambda_1 \lambda_2 [\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1 \lambda_2], \\ c_1 &= 4a_2 \mu^2 - 16[\mu^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \lambda_1^2 \lambda_2^2] - 64\mu \lambda_1 \lambda_2 (\mu - \lambda_1 - \lambda_2), \\ c_2 &= 16[(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 \lambda_2 + \mu^2) - \mu(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 16\lambda_1 \lambda_2 - 4\mu \lambda_1 \lambda_2], \end{aligned}$$

$$c_3 = -4[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \mu^2 - 4\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - 4\lambda_1\lambda_2],$$

$$c_4 = 4(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu).$$

Многочлен (6) имеет два действительных отрицательных корня  $-s_1, -s_2$  и три положительных корня  $s_3, s_4, s_5$  (либо вместо последних один действительный положительный и два комплексно сопряженных с положительной вещественной частью) в случае стабильной системы, т.е. когда  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda < 1$ . Исследование знака младшего коэффициента  $c_0$  показывает, что  $c_0 > 0$  всегда в случае стабильной системы, когда  $0 < \rho < 1$ . С учетом знака минус перед  $c_0$  в многочлене (6) это также подтверждает предположение о наличии таких корней многочлена.

Далее, с учетом условий (1) и (2) строим рациональные функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$ :

$\psi_+(s) = s(s + s_1)(s + s_2) / (2\mu + s)^2$ , т.к. нули многочлена (7):  $s = 0, s = -s_1, s = -s_2$  и двукратный полюс  $s = -2\mu$  лежат в области  $\text{Re}(s) \leq 0$ ,

$\psi_-(s) = -\frac{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2}{(s - s_3)(s - s_4)(s - s_5)}$ , т.к. ее нули и полюсы

лежат в области  $\text{Re}(s) > D$ , определенной условием (1). Выполнение условий (1) и (2) спектрального разложения для построенных функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  очевидно, что также подтверждается рисунком 1.

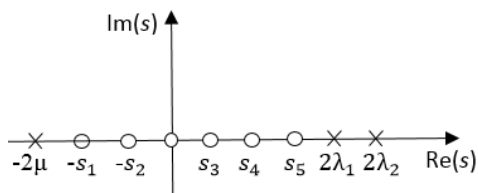


Рисунок 1 – Нули и полюсы функции  $\psi_+(s) / \psi_-(s)$  для системы  $HE_2/E_2/1$

При построении этих функций удобнее нули и полюса отношения  $\psi_+(s) / \psi_-(s)$  отметить на комплексной  $s$  – плоскости для исключения ошибок построения функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$ . На рисунке полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

Далее по методике спектрального разложения найдем константу  $K$ :

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s + s_1)(s + s_2)}{(s + 2\mu)^2} = \frac{s_1 s_2}{4\mu^2},$$

где  $s_1, s_2$  – абсолютные значения отрицательных корней  $-s_1, -s_2$ . Постоянная  $K$  определяет

вероятность того, что поступающее в систему требование заставит ее свободной.

Для нахождения преобразования Лапласа функции плотности задержки построим функцию

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\Psi_+(s)} = \frac{s_1 s_2 (s + 2\mu)^2}{4s\mu^2 (s + s_1)(s + s_2)}.$$

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности задержки  $W^*(s) = s \cdot \Phi_+(s)$  будет равно

$$W^*(s) = \frac{s_1 s_2 (s + 2\mu)^2}{4\mu^2 (s + s_1)(s + s_2)}. \quad (7)$$

Для нахождения средней задержки найдем производную от функции  $W^*(s)$  со знаком минус в точке  $s = 0$ :

$$-\frac{dW^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}.$$

Окончательно, средняя задержка для системы  $HE_2/E_2/1$

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}. \quad (8)$$

Из выражения (7) при необходимости также можно определить моменты высших порядков времени ожидания, например вторая производная от преобразования (7) в точке  $s = 0$  дает второй начальный момент времени ожидания, что позволяет определить дисперсию времени ожидания, следовательно и джиттер.

Для практического применения выражения (8) необходимо определить числовые характеристики распределений (3)  $HE_2$  и  $E_2$  (4).

Для этого воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до второго порядка для распределения (3):

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}, \quad (9)$$

$$\bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{3}{2} \left[ \frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{(1-p)}{\lambda_2^2} \right]. \quad (10)$$

Рассматривая равенства (9) и (10) как запись метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (3)  $\lambda_1, \lambda_2, p$ . Система двух уравнений (9), (10) при этом является не доопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации:

$$c_\lambda^2 = \frac{\overline{\tau_\lambda^2} - (\overline{\tau_\lambda})^2}{(\overline{\tau_\lambda})^2}, \quad (11)$$

как связующее условие между (9) и (10). Кроме того, коэффициент вариации будем использовать в расчетах в качестве входного параметра системы. Исходя из вида уравнения (9) положим

$$\lambda_1 = 2p / \overline{\tau_\lambda}, \quad \lambda_2 = 2(1-p) / \overline{\tau_\lambda} \quad (12)$$

и потребуем выполнения условия (11). Подставив выражения (9), (10) и частное решение (12) в (11), получим уравнение четвертой степени относительно параметра  $p$ :  $p(1-p)[8(1+c_\lambda^2)p^2 - 8(1+c_\lambda^2)p + 3] = 0$ . Отбросив тривиальные решения  $p = 0$  и  $p = 1$ , получим квадратное уравнение  $8(1+c_\lambda^2)p^2 - 8(1+c_\lambda^2)p + 3 = 0$ , решив которое выберем для однозначности больший корень:

$$p = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2(1+c_\lambda^2) - 3}{8(1+c_\lambda^2)}}. \quad (13)$$

Отсюда следует, что коэффициент вариации  $c_\lambda \geq 1/\sqrt{2}$ . Таким образом, получено решение системы уравнений (9) и (10).

Таким образом, гиперэрланговский закон распределения второго порядка может определяться полностью двумя первыми моментами и перекрывать весь диапазон изменения коэффициента вариации от  $1/\sqrt{2}$  до  $\infty$ , что шире, чем у гиперэкспоненциального распределения  $(1, \infty)$ .

Для распределения (4) числовые характеристики равны  $\overline{\tau_\mu} = 1/\mu$ ,  $c_\mu = 1/\sqrt{2}$ .

Величины  $\overline{\tau_\lambda}$ ,  $\overline{\tau_\mu}$ ,  $c_\lambda$ ,  $c_\mu$ , определенные выше, будем считать входными параметрами для расчета среднего времени ожидания для системы  $HE_2/E_2/1$ . Тогда алгоритм расчета сведется к последовательному определению параметров распределения (4) из выражений (13), (12) и к нахождению нужных корней многочлена (6), а затем к использованию расчетного выражения (8).

Далее рассмотрим принципиально отличающуюся от исследованной СМО систему  $HE_2/E_2/1$ . Для системы  $HE_2/E_2/1$  со сдвинутыми законами распределений интервалов поступлений и времени обслуживания эти законы задаются функциями плотности вида:

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} 4p\lambda_1^2(t-t_0)e^{-2\lambda_1(t-t_0)} + 4(1-p)\lambda_2^2(t-t_0)e^{-2\lambda_2(t-t_0)}, & t > t_0, \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0, \end{cases} \quad (14)$$

$$f_\mu(t) = \begin{cases} 4\mu^2(t-t_0)e^{-2\mu(t-t_0)}, & t > t_0, \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (15)$$

Такую СМО в отличие от обычной системы обозначим как  $HE_2^-/E_2^-/1$ . Для определения среднего времени ожидания для такой системы предварительно докажем следующее утверждение.

Утверждение. Спектральные разложения решения ИУЛ  $F_\lambda^*(-s) \cdot F_\mu^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$  для систем  $HE_2^-/E_2^-/1$  и  $HE_2/E_2/1$  полностью совпадают и имеют вид (5).

Доказательство. Преобразования Лапласа функций (14) и (15) будут соответственно:

$$F_\lambda^*(s) = \left[ p \left( \frac{2\lambda_1}{s+2\lambda_1} \right)^2 + (1-p) \left( \frac{2\lambda_2}{s+2\lambda_2} \right)^2 \right] \cdot e^{-t_0s},$$

$$F_\mu^*(s) = \left( \frac{2\mu}{s+2\mu} \right)^2 e^{-t_0s}.$$

Спектральное разложение решения ИУЛ для системы  $HE_2^-/E_2^-/1$

$F_\lambda^*(-s) \cdot F_\mu^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$  примет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[ p \left( \frac{2\lambda_1}{2\lambda_1-s} \right)^2 + (1-p) \left( \frac{2\lambda_2}{2\lambda_2-s} \right)^2 \right] e^{t_0s} \times$$

$$\times \left( \frac{2\mu}{2\mu+s} \right)^2 e^{-t_0s} - 1 =$$

$$= \left[ p \left( \frac{2\lambda_1}{2\lambda_1-s} \right)^2 + (1-p) \left( \frac{2\lambda_2}{2\lambda_2-s} \right)^2 \right] \cdot \left( \frac{2\mu}{2\mu+s} \right)^2 - 1.$$

Здесь экспоненты из-за противоположных знаков обнуляются и тем самым операция сдвига нивелируется. Дальнейшее разложение последнего выражения приведет к виду (5), как это было проделано для обычной системы  $HE_2/E_2/1$ . Следовательно, спектральные разложения для систем  $HE_2^-/E_2^-/1$  и  $HE_2/E_2/1$  полностью совпадают и имеют вид (5). Утверждение доказано.

Таким образом, по системе  $HE_2^-/E_2^-/1$  мы полностью можем воспользоваться полученными выше результатами для системы  $HE_2/E_2/1$ , но с измененными числовыми характеристиками сдвинутых распределений (14) и (15).

Определим числовые характеристики интервала между поступлениями требований и времени обслуживания для новой системы  $HE_2^-/E_2^-/1$ . Для этого воспользуемся преобразованием Лапласа функций (14) и (15).

Определим числовые характеристики распределения (14). Значение первой производной функции  $F_{\lambda}^*(s)$  со знаком минус в точке  $s=0$  равно

$$-\left. \frac{dF_{\lambda}^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0.$$

Отсюда среднее значение интервалов между соседними требованиями входного потока будет равно

$$\bar{\tau}_{\lambda} = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0. \quad (16)$$

Значение второй производной функции  $F_{\lambda}^*(s)$  в точке  $s=0$  дает второй начальный момент интервала поступления

$$\bar{\tau}_{\lambda}^2 = t_0^2 + 2t_0 \left[ \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2} \right] + \frac{3p}{2\lambda_1^2} + \frac{3(1-p)}{2\lambda_2^2}. \quad (17)$$

Отсюда квадрат коэффициента вариации интервалов поступления:

$$c_{\lambda}^2 = \frac{\lambda_1^2 - 2p\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) + p(1-2p)(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{2[\lambda_1 - p(\lambda_1 - \lambda_2) + t_0\lambda_1\lambda_2]^2}. \quad (18)$$

Определим числовые характеристики распределения (15). Среднее время обслуживания в системе  $HE_2^-/E_2^-/1$  равно

$$\bar{\tau}_{\mu} = \mu^{-1} + t_0. \quad (19)$$

Второй начальный момент времени обслуживания равен

$$\bar{\tau}_{\mu}^2 = t_0^2 + \frac{2t_0}{\mu} + \frac{3}{2\mu^2}. \quad (20)$$

Отсюда коэффициент вариации времени обслуживания будет равен

$$c_{\mu} = [\sqrt{2}(1 + \mu t_0)]^{-1} \quad (21)$$

Заметим, что коэффициенты вариации  $c_{\lambda} > 0$  и  $c_{\mu} < 1/\sqrt{2}$  при параметре сдвига  $t_0 > 0$ . Таким образом, очевидно, что система  $HE_2^-/E_2^-/1$  относится к типу G/G/1 и диапазон ее применимости расширится по сравнению с обычной системой.

Рассматривая выражения (16)–(21) как форму записи метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (14) и (15):  $\lambda_1, \lambda_2, p, t_0, \mu$ . Нахождение параметров распределения (14)  $\lambda_1, \lambda_2, p$  будет аналогичным нахождению этих параметров для распределения (3). Теперь исходя из вида уравнения (16) положим

$$\lambda_1 = 2p / (\bar{\tau}_{\lambda} - t_0), \quad \lambda_2 = 2(1-p) / (\bar{\tau}_{\lambda} - t_0) \quad (22)$$

и потребуем выполнения условия (18). Подставив частное решение (22) в (18) решаем полученное уравнение четвертой степени относительно параметра  $p$  с учетом условия  $0 < p < 1$  и выберем нужное решение

$$p = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3(\bar{\tau}_{\lambda} - t_0)^2}{8[(\bar{\tau}_{\lambda} - t_0)^2 + c_{\lambda}^2 \bar{\tau}_{\lambda}^2]}}$$

а затем определяем из (22) параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Теперь определим параметр распределения (15)  $\mu$  из (19) и получим значение  $\mu = 1/(\bar{\tau}_{\mu} - t_0)$ . Отсюда диапазон изменения параметра сдвига составит  $0 < t_0 < \bar{\tau}_{\mu}$ .

Задавая значения  $\bar{\tau}_{\lambda}, \bar{\tau}_{\mu}, c_{\lambda}, c_{\mu}, t_0$  в качестве входных параметров системы, таким образом определяем известным методом моментов все неизвестные параметры распределений (14) и (15).

Теперь рассмотрим влияние параметра сдвига на коэффициенты вариаций распределений. Для обычного распределения  $HE_2$ , как следует из выражений (9)–(11), получим:

$$c_{\lambda}^2 = \frac{\lambda_1^2 - 2p\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) + p(1-2p)(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{2[\lambda_1 - p(\lambda_1 - \lambda_2)]^2}.$$

Сравнивая последнее выражение с (18) убеждаемся, что параметр сдвига во времени  $t_0 > 0$  уменьшает коэффициент вариации интервалов поступлений в  $1 + \frac{t_0\lambda_1\lambda_2}{[\lambda_1(1-p) + \lambda_2p]}$  раз. Аналогично

для эрланговского закона времени обслуживания, параметр сдвига уменьшает коэффициент вариации времени обслуживания в  $1 + \mu t_0$  раз. Учитывая квадратичную зависимость средней задержки от коэффициентов вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания, убеждаемся в том, что введение параметра сдвига в законы распределения, уменьшает среднее время ожидания в очереди в СМО.

#### 4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Ниже в табл. 1 приведены данные расчетов для системы  $HE_2/E_2/1$  для случаев малой, средней и высокой нагрузки  $\rho = 0, 1; 0, 5; 0, 9$ .

Заметим, что эта система определена для  $c_{\lambda} \geq 1/\sqrt{2}$  и  $c_{\mu} = 1/\sqrt{2}$ . Данные расчетов для системы  $HE_2/E_2/1$  сравниваются с результатами близкой системы  $H_2/E_2/1$ . Прочерки означают, что при данных параметрах система  $H_2/E_2/1$  не применима.

Таблица 1 – Результаты экспериментов для СМО  $HE_2/E_2/1$

Входные параметры		Средняя задержка	
$\rho$	$c_\lambda$	для системы $HE_2/E_2/1$	для системы $H_2/E_2/1$
0,1	0,71	0,017	–
	1,0	0,027	0,083
	2,0	0,047	0,141
	4,0	0,056	0,171
0,5	0,71	0,392	–
	1,0	0,605	0,751
	2,0	1,536	1,764
	4,0	3,687	4,082
0,9	0,71	4,377	–
	1,0	6,605	6,752
	2,0	20,222	20,016
	4,0	74,870	73,321

Коэффициент загрузки  $\rho$  в обеих таблицах определяется отношением средних интервалов  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$ . Расчеты, приведенные в табл. 1 и 2 проведены для нормированного времени обслуживания  $\bar{\tau}_\mu = 1$ .

В табл. 2 приведены данные расчетов для системы  $HE_2^-/E_2^-/1$  при  $c_\lambda = 2$  также для случаев малой, средней и высокой нагрузки.

Таблица 2 – Результаты экспериментов для СМО  $HE_2^-/E_2^-/1$

Входные параметры			Средняя задержка	
$\rho$	$c_\mu$	$t_0$	для системы $HE_2^-/E_2^-/1$	для системы $HE_2/E_2/1$
0,1	0,071	0,9	0,000	0,047
	0,354	0,5	0,007	
	0,636	0,1	0,035	
	0,706	0,001	0,047	
0,5	0,071	0,9	0,005	1,536
	0,354	0,5	0,309	
	0,636	0,1	1,249	
	0,706	0,001	1,533	
0,9	0,071	0,9	0,589	20,222
	0,354	0,5	15,337	
	0,636	0,1	19,421	
	0,706	0,001	20,214	

Система  $HE_2^-/E_2^-/1$  определена и для  $c_\lambda < 1$ , например при  $t_0 = 0,99$ ,  $\rho = 0,9$ ,  $c_\lambda = 0,1$ , коэффициент вариации  $c_\mu = 0,007$  по формуле (21), а средняя задержка равно  $\bar{W} = 0,17 \cdot 10^{-3}$ , т.е. уменьшается почти до нуля с наименьшего значения 4,377 единиц времени в табл. 1.

## 5 РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для двух систем  $HE_2/E_2/1$  и  $HE_2^-/E_2^-/1$ , с помощью которых выведена расчетная формула для средней задержки в очереди для этих систем в замкнутой форме.

## 6 ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты табл. 1 подтверждают полную адекватность построенной математической модели для средней задержки требований в очереди для обычной системы  $HE_2/E_2/1$ .

Данные табл. 2 полностью подтверждают сделанные выше предположения о среднем времени ожидания в системе с запаздыванием. Кроме того, с уменьшением параметра сдвига  $t_0$  средняя задержка в очереди в системе с запаздыванием стремится к значению этого времени в обычной системе, что дополнительно подтверждает адекватность полученных результатов для обеих рассматриваемых систем.

Диапазон изменения параметров у системы  $HE_2^-/E_2^-/1$  шире, чем у системы  $HE_2/E_2/1$ , поэтому указанные системы с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика. Результаты проведенных экспериментов подтверждают расширение диапазонов изменения параметров у системы с запаздыванием для  $c_\lambda > 0$  и  $0 < c_\mu < 1/\sqrt{2}$ .

## ВЫВОДЫ

Решена задача вывода формулы для средней задержки требований в очереди для рассмотренных систем.

**Научная новизна** полученных результатов заключается в том, что получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемых систем и с их помощью выведено расчетная формула для средней задержки требований в очереди для этих систем в замкнутой форме. Эта формула расширяет и дополняет известную незавершенную формулу теории массового обслуживания для среднего времени ожидания для систем типа G/G/1 с произвольными законами распределений входного потока и времени обслуживания.

**Практическое значение** работы заключается в том, что построены математические модели задержки требований в очереди для двух систем, которые протестированы с помощью численного моделирования в математическом пакете Mathcad для широкого диапазона изменения параметров рассматриваемых систем. Эти результаты востребованы в современной теории телетрафика, а также в проектировании систем передачи данных различного назначения.

**Перспективы дальнейших исследований** просматриваются в продолжении исследования систем G/G/1 с другими общими входными

распределениями и в расширении и дополнении известных формул для средней задержки.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-07-01446 А). Конфликта интересов при выполнении работы нет.

### ЛИТЕРАТУРА / LITERATURE

1. Kleinrock L. Queueing Systems, Vol. I: Theory / L. Kleinrock. – New York : Wiley, 1975. – 417 p.
2. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems / N. Brannstrom. – Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004. – 79 p.
3. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods / W. Whitt // Operation Research. – 1982. – No. 1. – P. 125–147.
4. Тарасов В. Н. Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием / В. Н. Тарасов // Автоматика и телемеханика. – 2018. – № 12. – С. 57–70.
5. Тарасов В. Н. Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями / В. Н. Тарасов // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2018. – № 4. – С. 61–70.
6. Тарасов В. Н. Исследование систем массового обслуживания с сдвинутыми эрланговскими и экспоненциальными входными распределениями / В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2019. – № 1. – С. 67–76.
7. Тарасов В. Н. Анализ двух систем массового обслуживания  $HE_2/M/1$  с обычными и сдвинутыми входными распределениями / В. Н. Тарасов // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2019. – № 2. – С. 71–79.
8. Тарасов В. Н. Сравнительный анализ двух систем массового обслуживания  $M/HE_2/1$  с обычными и со сдвинутыми входными распределениями / В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2019. – № 4. – С. 50–58.
9. Tarasov V.N. Queueing systems with delay / V. N. Tarasov // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2019. – Vol. 50, No. 3. – P. 71–79. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-3-7
10. Nonlinear Dynamics in Queueing Theory: Determining the Size of Oscillations in Queues with Delay / [S. Novitzky, J. Pender, R. H. Rand, E. Wesson] // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. – 2019, Vol. 18, No. 1. – P. 279–311. DOI: <https://doi.org/10.1137/18M1170637>
11. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>.
12. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals / A. Myskja // Teletraffic and datatrafic in a Period of Change. ITC-13. Elsevier Science Publishers. – 1991. – P. 683–688.
13. Liu X. Diffusion approximations for double-ended queues with reneging in heavy traffic // X. Liu // Queueing Systems: Theory and Applications, Springer. – 2019. – Vol. 91, No. 1. – P. 49–87. DOI: 10.1007/s11134-018-9589-7
14. Poojary S. An asymptotic approximation for TCP CUBIC // S. Poojary, V. Sharma // Queueing Systems: Theory and Applications. – 2019. – Vol. 91, No. 1. – P. 171–203. DOI: 10.1007/s11134-018-9594-x
15. Aras A. K. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment / A. K. Aras, X. Chen, Y. Liu // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89, No. 1. – P. 81–125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>.
16. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues / O. B. Jennings, J. Pender // Queueing Systems. – 2016. – Vol. 84, No. 1. – P. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
17. Gromoll H. C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times / H. C. Gromoll, B. Terwilliger, B. Zwart // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89, No. 3. – P. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
18. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates / B. Legros // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89, No. 3. – P. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
19. Bazhba M. Queue with heavy-tailed Weibull service times / M. Bazhba, J. Blanchet, CH. Rhee // Queueing Systems. – 2019. – Vol. 93, No. 11. – P. 1–32. <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09640-z>
20. Adan I. Special volume on ‘Recent Developments in Queueing Theory’ of the third ECQT conference / I. Adan, B. D’Auria, O. Kella // Queueing Systems. – 2019. – P. 1–190. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09630-1>
21. Adan I. Special volume on ‘Recent Developments in Queueing Theory’ of the third ECQT conference: part 2 / I. Adan, B. D’Auria, O. Kella // Queueing Systems. – 2019. – P. 1–2. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09637-8>
22. Tibi D. Martingales and buffer overflow for the symmetric shortest queue model / D. Tibi // Queueing Systems. – 2019. – Vol. 93, No. 3. – P. 153–190. DOI: 10.1007/s11134-019-09628-9
23. Jacobovic R. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure / R. Jacobovic, O. Kella // Queueing Systems. – 2019. – Vol. 93, No. 2. – P. 139–152. DOI: 10.1007/s11134-019-09606-1
24. Wang L. Fluid and diffusion models for a system of taxis and customers with delayed matching / L. Wang V. Kulkarni // Queueing Systems. – 2020. – Vol. 96, No. 2. – P. 101–131. DOI: 10.1007/s11134-020-09659-7.

Статья поступила в редакцию 17.11.2020  
После доработки 21.01.2021.



УДК 621.391.1: 621.395

**Тарасов В. Н.** – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри програмного забезпечення та управління в технічних системах Поволзького державного університету телекомунікацій та інформатики, РФ.

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАТРИМКИ НА ОСНОВІ СИСТЕМ З ГІПЕРЕРЛАНГІВСЬКИМИ І ЕРЛАНГІВСЬКИМИ РОЗПОДІЛАМИ

### АНОТАЦІЯ

**Актуальність.** Дослідження систем  $G/G/1$  в теорії масового обслуговування актуальні в зв'язку з тим, що такі системи становлять інтерес для аналізу затримки систем передачі даних. У той же час не можна отримати рішення для часу затримки в кінцевому вигляді в загальному випадку при довільних законах розподілів вхідного потоку і часу обслуговування. Тому є важливими дослідження таких систем для окремих випадків вхідних розподілів. Розглянуто задачу виведення рішення для середньої затримки в черзі у замкнутій формі для двох систем зі звичайними і зсунутими гіперерлангівськими і ерлангівськими вхідними розподілами.

**Мета роботи.** Отримання рішення для основної характеристики системи – середньої затримки вимог в черзі для двох систем масового обслуговування типу  $G/G/1$  зі звичайними і зсунутими гіперерлангівським і ерлангівським вхідними розподілами.

**Метод.** Для вирішення поставленого завдання був використаний класичний метод спектрального розкладання розв'язку інтегрального рівняння Ліндлі. Цей метод дозволяє отримати рішення для середньої затримки для розглянутих систем у замкнутій формі. Метод спектрального розкладання розв'язку інтегрального рівняння Ліндлі грає важливу роль у теорії систем  $G/G/1$ . Для практичного застосування отриманих результатів було використано відомий метод моментів теорії ймовірностей.

**Результати.** Вперше отримано спектральні розкладання розв'язку інтегрального рівняння Ліндлі для двох систем, за допомогою яких виведені розрахункові формули для середньої затримки в черзі в замкнутій формі.

**Висновки.** Отримано спектральні розкладання розв'язку інтегрального рівняння Ліндлі для розглянутих систем, та з їх допомогою виведені розрахункові формули для середньої затримки в черзі для цих систем в замкнутій формі. Ці формули розширюють і доповнюють відомі формули теорії масового обслуговування для середньої затримки для систем  $G/G/1$  з довільними законами розподілів вхідного потоку і часу обслуговування. Такий підхід дозволяє розрахувати середньої затримки для зазначених систем в математичних пакетах для широкого діапазону зміни параметрів трафіку. Всі інші характеристики систем є похідними часу очікування.

Крім середнього часу очікування, такий підхід дає можливість також визначити моменти вищих порядків часу очікування. З огляду на той факт, що варіація затримки пакетів (джиттер) в телекомунікації визначається як дисперсія затримки від його середнього значення, то джиттер можна буде визначити через дисперсію затримки.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** ерлангівський та гіперерлангівський закони розподілу, інтегральне рівняння Ліндлі, метод спектрального розкладання, перетворення Лапласа.

UDC 621.391.1:621.395

## MATHEMATICAL DELAY MODEL BASED ON SYSTEMS WITH HYPERERLANGIAN AND ERLANGIAN DISTRIBUTIONS

**Tarasov V. N.** – Dr. Sc., Professor, Head of Department of Software and Management in Technical Systems of Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation.

### ABSTRACT

**Context.** Studies of  $G/G/1$  systems in queuing theory are relevant because such systems are of interest for analyzing the delay of data transmission systems. At the same time, it is impossible to obtain solutions for the delay in the final form in the general case for arbitrary laws of distribution of the input flow and service time. Therefore, it is important to study such systems for particular cases of input distributions. We consider the problem of deriving a solution for the average queue delay in a closed form for two systems with ordinary and shifted hypererlangian and erlangian input distributions.

**Objective.** Obtaining a solution for the main characteristic of the system – the average delay of requests in the queue for two queuing systems of the  $G/G/1$  type with ordinary and with shifted hypererlangian and erlangian input distributions.

**Method.** To solve this problem, we used the classical method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation. This method allows to obtaining a solution for the average delay for systems under consideration in a closed form. The method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation plays an important role in the theory of systems  $G/G/1$ . For the practical application of the results obtained, the well-known method of moments of probability theory is used.

**Results.** For the first time, spectral expansions of the solution of the integral Lindley equation for two systems are obtained, with the help of which calculation formulas for the average delay in a queue in a closed form are derived. Thus, mathematical models of queuing delay for these systems have been built.

**Conclusions.** These formulas expand and supplement the known queuing theory formulas for the average delay  $G/G/1$  systems with arbitrary laws distributions of input flow and service time. This approach allows us to calculate the average delay for these systems in mathematical packages for a wide range of traffic parameters. In addition to the average delay, such an approach makes it possible to determine also moments of higher orders of waiting time. Given the fact that the packet delay variation (jitter) in telecommunications is defined as the spread of the delay from its average value, the jitter can be determined through the variance of the delay.

**KEYWORDS:** hypererlangian and erlangian distribution laws, Lindley integral equation, spectral decomposition method, Laplace transform.

## REFERENCES

1. Tarasov V. N. Extension of the Class of Queueing Systems with Delay, *Automation and Remote Control*, 2018, Vol. 79, No. 12, pp. 2147–2157. DOI: 10.1134/S0005117918120056
2. Tarasov V. N. Analysis and comparison of two queueing systems with hypererlangian input distributions, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2018, Vol. 47, No. 4, pp. 61–70. DOI: 10.15588/1607-3274-2018-4-6
3. Kleinrock L. Queueing Systems, Vol. I: Theory. New York, Wiley, 1975, 417 p.
4. Brannstrom N. A. Queueing Theory analysis of wireless radio systems. Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004, 79 p.
5. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods, *Operation Research*, 1982, Vol. 30, No. 1, pp. 125–147.
6. Tarasov V. N., Bakhareva N. F. Research of queueing systems with shifted erlangian and exponential input distributions, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2019, Vol. 48, No. 1, pp. 67–76. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-1-7
7. Tarasov V. N. The analysis of two queueing systems  $HE_2/M/1$  with ordinary and shifted input distributions, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2019, Vol. 49, No. 2, pp. 71–79. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-2-8
8. Tarasov V. N., Bakhareva N. F. Comparative analysis of two Queueing Systems  $M/HE_2/1$  with ordinary and with the shifted input Distributions, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2019, Vol. 51, No. 4, pp. 50–58. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-4-5
9. Tarasov V. N. Queueing systems with delay. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2019, Vol. 50, No. 3, pp. 71–79. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-4-5
10. Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E. Nonlinear Dynamics in Queueing Theory: Determining the Size of Oscillations in Queues with Delay, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 18–1 2019, Vol. 18, No. 1, pp. 279–311. DOI: <https://doi.org/10.1137/18M1170637>
11. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) [Electronic resource]. Available at: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>.
12. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. Teletraffic and datatraffic in a Period of Change. ITC-13. Elsevier Science Publishers, 1991, pp. 683–688.
13. Liu X. Diffusion approximations for double-ended queues with reneing in heavy traffic, *Queueing Systems: Theory and Applications*, Springer, 2019, Vol. 91, No. 1, pp. 49–87. DOI: 10.1007/s11134-018-9589-7
14. Poojary S., Sharma V. An asymptotic approximation for TCP CUBIC, *Queueing Systems: Theory and Applications*, 2019, Vol. 91, No. 1, pp. 171–203. DOI: 10.1007/s11134-018-9594-x
15. Aras A. K., Chen X., Liu Y. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 1, pp. 81–125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
16. Jennings O. B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues, *Queueing Systems*, 2016, Vol. 84, No. 1, pp. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
17. Gromoll H. C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times, *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 3, pp. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
18. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, Vol. 89, No. 3, pp. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7/>
19. Bazhba M., Blanchet J., Rhee CH., et al. Queue with heavy-tailed Weibull service times, *Queueing Systems*, 2019, Vol. 93, No. 11, pp. 1–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09640-z/>
20. Adan I., D’Auria B., Kella O. Special volume on ‘Recent Developments in Queueing Theory’ of the third ECQT conference. *Queueing Systems*, 2019, Vol. 93, No. 1, pp. 1–190. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09630-1>
21. Adan I., D’Auria B., Kella O. Special volume on ‘Recent Developments in Queueing Theory’ of the third ECQT conference: part 2, *Queueing Systems*, 2019, pp. 1–2. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09637-8>
22. Tibi D. Martingales and buffer overflow for the symmetric shortest queue model. *Queueing Systems*, 2019, Vol. 93, pp. 153–190. DOI: 10.1007/s11134-019-09628-9
23. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure. *Queueing Systems*, Vol. 93, 2019, pp. 139–152. DOI: 10.1007/s11134-019-09606-1
24. Wang L., Kulkarni V. Fluid and diffusion models for a system of taxis and customers with delayed matching. *Queueing Systems*, Vol. 96, 2020, pp. 101–131. DOI: 10.1007/s11134-020-09659-7