которых состоит из двух частей: 1) компенсирующей влияние неопределенности и 2) регулятора, обеспечивающего заданный вид переходных процессов при отслеживании программных перемещений и скоростей. За счет принятой структуры уравнений движения робота и комбинированного принципа управления обеспечивается не только робастность, а и высокая точность управления. Несмотря на существенную нелинейность и нестационарность динамики робота, алгоритмы управления являются чрезвычайно простыми, линейными, стационарными, поканально декомпозированными. Примененный метод управления, несмотря на нелинейность и нестационарность уравнений движения, позволяет характеризовать динамические свойства системы управления показателями качества линейных систем управления. Более того, для синтеза рассматриваемой системы управления нет необходимости точно знать уравнения движения объекта управления, которые в рассмотренном примере даже не принимались во внимание при синтезе системы управления. Некоторыми из перечисленных положительных качеств обладают системы с переменной структурой (СПС). В отличие от СПС, рассмотренное управление лишено скользящих режимов и присущих им недостатков: высокочастотных колебаний, снижения надежности, повышенных энергозатрат на управление, возбуждения высокочастотной паразитной динамики.

Материалы второй части данной работы полностью подтверждают результаты теоретических исследований первой части.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. *Потапенко Е. М.* Высокоточное управление неопределенными многосвязными объектами. Часть 1. Синтез и анализ алгоритмов управления / Е. М. Потапенко, А. Е. Казурова // Кибернетика и вычислительная техника. – 2007. – Вып. 155. – С. 58–71.
2. *Дылевский А. В.* Применение метода пространства состояний для синтеза дифференциаторов / А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев // Автоматика и телемеханика / Рос. акад. наук. – 1999. – № 9. – С. 13–20.
3. *Потапенко Е. М.* Асимптотическое дифференцирование ступенчатых сигналов в задачах управления скоростью и перемещением / Е. М. Потапенко, Е. Е. Потапенко, А. Е. Казурова // Електромашинобудування та електрообладнання. – К. : Техніка, 2006. – Вип. 66 : Проблеми автоматизованого електропривода. Теорія і практика : тематичний випуск. – С. 286–287.

Надійшла 7.10.2008

За допомогою метода, що розроблено у першій частині роботи [1], синтезується закон керування переміщенням невідомого вантажа дволанковим роботом із неточно відомими характеристиками виконавчих органів. У якості вимірювачей використовуються тільки датчики кутів повороту ланок робота. Комп'ютерне моделювання підтвердило робастність та високу точність керування, що розглядається.

With the help of the method designed in the first part of the paper [1] syn-thesized was the law of transfer control of unknown load by two-link robot with uncertain characteristics of the effector. Linear-and-angular movement sensors of robot units are used as the only measuring device. Computer simulation has confirmed the robustness and high-precision of the control being considered.

УДК 62-50

С. О. Симонян, А. Г. Аветисян, Д. А. Казарян

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ В ОБЛАСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Рассматриваются задачи линейного быстродействия с закрепленными краевыми условиями и векторным уп-равляющим воздействием (общий случай), для решения которых в качестве основного математического аппарата выступают дифференциальные преобразования Г. Е. Пухова. Показываются достоинства предложенного подхода по сравнению с несколькими известными методами.

ВВЕДЕНИЕ

В известных работах [1, 3–5] задача, вынесенная в название статьи, решается с помощью определения собственных чисел и собственных векторов матрицы объекта управления, ее фундаментальной матрицы, а также вектора начальных значений сопряженных переменных, обеспечивающих оптимальность закона управления. Перечисленные задачи требуют большого объема вычислений.

Целью данной статьи является устранение необходимости решения перечисленных задач за счет сведения задачи к задаче нелинейного программирования.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую задачу оптимального быстродействия [1–5]:

– критерий качества:

$$I = \int_0^T 1dt = T \to \min_{u(t)}, \tag{1}$$

– уравнения движения:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \tag{2}$$

– закрепленные краевые условия:

$$X(0) = \text{fix}, \; X(T) = \text{fix}, \tag{3}$$

– ограничения, наложенные на управляющие воздействия:

$$|u_k(t)| \le 1, \;\; \forall k = \overline{1, r}, \tag{4}$$

где $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ – n-мерный вектор переменных состояния; $A = (a_{ij})$; $i, j = \overline{1, n}$ – матрица системы с постоянными элементами; $U(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$, $r \le n$ – r-мерный вектор управляющих воздействий; $B = (b_{jk})$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, r}$ – матрица управляющих переменных с постоянными элементами; T – время перехода.

Теперь допустим, что система полностью управляема и собственные числа матрицы A действительные и отрицательные либо нулевые.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

Сначала решим краевую задачу (2), (3). Система (2) в области дифференциальных преобразований приобретает следующий вид:

$$X(K+1) = \\ = \frac{H}{K+1}\left(\sum_{P=0}^{K}[A(P)\cdot X(K-P) + B(P)\cdot U(K-P)]\right), \\ K = 0, 1, \ldots,$$

где $X(K) = (X_1(K), \ldots, X_n(K))^T$ – вектор изображений переменных состояния; $A(P)$ – P-я матричная дискрета матрицы A; $B(P)$ – P-я матричная дискрета матрицы B; K – номер дискрет; H – масштабный коэффициент [6].

Учитивая, что $A(P=0) \equiv A$, $A(P \ge 1) = [0]$, а также $B(P=0) \equiv B$, $B(P \ge 1) = [0]$, в общем случае будем иметь

$$X(K+1) = \frac{H}{K+1}(A\cdot X(K) + B\cdot U(K)), \\ K = 0, 1, \ldots. \tag{5}$$

С другой стороны, известно [1–5], что для задач рассматриваемого класса имеет место известная теорема Фельдбаума, согласно которой оптимальная функция управления является кусочно-постоянной знакопеременной функцией, причем число переключений каждого управления $u_k(t)$ $k = \overline{1, r}$ не может превосходить $n-1$, т. е. в общем случае на временном интервале $[0, T]$ будем иметь $r(n-1)+1$ подынтервалов, а число времен переключений $t_p, p = \overline{1, r\cdot(n-1)}$ будет $r\cdot(n-1)$.

На каждом подынтервале управляющие воздействия $u_{kp}, k = \overline{1, r}$, $p = \overline{1, r\cdot(n-1)+1}$ постоянны. Следовательно, можно считать, что

$$u_{kp} = \begin{Bmatrix} +1 \\ \text{или} \\ -1 \end{Bmatrix} = U_p(0), \quad U_p(K \ge 1) \equiv 0, \\ k = \overline{1, r}, \quad p = \overline{1, r\cdot(n-1)+1}. \tag{6}$$

В этом случае получим

$$X(K+1) = \frac{H}{K+1}(A\cdot X(K) + B\cdot U(K)\cdot Ъ(K)), \\ K = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

или

$$X(K+1) = H^{K+1}\cdot[B_{K+1}\cdot X(0) + C_{K+1}(U(0))], \\ K = 0, 1, \ldots, \tag{8}$$

где матрицы-изображения B_K, $K = 0, 1, \ldots$ и векторы-изображения $C_K(U(0))$, $K = 0, 1, \ldots$ определяются согласно следующим рекуррентным соотношениям [7–9]:

$$B_{K+1} = \frac{1}{K+1}A\cdot B_K, \; K = 0, 1, \ldots, \\ C_{K+1}(U(0)) = \frac{1}{K+1}(A\cdot C_K(U(0)) + B\cdot U(K)\cdot Ъ(K)), \\ K = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

в свою очередь, $B_0 = E_{n\times n}$ – единичная матрица порядка n, $C_0 = (0)_{n\times 1}$ – нулевой вектор-столбец с размерами $n \times 1$, а $Ъ(K)$ – так называемая тейлоровская единица (тед) [6]:

$$Ъ(K) = \begin{cases} 1, & \text{при } K = 0, \\ 0, & \text{при } K \ne 0. \end{cases}$$

ISSN 1607-3274 «Радіоелектроніка. Інформатика. Управління» № 1, 2009

Оригинал $X(t)$ согласно дифференциально-тейлоровским преобразованиям будет восстановлен следующим образом:

$$X(t) = X(0) + X(1)(t - t_\upsilon) + X(2)(t - t_\upsilon)^2 + \ldots + X(K)(t - t_\upsilon)^K = X(0) + (B_1 X(0) + C_1)(t - t_\upsilon) + (B_2 X(0) + C_2)(t - t_\upsilon)^2 + \ldots + (B_K X(0) + C_K)(t - t_\upsilon)^K, \quad (10)$$

где $t \in [0, T]$, а t_υ – центр аппроксимации.

Таким образом, исходная задача заменяется последовательно стыкующейся друг с другом в точках переключений t_1, t_2, ..., $t_{r\cdot(n-1)}$ совокупностью $r \cdot n$ двухточечных краевых задач. Используя разработанные в публикациях [7–9] подходы и учитывая, что в каждой подзадаче ее левые краевые условия совпадают с правыми краевыми условиями предыдущей подзадачи, а ее правые краевые условия – с левыми краевыми условиями последующей подзадачи, то получим последовательность нижеприведенных подзадач.

На первом подынтервале будем иметь следующую двухточечную краевую задачу:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U_1; \quad X(0) = \text{fix},$$
$$X(t_1) = (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})^T, \quad (11)$$

на i-м подынтервале будем иметь

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U_i;$$
$$X(t_{i-1}) = (x_{1,i-1}, x_{2,i-1}, \ldots, x_{n,i-1})^T,$$
$$X(t_i) = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})^T, \quad (12)$$

и, наконец, на $r \cdot n$-м подынтервале – следующую двухточечную краевую задачу:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U_{r\cdot(n-1)+1};$$
$$X(t_{r\cdot(n-1)}) = (x_{1,r\cdot(n-1)}, x_{2,r\cdot(n-1)}, \ldots, x_{n,r\cdot(n-1)})^T,$$
$$X(T) = \text{fix}. \quad (13)$$

В результате решения последней задачи, с учетом соотношений, полученных на предыдущих подзадачах, найдем следующие выражения в виде равенств, которые будут выступать как ограничения в задаче нелинейного программирования (НЛП), которая эквивалентна исходной задаче оптимального быстродействия:

$$\begin{cases} \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_{r\cdot(n-1)}, T, u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1,r\cdot(n-1)+1}, \ldots, u_{21}, \ldots, u_{2,r\cdot(n-1)+1}, u_{r1}, \ldots, u_{r,r\cdot(n-1)+1}) - x_1(T) = 0, \\ \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_{r\cdot(n-1)}, T, u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1,r\cdot(n-1)+1}, \ldots, u_{21}, \ldots, u_{2,r\cdot(n-1)+1}, u_{r1}, \ldots, u_{r,r\cdot(n-1)+1}) - x_2(T) = 0, \\ \vdots \\ \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_{r\cdot(n-1)}, T, u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1,r\cdot(n-1)+1}, \ldots, u_{21}, \ldots, u_{2,r\cdot(n-1)+1}, u_{r1}, \ldots, u_{r,r\cdot(n-1)+1}) - x_n(T) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

где в представлении $u_{kp}, k = \overline{1, r}$, $p = \overline{1, r\cdot(n-1)+1}$ индекс p показывает номер подынтервала.

Ограничения вида неравенств (4) учтем следующими равенствами:

$$u_{kp}^2 - 1 = 0, \quad k = \overline{1, r}, \quad p = \overline{1, r\cdot(n-1)+1}. \quad (15)$$

Таким образом, задача НЛП окончательно приобретает вид

$$T \to \min_{t_1, \ldots, t_{r\cdot(n-1)}, T, u_{11}, \ldots, u_{1,r\cdot(n-1)+1}, u_{r1}, \ldots, u_{r,r\cdot(n-1)+1}},$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_{r\cdot(n-1)}, T, u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1,r\cdot(n-1)+1}, \ldots, u_{21}, \ldots, u_{2,r\cdot(n-1)+1}, u_{r1}, \ldots, u_{r,r\cdot(n-1)+1}) - x_1(T) = 0, \\ \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_{r\cdot(n-1)}, T, u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1,r\cdot(n-1)+1}, \ldots, u_{21}, \ldots, u_{2,r\cdot(n-1)+1}, u_{r1}, \ldots, u_{r,r\cdot(n-1)+1}) - x_2(T) = 0, \\ \vdots \\ \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_{r\cdot(n-1)}, T, u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1,r\cdot(n-1)+1}, \ldots, u_{21}, \ldots, u_{2,r\cdot(n-1)+1}, u_{r1}, \ldots, u_{r,r\cdot(n-1)+1}) - x_n(T) = 0; \end{cases} \\ u_{kp}^2 - 1 = 0, \; k = \overline{1, r}, \; p = \overline{1, r\cdot(n-1)}. \end{cases} \quad (16)$$

После решения этой задачи получим все неизвестные. Построение временных характеристик исходной задачи не представляет особой трудности.

Пример. Рассмотрим следующую задачу линейного быстродействия [1, 4]:

$$T \to \min_{u(t)},$$

$$\left\{\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix};\right.$$

$$\begin{cases} x_1(0) = -1,\ x_1(T) = 0, \\ x_2(0) = 0,\ x_2(T) = 0, \quad |u_k(t)| \le 1,\ \ k = \overline{1,3}. \\ x_3(0) = 0,\ x_3(T) = 0; \end{cases}$$

Имеем следующие результаты предварительных расчетов:

$$A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A(K \ge 1) = [0];$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B(K \ge 1) = [0];$$

$$B_1 = A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \frac{1}{2}(A(0)B_1 + A(1)) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_{\ge 3} = [0];$$

$$C_1 = B(0)U(0) = \begin{pmatrix} U_1(0) \\ U_2(0) \\ U_3(0) \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} U_2(0) \\ U_3(0) \\ 0 \end{pmatrix},\ C_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} U_3(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad C_{\ge 4} = (0).$$

В общем случае для каждого $u_k(t), k = \overline{1,3}$ будем иметь $n-1 = 2$ переключений. Однако согласно прин-ципу максимума Понтрягина (или теореме Фельдбаума) в конкретном случае будем иметь функции [1]

$$u_1(t) = \operatorname{sign}\psi_{10},\quad u_2(t) = \operatorname{sign}(-\psi_{10}\cdot t + \psi_{20}),$$
$$u_3(t) = \operatorname{sign}(\psi_{10}\cdot t^2/2 - \psi_{20}\cdot t + \psi_{30}),$$

где $\psi_{i0}, i = \overline{1,3}$ – начальные значения сопряженных переменных $\psi_i(t), i = \overline{1,3}$.

Из последних соотношений очевидно, что $u_1(t)$ постоянно на отрезке $[0, T]$, $u_2(t)$ может не иметь ни одного переключения или иметь всего одно переключение, а $u_2(t)$ может не иметь ни одного переключения или иметь одно или два переключения. Следовательно, по всем компонентам вектора $U(t)$ будем иметь 4 подынтервала времени на отрезке $[0, T]$ с четырьмя двухточечными краевыми подзадачами в предположении, что времена переключений расположены друг относительно друга в соответствии с цепочкой неравенств

$$0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le T.$$

Здесь пока что не известно, какое время переключения какому составляющему вектора $U(t)$ принадлежит; ответ на этот вопрос будет получен лишь только после окончательного решения задачи. Поэтому получим математические модели соответствующих подзадач на временных подынтервалах $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, $[t_3, T]$ с соответствующими двухточечными краевыми условиями.

Подзадача 1. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_{11}, \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_{21}, \\ \dot{x}_3(t) = u_{31}; \end{cases}$$

$$X(0)_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$X(t_1) = \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ x_3(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X(t) = X(0)_0 + (B_1X(0)_0 + C_1)t +$$
$$+ (B_2X(0)_0 + C_2)t^2 + (B_3X(0)_0 + C_3)t^3 + \ldots,$$

откуда при $t = t_1$

$$X(t_1) = X(0)_0 + (B_1X(0)_0 + C_1)t_1 + (B_2X(0)_0 + C_2)t_1^2 +$$
$$+ (B_3X(0)_0 + C_3)t_1^3 + \ldots = (x_{11}, x_{21}, x_{31})^T$$

или

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix}\right]t_1 +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{31} \\ 0 \end{pmatrix}\right]t_1^2 + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} u_{31} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}t_1^3 = X(t_1) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}.$$

Из последнего

$$\begin{cases} -1 + u_{11}t_1 + \frac{1}{2}u_{21}t_1^2 + \frac{1}{6}u_{31}t_1^3 = x_{11}, \\ u_{21}t_1 + \frac{1}{2}u_{31}t_1^2 = x_{21}, \\ u_{31}t_1 = x_{31}. \end{cases}$$

Подзадача 2. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_{12}, \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_{22}, \\ \dot{x}_3(t) = u_{32}; \end{cases}$$

$$X(0)_1 = X(t_1) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix},$$

$$X(t_2) = \begin{pmatrix} x_1(t_2) \\ x_2(t_2) \\ x_3(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X(t) = X(0)_1 + (B_1X(0)_1 + C_1)(t-t_1) + \\ + (B_2X(0)_1 + C_2)(t-t_1)^2 + \\ + (B_3X(0)_1 + C_3)(t-t_1)^3 + \ldots,$$

откуда при $t = t_2$

$$X(t_2) = X(0)_1 + (B_1X(0)_1 + C_1)(t_2-t_1) + \\ + (B_2X(0)_1 + C_2)(t_2-t_1)^2 + \\ + (B_3X(0)_1 + C_3)(t_2-t_1)^3 + \ldots = (x_{12}, x_{22}, x_{32})^T$$

или

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} + \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix}\right](t_2-t_1) + \\ + \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{22} \\ u_{32} \\ 0 \end{pmatrix}\right](t_2-t_1)^2 + \\ + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} u_{32} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(t_2-t_1)^3 = X(t_2) = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}.$$

Из последнего следует

$$\begin{cases} x_{11} + (x_{21} + u_{12})(t_2-t_1) + \frac{1}{2}(x_{31} + u_{22})(t_2-t_1)^2 + \\ \qquad + \frac{1}{6}u_{32}(t_2-t_1)^3 = x_{12}, \\ x_{21} + (x_{31} + u_{22})(t_2-t_1) + \frac{1}{2}u_{32}(t_2-t_1)^2 = x_{22}, \\ x_{31} + u_{32}(t_2-t_1) = x_{32}. \end{cases}$$

Подзадача 3. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_{13}, \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_{23}, \\ \dot{x}_3(t) = u_{33}; \end{cases}$$

$$X(0)_2 = X(t_2) = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}, \quad X(t_3) = \begin{pmatrix} x_1(t_3) \\ x_2(t_3) \\ x_3(t_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X(t) = X(0)_2 + (B_1X(0)_2 + C_1)(t-t_2) + \\ + (B_2X(0)_2 + C_2)(t-t_2)^2 + (B_3X(0)_2 + C_3)(t-t_2)^3 + \ldots,$$

откуда при $t = t_3$

$$X(t_3) = X(0)_2 + (B_1X(0)_2 + C_1)(t_3-t_2) + \\ + (B_2X(0)_1 + C_2)(t_3-t_2)^2 + \\ + (B_3X(0)_1 + C_3)(t_3-t_2)^3 + \ldots = (x_{13}, x_{23}, x_{33})^T$$

или

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} + \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix}\right](t_3-t_2) + \\ + \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{23} \\ u_{33} \\ 0 \end{pmatrix}\right](t_3-t_2)^2 + \\ + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} u_{33} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(t_3-t_2)^3 = X(t_3) = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}.$$

Из последнего следует

$$\begin{cases} x_{12} + (x_{22} + u_{13})(t_3-t_2) + \frac{1}{2}(x_{32} + u_{23})(t_3-t_2)^2 + \\ \qquad + \frac{1}{6}u_{33}(t_3-t_2)^3 = x_{13}, \\ x_{22} + (x_{32} + u_{23})(t_3-t_2) + \frac{1}{2}u_{33}(t_3-t_2)^2 = x_{23}, \\ x_{32} + u_{33}(t_3-t_2) = x_{33}. \end{cases}$$

Подзадача 4. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_{14}, \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_{24}, \\ \dot{x}_3(t) = u_{34}; \end{cases}$$

$$X(0)_3 = X(t_3) = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}, \quad X(T) = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \\ x_3(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X(t) = X(0)_3 + (B_1 X(0)_2 + C_1)(t - t_3) + \\ + (B_2 X(0)_3 + C_2)(t - t_3)^2 + (B_3 X(0)_3 + C_3)(t - t_3)^3 + \ldots,$$

откуда при $t = T$

$$X(T) = X(0)_3 + (B_1 X(0)_2 + C_1)(T - t_3) + \\ + (B_2 X(0)_3 + C_2)(T - t_3)^2 + \\ + (B_3 X(0)_3 + C_3)(T - t_3)^3 + \ldots = (0, 0, 0)^T$$

или

$$\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} + \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{14} \\ u_{24} \\ u_{34} \end{pmatrix} \right] (T - t_3)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{24} \\ u_{34} \\ 0 \end{pmatrix} \right] (T - t_3)^2 + \\ + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} u_{34} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (T - t_3)^3 = X(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, задача НЛП приобретает вид

$$T \to \min_{x_{13}, x_{23}, x_{33}, t_3, T, u_{14}, u_{24}, u_{34}};$$

$$\begin{cases} x_{13} + (x_{23} + u_{14})(T - t_3) + \frac{1}{2}(x_{33} + u_{24})(T - t_3)^2 + \\ \qquad + \frac{1}{6} u_{34}(T - t_3)^3 = 0, \\ x_{23} + (x_{33} + u_{24})(T - t_3) + \frac{1}{2} u_{34}(T - t_3)^2 = 0, \\ x_{33} + u_{34}(T - t_3) = 0. \end{cases}$$

Далее, учитывая соотношения, полученные на предыдущих подынтервалах и ограничения типа (15), окончательно получим следующую задачу НЛП:

$$T \to \min_{\substack{t_1, t_2, t_3, T, u_{11}, u_{21}, u_{31}, \\ u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{13}, u_{23}, u_{33}, u_{14}, u_{24}, u_{34}}};$$

$$-1 + u_{11}t_1 + \frac{1}{2}u_{21}t_1^2 + \frac{1}{6}u_{31}t_1^3 + \left(u_{21}t_1 + \frac{1}{2}u_{31}t_1^2 + u_{12}\right)(t_2 - t) + \\ + \frac{1}{2}(t_1 u_{31} + u_{22})(t_2 - t_1)^2 + \frac{1}{6}u_{32}(t_2 - t_1)^3 + \\ + \left(u_{21}t_1 + \frac{1}{2}u_{31}t_1^2 + (t_1 u_{31} + u_{22})(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}u_{32}(t_2 - t_1)^2 + u_{13}\right) \times \\ \times (t_3 - t_2) + \frac{1}{2}(u_{31}t_1 + u_{32}(t_2 - t_1) + u_{23})(t_3 - t_2)^2 + \\ + \frac{1}{6}u_{33}(t_3 - t_2)^3 + \left(u_{21}t_1 + \frac{1}{2}u_{31}t_1^2 + (u_{31}t_1 + u_{22})(t_2 - t_1) + \\ + \frac{1}{2}u_{32}(t_2 - t_1)^2 + (u_{31}t_1 + (t_2 - t_1)u_{32} + u_{23})(t_3 - t_2) + \\ + \frac{1}{2}u_{33}(t_3 - t_2)^2 + u_{14}\right)(T - t_3) + \frac{1}{2}(u_{31}t_1 + u_{32}(t_2 - t_1) + \\ + u_{33}(t_3 - t_2) + u_{24})(T - t_3)^2 + \frac{1}{6}u_{34}(T - t_3)^3 = 0,$$

$$u_{21}t_1 + \frac{1}{2}u_{31}t_1^2 + (u_{31}t_1 + u_{22})(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}u_{32}(t_2 - t_1)^2 + \\ + (u_{31}t_1 + u_{32}(t_2 - t_1) + u_{23})(t_3 - t_2) + \frac{1}{2}u_{33}(t_3 - t_2)^2 + \\ + \left(u_{31}t_1 + u_{32}(t_2 - t_1) + u_{33}(t_3 - t_2) + u_{24}\right)(T - t_3) + \\ + \frac{1}{2}u_{34}(T - t_3)^2 = 0,$$

$$u_{31}t_1 + u_{32}(t_2 - t_1) + u_{33}(t_3 - t_2) + u_{34}(T - t_3) = 0;$$

$$u_{11}^2 - 1 = 0, \quad u_{12}^2 - 1 = 0, \quad u_{13}^2 - 1 = 0, \quad u_{14}^2 - 1 = 0,$$

$$u_{21}^2 - 1 = 0, \quad u_{22}^2 - 1 = 0, \quad u_{23}^2 - 1 = 0, \quad u_{24}^2 - 1 = 0,$$

$$u_{31}^2 - 1 = 0, \quad u_{32}^2 - 1 = 0, \quad u_{33}^2 - 1 = 0, \quad u_{34}^2 - 1 = 0,$$

Таким образом, имеем задачу НЛП с 16 неизвестными (3 момента переключения t_1, t_2, t_3, одно время перехода T, 12 управляющих величин u_{kp}, $k = \overline{1, 3}$, $p = \overline{1, 4}$) и с 15 ограничениями вида равенств. Эта задача была решена методом Лагранжа, в результате чего были получены следующие претенденты-решения, представленные в табл. 1.

Очевидно, что из 3 полученных претендентов-решений первое решение не удовлетворяет исходной задаче, ибо нарушено условие $t_3 \le T$, а время перехода 3-го претендента-решения меньше времени перехода 2-го претендента-решения. Кроме того, во 2-м претенденте-решении нарушено условие $t_2 \le t_3$. Поэтому окончательным решением исходной задачи служит 3-е претендент-решение, в соответствии с которым имеем временные характеристики задачи, представленные на рис. 1 и рис. 2. Последние полностью совпадают с решением, полученным в [1, 4].

Таблица 1

	t_1	t_2	t_3	T	u_{11}	u_{21}	u_{31}	u_{12}	u_{22}	u_{32}	u_{13}	u_{23}	u_{33}	u_{14}	u_{24}	u_{34}
1	0,9337	1,1912	2,1249	1,8675	1	−1	1	−1	1	1	1	−1	−1	1	−1	1
2	0,4614	0,5058	0,4614	0,8339	1	1	−1	1	1	1	1	−1	−1	1	−1	1
3	0,2041	0,4082	0,6123	0,8164	1	1	1	1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1

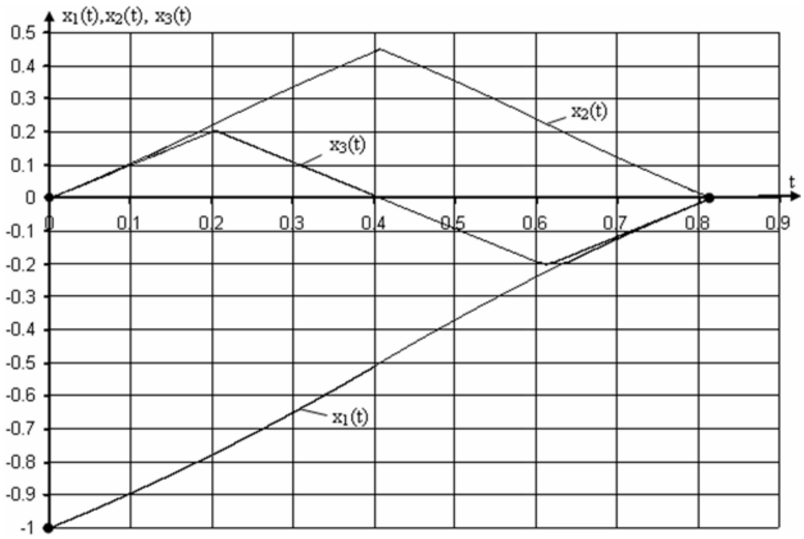

Рисунок 1 – Временные характеристики переменных состояния

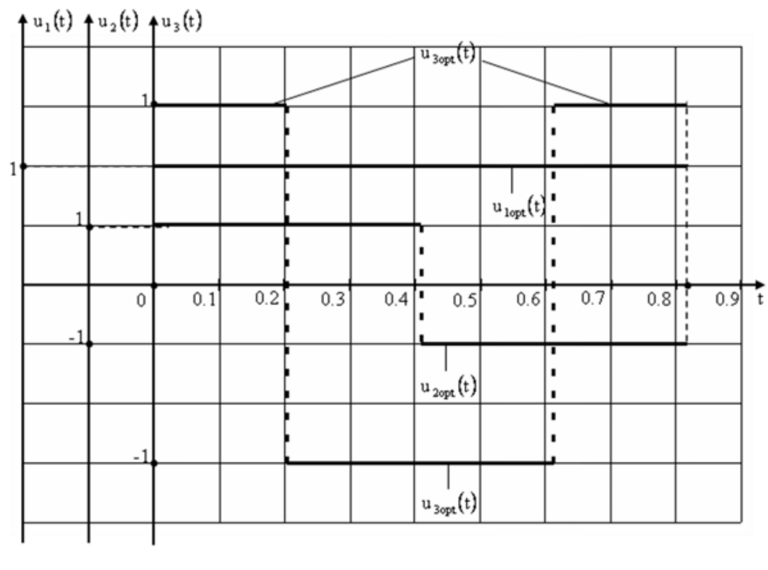

Рисунок 2 – Временные характеристики управляющих переменных

ВЫВОДЫ

Таким образом, при предложенном подходе, в отличие от [1, 3–5], исходная задача сводится к некоторой задаче НЛП, в которой нет необходимости в определении собственных чисел и соответствующих собственных векторов матрицы A, фундаментальной матрицы последней, вектора начальных значений сопряженных переменных, обеспечивающих оптимальность закона управления $U_{\text{opt}}(t)$, знаков подынтервалов постоянства компонентов вектора управления, детерминантных уравнений в необходимом количестве и многих других трудноразрешимых дополнительных подзадач. Эти обстоятельства и обуславливают эффективность предложенного подхода.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. *Симонян С. О.* Прикладная теория оптимального управления / Симонян С. О. – Ереван : 2005. – 180 с. – На армянском языке.
2. *Брайсон А.* Прикладная теория оптимального управления / Брайсон А., Хо Ю-Ши. – М. : Мир, 1972. – 554 с.
3. *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. – М. : Наука, 1983. – 392 с.
4. *Симонян С. О.* Основы синтеза специализированных вычислителей динамических задач нелинейного программирования : автореф. дис. ... д. т. н. / Симонян С. О. – Ереван, 1993. – 47 с.
5. *Фельдбаум А. А.* Основы теории оптимальных автоматических систем / Фельдбаум А. А. – М. : Наука, 1966. – 623 с.
6. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные спектры и модели / Пухов Г. Е. – К. : Наукова думка, 1990. – 184 с.
7. *Симонян С. О.* Метод решения задач оптимального управления, основанный на дифференциальных преобразованиях / Симонян С. О., Аветисян А. Г., Казарян Д. А. // Вестник ГИУА. Сер. «Моделирование, оптимизация, управление». – 2007. – Вып. 10, том 2. – С. 102–114.
1. *Симонян С. О.* Прямой метод решения линейных многоточечных краевых задач / Симонян С. О., Аветисян А. Г. // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2002. – Т. LV, № 1. – С. 95–103.
2. *Симонян С. О.* Метод решения линейных многоточечных краевых задач, основанный на дифференциально-дирихлеевских преобразованиях / Симонян С. О., Аветисян А. Г., Казарян Д. А. // Вестник ИАА. – 2007. – Т. 2. – С. 253–257. – На армянском языке.

Надійшла 17.06.2008
Після доробки 17.10.2008

Розглядаються задачі лінійної швидкодії із закріпленими крайовими умовами й векторним керуючим впливом (загальний випадок), для рішення яких у якості основного математичного апарата виступають диференціальні перетворення Г. Е. Пухова. Демонструються переваги запропонованого підходу в порівнянні з відомими методами.

Linear speed problems with fixed boundary conditions and control influence vector (general case) are considered, Pukhov's differential transformations serve as a main mathematical apparatus serving as the main mathematical apparatus. The merits of the proposed approach with respect to a number of known methods are shown.