УПРАВЛІННЯ У ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

CONTROL IN TECHNICAL SYSTEMS

УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УДК 519.85

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗКЛАДУ НАВЧАННЯ В УНІВЕРСИТЕТІ

Косолап А. І. – д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри спеціалізованих комп'ютерних систем Українського державного хіміко-технологічного університету, Дніпро, Україна.

Дубовик Т. М. – старший викладач кафедри спеціалізованих комп'ютерних систем Українського державного хіміко-технологічного університету, Дніпро, Україна.

АНОТАЦІЯ

Актуальність. В роботі розглядається відома задача складання розкладу навчань в університеті. Такі задачі розв'язуються декілька разів на рік в кожному навчальному закладі. Не дивлячись на багаточисленні дослідження в даній галузі, проблема побудови оптимального розкладу залишається відкритою. Це пов'язано зі складністю відповідної оптимізаційної задачі, зокрема її значною розмірністю, що затрудняє чисельне розв'язування такої задачі існуючими методами оптимізації. Вдосконалення потребують також оптимізаційні моделі складання розкладів. Таким чином, оптимізація розкладу є складною обчислювальною проблемою і потребує розробки нових методів її розв'язування.

Мета роботи. Вдосконалення оптимізаційних моделей складання розкладів навчання в університеті та використання нових ефективних методів для їх розв'язування.

Метод. Ми використовуємо метод точної квадратичної регуляризації для розв'язування оптимізаційних задач складання університетського розкладу навчання. Точна квадратична регуляризація дозволяє перетворити складні оптимізаційні моделі з булевими змінними до задачі максимуму норми вектору на опуклій множині. Для розв'язування цієї задачі ми використовуємо ефективний прямо-двоїстий метод внутрішньої точки та метод дихотомії. Цей метод показав значно кращі результати при розв'язуванні багатьох складних мультимодальних задач. Це підтверджується багатьма порівняльними обчислювальними експериментами. Ще більшу ефективність метод точної квадратичної регуляризації демонструє при розв'язуванні задач складання розкладу навчання. Цей метод оптимізації використовується вперше для даного класу задач, тому він потребував розробки відповідного алгоритмічного забезпечення.

Результати. Побудована нова більш проста оптимізаційна модель складання розкладу, яка легко реалізується програмно в пакеті Excel при наявності надбудов OpenSolver, RiskSolver та інших. Приведений невеликий приклад побудови розкладу та описана пошагова інструкція отримання оптимального розв'язку.

Висновки. Розроблена нова ефективна технологія складання розкладу навчань в університеті, яка виділяється простотою реалізації і не потребує розробки спеціального програмного забезпечення. Ефективність забезпечується використанням нового методу точної квадратичної регуляризації.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: розклад навчання, оптимізація, задачі з булевими змінними, метод точної квадратичної регуляризації.

АБРЕВІАТУРИ

УДХТУ – Український державний хіміко-технологічний університет;

Excel – офісний пакет Microsoft;

OpenSolver – надбудова Excel;

RiskSolver – ще одна надбудова Excel;

EQR – точна квадратична регуляризація;

Bi – i-й викладач;

Пi – i-й предмет.

НОМЕНКЛАТУРА

a_{kj} – лекційне навантаження в годинах по k-му курсу та j-му предмету;

b_{kj} – лабораторне навантаження в годинах по k-му курсу та j-му предмету;

S_k – множина предметів k-го курсу;

V_k – множини індексів занять k-го викладача;

R_k – тижнева кількість годин на k-му курсі;

A_k – множина лекцій k-го курсу;

B_k – множина лабораторних занять k-го курсу;

r – кількість комп'ютерних класів;

K – кількість викладачів;

x_{ij} – булева змінна, яка дорівнює одиниці, якщо j-те заняття проводиться на i-й парі;

z – допоміжна змінна перетворення EQR;

s – параметр точної квадратичної регуляризації;

DOI 10.15588/1607-3274-2021-3-15

d – змінна методу EQR;

$||x||^2$ – квадрат Евклідової норма вектору x;

I_1 – множина навчальних пар по чисельнику (початок інтервалу сумування);

J_1 – множина навчальних пар по чисельнику (кінець інтервалу сумування);

I_2 – множина навчальних пар по знаменнику (початок інтервалу сумування);

J_2 – множина навчальних пар по знаменнику (кінець інтервалу сумування);

i – змінна індексів сум, параметрів та змінних;

j – змінна індексів сум, параметрів та змінних;

k – змінна індексів сум, параметрів та змінних;

l – змінна індексів сум, параметрів та змінних.

ВСТУП

Проблема складання розкладу занять виникає 4–8 разів на рік в кожному університеті. Це досить складна комбінаторна проблема, розв'язок якої потребує досить багато часу. Тому цій проблемі присвячено багато публікацій. Немає єдиного розуміння який розклад вважати кращим. Як правило, задача складання розкладу зводиться до оптимізаційної комбінаторної задачі великої розмірності з булевими змінними та з безліччю обмежень. Така задача є складною обчислювальною проблемою. Тому існуючі програмні пакети складання розкладу не знаходять оптимальні розв'язки, а тільки допомагають диспетчеру знайти допустимий розв'язок. Деякі програмні пакети містять розв'язування оптимізаційних задач. Для розв'язування таких задач частіше використовуються методи розгалужень та границь, які потребують досить багато часу, або генетичні та еволюційні алгоритми, які теж потребують багато часу і не гарантують отримання оптимальних розв'язків, а іноді і допустимих розв'язків. Використовують також евристичні алгоритми, які часто знаходять розв'язки далекі від оптимальних. Тому проблема побудови оптимальних розкладів навчань залишається відкритою [1]. В даній роботі пропонується нова проста оптимізаційна модель складання розкладу навчань та вперше для даного класу задач використовується ефективний метод точної квадратичної регуляризації для її розв'язування [2], який потребував розробки нового алгоритмічного забезпечення, враховуючи специфіку даної задачі.

Об'єктом дослідження даної роботи є процеси побудови оптимальних розкладів занять та їх математичне моделювання.

Предметом дослідження є оптимізаційні комбінаторні задачі великої розмірності з булевими змінними, до яких належать задачі складання розкладу навчання.

Метою даного дослідження є вдосконалення оптимізаційної моделі для складання розкладу навчання та розробка простого та ефективного алгоритму знаходження оптимального розкладу.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Відомими даними для задачі складання розкладу є S_k – множина предметів k-го курсу; K – кількість викладачів, що забезпечують навчальний процес, їх навчальне навантаження a_{kj} в годинах на тиждень по лекціям, лабораторним та практичним заняттям b_{kj}; кількість можливих пар занять кожного дня тижня. Задача складання розкладу полягає в визначенні для кожного викладача змінної x_{ij}, яка дорівнює одиниці якщо i-те заняття проводиться на j-й парі тижня інакше ця змінна дорівнює нулю. Змінні x_{ij} утворюють матрицю, строчкам якої відповідають пари занять, а стовпцям – предмети. Оптимальним розкладом вважаємо такий, для якого дисперсія кількості занять студентів кожного дня тижня є мінімальною. Це означає, що сума квадратів сум x_{ij} для кожного дня тижня кожної групи буде мінімальною. Мінімум потрібно знайти при виконанні наступних обмежень. Студенти однієї групи можуть бути одночасно присутні тільки на одному занятті (суми x_{ij} по строкам не більше одиниці), кожен викладач одночасно проводить тільки одне заняття (суми x_{ij} по строкам по кожному викладачеві не більше одиниці), існує обмеження по кількості комп'ютерних класів для проведення лабораторних робіт, по кількості пар занять кожного дня, у студентських заняттях не повинно бути вікон, заняття проводяться згідно з навчальному плану. Дана постановка задачі складання розкладу відрізняється від існуючих вибором критерія оптимальності та обмеженнями на відсутність вікон в заняттях студентів.

Для того, щоб скласти розклад занять на тиждень тільки по одній спеціальності необхідно заповнити таблицю нулями та одиницями, де елементи таблиці відповідають парам занять. В цій таблиці буде 50 рядків (кількість можливих пар занять протягом тижня), а по стовпцям будуть предмети для кожного курсу (лекції, практичні та лабораторні роботи). В реальному розкладі така таблиця для кожної групи об'єднується в один стовпчик і тоді на місце одиниці записують назву предмету та викладача. Поряд з назвами предметів в шапці таблиці необхідно вказати прізвище викладача. Число рядків таблиці дорівнює числу можливих занять протягом тижня (кожен день можна проводити заняття з першої по п'яту пару) з урахуванням чисельника та знаменника. Таким чином, якщо на кожному курсі (всього п'ять курсів) навчається тільки одна група і кількість предметів в семестрі, наприклад, дорівнює 6, то отримуємо таблицю розміром 50×60 (по кожному предмету маємо лекцію та практичне або лабораторне заняття). Тоді в розглянутій задачі кількість невідомих булевих змінних буде дорівнювати 3000. Це досить складна задача для сучасних методів оптимізації.

Для побудови оптимізаційної моделі даної задачі будемо враховувати наступне. Кожний день у групи студентів повинно бути не менше 2-х та не більше 4-х занять (пар). Як правило, заняття студентів можуть проводитись як по чисельнику так і по знаменнику.

DOI 10.15588/1607-3274-2021-3-15

Будемо допускати, що кожен день заняття можуть проводяться з першої по п'яту пару. Якщо заняття проводяться по чисельнику та знаменнику, то можлива кількість пар кожен день дорівнює 10. При дефіциті аудиторій кількість пар кожного дня може бути більшою. Крім того, кількість занять на неділю, як правило, відоме та для кожного курсу визначається навчальним планом. В даний момент часу студентська група може бути присутня тільки на одному занятті, а викладач теж може проводити заняття тільки по одному предмету. Лабораторні роботи, як правило, проводяться в комп'ютерних класах кількість яких обмежена, тому одночасно таких занять може бути не більше ніж комп'ютерних класів. Крім того, в розкладі не повинно бути вікон для студентів. З двох розкладів кращим буде такий в якому дисперсія кількості занять кожного дня протягом тижня буде мінімальною. Такий розклад створює найкращі умови для якісного навчання студентів. Можна допустити обмеження на відсутність вікон і для викладачів, але значне збільшення обмежень задачі може привести до того, що допустима множина задачі стане пустою.

2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Перші публікації присвячені складанню розкладів занять з'явились ще в 60-ті роки минулого століття. Але в ті роки значних успіхів в розв'язанні цієї проблеми досягнуто не було. Незважаючи на відсутність успіхів та враховуючи актуальність проблеми, дослідження пошуку ефективних методів її розв'язування інтенсивно продовжуються. З'являються перші оглядові роботи присвячені розкладу навчань в університетах [1, 3, 4]. В цих роботах приводиться багато оптимізаційних моделей та методів і робиться висновок, що потрібно провести ще багато досліджень щоб розв'язати дану проблему. В наш час також з'являються оглядові публікації присвячені даній проблемі [5]. Зокрема огляд моделей складання розкладу розглянутий в роботі [6], а в роботах [7–9] приведений огляд сучасних методів розв'язування даної проблеми. В цих публікаціях стверджується, що на сьогодні проблема складання розкладу навчання для університету як і раніше залишається відкритою. Розробляється також програмне забезпечення, яке допомагає диспетчеру складати розклад. Але оптимізація такого розкладу потребує розробки нових методів. Як стверджується в роботі [5] сучасне програмне забезпечення орієнтовано в першу чергу на графічний інтерфейс, а не на ефективні алгоритми оптимізації.

Детальний аналіз існуючих технологій складання розкладів розглянуто в роботах [8, 9]. Всі ці дослідження свідчать про те, що в даний час не існує ефективних методів оптимізації складання розкладу в університетах.

3 МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

Побудуємо оптимізаційну модель задачі складання розкладу навчання в університеті. З навчального плану відомо a_{kj} – кількість годин лекцій j-го предмету кожного тижня, b_{kj} – практичних чи лабораторних робіт на k-му курсі протягом тижня. Відома також кількість викладачів, що забезпечують навчальний процес, а також V_k – множини індексів занять k-го викладача, S_k – множина занять k-го курсу (лекції та лабораторні чи практичні заняття). Введемо змінні моделі x_{ij}, які дорівнюють одиниці якщо i-те заняття проводиться на j-й парі тижня, інакше ця змінна дорівнює нулю.

В якості цільової функції візьмемо наступну

$$\min\{\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\left(\sum_{i=10(l-1)+1}^{10l}\ \sum_{j\in S_k} x_{ij}\right)^2\}. \quad (1)$$

Це сума часів занять студентів кожного дня в квадраті для кожного курсу і вона повинна бути мінімальною. Якщо ця сума буде мінімальною, то дисперсія кількості пар занять кожного тижня теж буде мінімальною. Далі введемо наступні обмеження.

1. Тижнева кількість навчань студентів дорівнює

$$\sum_{i=1}^{50}\ \sum_{j\in S_k} x_{ij} = R_k, k = 1,...,5. \quad (2)$$

2. Кількість занять на кожний день по кожному курсу обмежена

$$\begin{aligned} 2 &\le \sum_{i=10(l-1)+1}^{10l}\ \sum_{j\in S_k} x_{ij} \le 4, l = 1,...,5, k = 1,...,5, \\ 2 &\le \sum_{i=10(l-1)+2}^{10l}\ \sum_{j\in S_k} x_{ij} \le 4, l = 1,...,5, k = 1,...,5. \end{aligned} \quad (3)$$

що означає мінімум дві пари та максимум чотири пари на день. Так як заняття проводяться по чисельникам та знаменникам, то в першому обмеженні індекс i приймає тільки непарні значення, а в другій нерівності – тільки парні значення. При збільшенні кількості обмежень задачі умови (3) стають суттєвими.

3. Кожне заняття проводиться

$$\sum_{i=1}^{50} x_{ij} = a_{kj}, j \in A_k, \sum_{i=1}^{50} x_{ij} = b_{kj}, j \in B_k, k = 1,...,5. \quad (4)$$

4. Кількість одночасного проведення лабораторних робіт не перевищує кількості комп'ютерних класів

$$\sum_{j\in B} x_{ij} \le r, i = 1,...,50, B = \bigcup_{k=1}^{5} B_k. \quad (5)$$

5. Одна група може бути присутня одночасно тільки на одному занятті

DOI 10.15588/1607-3274-2021-3-15

$$\sum_{j\in S_k} x_{ij} \le 1, i=1,...,50, k=1,...,5. \quad (6)$$

6. Один викладач теж може проводити одночасно не більше одного заняття

$$\sum_{j\in V_k} x_{ij} \le 1, i=1,...,50, k=1,...,K. \quad (7)$$

7. В розкладі не повинно бути студентських вікон. Це рівносильно наступним обмеженням

$$\begin{aligned}
&x_{10(l-1)+i} + x_{10(l-1)+j} - 2\sum_{k=10(l-1)+i+1}^{10(l-1)+j-1} x_{10(l-1)+k} \le 1,\\
&i \in I_1 = \{1,3,5,1,3,1\}, j \in J_1 = \{5,7,9,7,9,9\}, l = 1,2,3,4,5,\\
&x_{10(l-1)+i} + x_{10(l-1)+j} - 2\sum_{k=10(l-1)+i+1}^{10(l-1)+j-1} x_{10(l-1)+k} \le 1,\\
&i \in I_2 = \{2,4,6,2,4,2\}, j \in J_2 = \{6,8,10,8,10,10\}, l = 1,2,3,4,5,
\end{aligned} \quad (8)$$

де індекси i, j приймають тільки однакові місця в заданих множинах I_1, J_1 та I_2, J_2.

Перше обмеження (8) виключає вікна по чисельнику, а друге – по знаменнику. Як правило, обмеження (8) в існуючих моделях розкладу не враховується. Розглянемо обмеження (8) більш детально. Якщо в розкладі є вікна, то в ньому будуть наступні послідовності нулів та одиниць 101, 1001, 10001 одного дня по чисельнику або знаменнику. Для цих послідовностей сума крайніх одиниць мінус подвоєна сума не крайніх нулів буде більше одиниці, тобто обмеження (8) буде порушуватись. Для всіх інших послідовностей відповідна сума буде не більше одиниці. Наприклад, для послідовностей 100, 110, 111, 1101, 11011 відповідно отримуємо $1 \le 1$, $-1 \le 1$, $0 \le 1$, $0 \le 1$, $0 \le 1$. В обмеженнях (8) враховуються послідовності з трьох, чотирьох та п'яти чисел підряд для кожного дня по чисельнику та знаменнику. В попередньому прикладі ми спостерігаємо вікна для двох останніх послідовностей, які містять послідовності 101, тому для них обмеження (8) будуть порушені і послідовності 1101, 11011 будуть недопустимими.

Якщо допустити, що на кожному курсі навчається декілька груп, тоді лекції часто проводяться одночасно для всіх груп. Ця умова задається простими обмеженнями $x_{ij} = x_{ik}$, $i = 1,…,50$ (j-та та k-та лекція проводиться одночасно). Можна добавити також обмеження на аудиторний фонд, але для багатьох університетів дефіцит аудиторного фонду не є критичним. Інколи j-й викладач на i-й парі не може бути присутнім (наприклад, працює в цей час в другому місці), тоді відповідна змінна $x_{ij} = 0$.

Запропонована модель відноситься до класу квадратичних з лінійними обмеженнями та булевими змінними. Всі обмеження є лінійними, а цільова функція квадратична. Розглянуту модель ми можемо спростити. Так, обмеження (2) визначається навчальним планом, тож його можна опустити. Всі інші обмеження є суттєві.

Отримана модель має велику розмірність не тільки по змінним але й по обмеженням. Якщо припустити, що кількість викладачів дорівнює 15, на кожному курсі навчається тільки одна група і кількість занять на кожному курсі (в семестрі) дорівнює 10, то отримуємо задачу з 2500 булевими змінними та 1400 обмеженнями. Розв'язати таку задачу методом розгалужень та границь неможливо. Якщо булеві змінні замінити неперервними на відрізку [0, 1], то задача (1)–(8) буде розв'язана прямо-двоїстим методом внутрішньої точки за 1–2 хвилини. Але отриманий розв'язок буде недопустимий.

Умову булевості змінних в задачі (1)–(8)можна замінити обмеженнями

$$\sum_{i=1}^{50}\sum_{k=1}^{5}\sum_{j\in S_k} x_{ij}(1-x_{ij}) \le 0, 0 \le x \le 1, \quad (9)$$

але ці обмеження є неопуклими, а задача (1)–(9) стає мультимодальною. Для її розв'язування можна використати генетичні чи еволюційні алгоритми. Але ці алгоритми не гарантують отримання навіть допустимого розв'язку задачі (1)–(9). Єдиною альтернативою існуючим алгоритмам є метод точної квадратичної регуляризації (EQR) [2]. В цьому методі квадратична регуляризація використовується для перетворення задачі (1)–(9) до наступної

$$\max\{\|x\|^2 | \sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\left(\sum_{i=10(l-1)+1}^{10l}\sum_{j\in S_k} x_{ij}\right)^2 + s + \|x\|^2 \le d\}, \quad (10)$$

(формула (10) містить додаткове обмеження) при обмеженнях (3)–(8), а обмеження (9) замінюємо наступним

$$2\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{50}\sum_{k=1}^{5}\sum_{j\in S_k} x_{ij}^2 + \sum_{k=1}^{5}\sum_{j\in A_k} a_{kj} + \sum_{k=1}^{5}\sum_{j\in B_k} b_{kj} \le d. \quad (11)$$

Таким чином, мультимодальна задача (1)–(9) звелась до максимізації норми вектору на опуклій множині. Обмеження (10) містить скалярний параметр s, який повинен задовольняти умові

$$s \ge \sum_{k=1}^{5}\sum_{j\in A_k} a_{kj} + \sum_{k=1}^{5}\sum_{j\in B_k} b_{kj} - \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{R_k}{5}\right), \quad (12)$$

при якій обмеження (10) буде активним, а квадрат норми вектору містить ще одну неперервну змінну z

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{50}\sum_{k=1}^{5}\sum_{j\in S_k} x_{ij}^2 + z^2.$$

Таким чином, задача (1)–(9) точною квадратичною регуляризацією перетворена до еквівалентної задачі (3)–(8), (10)–(11). При такому перетворенні розмірність задачі зросла всього на одиницю. Далі будемо розв'язувати перетворену задачу розв'язок якої співпадає з розв'язком задачі (1)–(9).

DOI 10.15588/1607-3274-2021-3-15

В задачі (3)–(8), (10)–(11) необхідно знайти мінімальне значення скалярної величини d, для якої виконується умова $2\|x\|^2 - d = 0$. При фіксованих значеннях d задача (3)–(8), (10)–(11) розв'язується прямо-двоїстим методом внутрішньої точки [10]. Значення d будемо знаходити методом дихотомії. Це приблизно 20–30 розв'язувань даної задачі при фіксованих значеннях d. Таким чином, перетворена задача (3)–(8), (10)–(11) може буде розв'язана програмою OpenSolver за 30 хвилин для практичної задачі складання розкладу.

Ми пропонуємо наступний алгоритм для розв'язування задачі (3)–(8), (10)–(11).

Крок 1. Обираємо початкові дані для змінних $x_{ij} = 0$, $\forall i,j$, $z = 1$ та визначаємо параметр s за формулою (12).

Крок 2. Розв'язуємо задачу опуклої оптимізації

$$\min\{d \mid \sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\left(\sum_{i=10(l-1)+1}^{10l}\ \sum_{j\in S_k} x_{ij}\right)^2 + s + \| x \|^2 \le d\},$$

з обмеженнями (3)–(8), (11) програмою OpenSolver, що реалізує прямо-двоїстий алгоритм внутрішньої точки та знаходимо мінімально можливе значення змінної d.

Крок 3. Послідовно збільшуємо значення змінної d на величину, що пропорційна значенню $2\|x\|^2 - d$ по абсолютній величині. Для кожного такого фіксованого значення d розв'язуємо задачу (3–8), (10–11) програмою OpenSolver. При збільшенні d значення величини $2\|x\|^2 - d$ буде спадати до нуля по абсолютній величині.

Крок 4. Якщо $2\|x\|^2 - d = 0$ з заданою точністю, то задача складання розкладу розв'язана. Інакше переходимо до кроку 3.

4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Побудувати розклад занять для однієї спеціальності по запропонованій моделі досить легко, використовуючи тільки пакет Excel та надбудову OpenSolver для цього пакету. На лист Excel в один рядок вводимо назви предметів та прізвища їх викладачів з пропуском двох стовпців між групами (курсами). По кожній групі спочатку вводяться лекції, потім лабораторні чи практичні заняття. В рядок нижче вводиться годинне навантаження на тиждень по кожному предмету. Нижче для кожної групи виділяємо 50 рядків, частина з яких буде заповнена одиницями при оптимізації даної моделі. Тож спочатку ці рядки заповнимо нулями.

Це вся інформація для розрахунку розкладу. Далі необхідно ввести формули для цільової функції та обмежень задачі. В перший стовпець між групами вводимо суму по рядкам кожної групи. Очевидно, що ця сума не повинна бути більше одиниці (група може бути присутня одночасно тільки на одному занятті). Нижче в цьому стовпці вводимо формули сум цього стовпця по кожному дню тижня. Ці значення не повинні бути менше 2-х і більше 4-х одиниць для чисельника та знаменника. Ці формули використовуємо також для введення формули цільової функції. Вона буде дорівнювати сумі квадратів значень, обчислених цими формулами. В другий стовпець між групами вводимо формули, що виключають вікна між заняттями в групі. В рядок нижче вхідних даних вносимо формули сум по стовпцям частини таблиці, що заповнена нулями (з понеділка по п'ятницю), вони повинні дорівнювати навантаженню в годинах по кожному предмету. Справа даної таблиці вносимо формули сум рядків по кожному викладачеві по всім групам. Кожна така сума не повинна бути більше одиниці (викладач одночасно може бути присутнім не більше ніж на одній парі). На кінець, в останній стовпець вводимо суми стовпців лабораторних робіт по всім групам. Сума чисел кожного рядка не повинна бути більше кількості комп'ютерних класів. Далі викликаємо діалогове вікно надбудови Solver куди вводимо адресу комірок цільової функції, комірок, що змінюються та адреси комірок з формулами для обмежень задачі. Можна також вказати, що змінні булеві. Але розв'язати цю задачу програмою Solver ми не зможемо, так як вона дозволяє розв'язувати задачі з кількістю змінних не більше 200. Тому викликаємо надбудову OpenSolver, яка може розв'язати цю задачу, але для цього може знадобіться більше однієї доби. Ми для розв'язування задачі складання розкладу будемо використовувати метод точної квадратичної регуляризації, для якого був розроблений приведений вище алгоритм з урахуванням специфіки даної задачі. Для цього необхідно добавити декілька формул, зокрема добавити комірку для неперервної змінної z, змінної d, ввести формули (10)–(11). Адреси комірок цих змінних та формул обмежень добавляємо в діалогове вікно програми Solver та видаляємо обмеження булевих змінних. Спочатку будемо розв'язувати задачу мінімізації змінної d. Це досить проста опукла задача, яку програма OpenSolver розв'язує за 1 хвилину. Після отримання мінімального значення d перевіряємо умову $2\|x\|^2 - d = 0$ (формулу для цього виразу теж необхідно занести в комірку). Звичайно буде виконуватися нерівність $2\|x\|^2 - d < 0$, тому в діалогове вікно програми Solver занесемо наступні зміни. Цільову комірку замінимо на комірку з формулою $\|x\|^2$, яку будемо максимізувати, а з адрес комірок, що змінюються, видалимо адресу комірки змінної d. Значення цієї комірки збільшимо та розв'яжемо задачу програмою OpenSolver.

Після розв'язування задачі побачимо, що значення $2\|x\|^2 - d$ зменшилось по абсолютній величині. Далі знову збільшимо значення d та розв'яжемо задачу. Після кожного розв'язування задачі значення $2\|x\|^2 - d$ буде наближатись до нуля по абсолютній величині. В залежності від кроку зміни величини d, потрібно буде 20–30 розв'язувань задачі до виконання умови $2\|x\|^2 - d = 0$ з заданою точністю. Виконання цієї умови означатиме, що знайдено оптимальний розклад занять і всі змінні будуть булеві та всі обмеження задачі будуть виконуватися.

DOI 10.15588/1607-3274-2021-3-15

Для демонстрації ефективності методу точної квадратичної регуляризації, для знаходження оптимального розкладу занять, ми виберемо дещо спрощений варіант розглянутої задачі. Складемо розклад тільки для двох груп, в кожній групі викладається шість різних предметів (шість лекцій та шість лабораторних робіт). Кількість викладачів дорівнює шести. Заняття проводяться без чисельника та знаменника (це дозволяє скоротити кількість рядків таблиці з 50 до 25). Така задача буде мати 600 булевих змінних, що також є складним для існуючих методів оптимізації. Вхідні дані задачі приведені в табл. 1. для першої групи, вони співпадають з даними для другої групи.

Спочатку задача розв'язувалась без обмежень на відсутність вікон і було отримано розклад, де майже кожен день були вікна. Далі були задані обмеження на відсутність вікон. При відсутності обмеження на кількість комп'ютерних класів було отримано наступний розв'язок (табл. 2).

Якщо викладач в деякі дні або часи зайнятий на другій роботі, то достатньо присвоїти відповідним змінним даного викладача на даній парі значення нуль. Як показали експерименти при такій умові графік роботи всіх викладачів може суттєво змінюватись.

Якщо припустити, що ці дві групи мають тільки один комп'ютерний клас для проведення лабораторних робіт то розподіл занять по дням тижня де що змінюється (табл. 3). Значення цільової функції при цьому збільшилось на дві одиниці.

Час розв'язування даної задачі на комп'ютері Intel(R) Core(TM) 15–8300H CPU 2.30 GHz склав до 5 хвилин часу. Метод EQR не сильно чутливий до зростання розмірності задачі. Ступінь зростання часу розв'язування задачі буде визначатись прямодвоїстим методом внутрішньої точки. Як відомо, останній метод є поліноміальним. Тому даний алгоритм можна використовувати для розв'язування задач складання розкладу великої розмірності.

Наведемо отриманий запропонованим алгоритмом оптимальний розклад для даної задачі (табл. 4). В цій таблиці одиницями позначені заняття, що проводяться. З цієї таблиці бачимо, що вікна в розкладі занять для студентів кожної групи відсутні. Кількість пар занять для першої групи по дням тижня відповідно дорівнює 2, 3, 4, 4, 3, а для другої групи маємо 4, 3, 3, 3, 3. Коли розв'язувалась задача без обмеження на кількість комп'ютерних класів, то відповідні дані дорівнювали теоретично мінімальній дисперсії (3, 3 , 4, 3, 3) та (3, 3, 3, 3, 4). Додаткові обмеження незначно зменшили значення дисперсії. З табл. 4 видно, що викладачі мають вікна в своїх заняттях. Це тому, що відповідні обмеження в моделі не враховувалися. Внесення таких обмежень призведе до зменшення цільової функції задачі і відповідно зменшить якість навчання. Автори спочатку розглядали в якості критерію задачі максимум дисперсії занять викладачів, але такий критерій не відповідає високій якості навчання студентів.

5 РЕЗУЛЬТАТИ

Результати розв'язування задачі складання розкладу запропонованим алгоритмом наведені в табл. 4. Отриманий розв'язок задовольняє всім обмеженням задачі та містить рівномірне навантаження занять на кожний день тижня. Задача розв'язувалась в добре відомому офісному пакеті Excel 10 з використанням її надбудови OpenSolver. Процедура розв'язування елементарна та не потребує спеціальних знань. В той же час сучасні методи оптимізації стикаються зі значними обчислювальними проблемами при розв'язуванні задач оптимального складання розкладу навчань.

6 ОБГОВОРЕННЯ

Задачі складання розкладу навчань виникають по декілька разів на рік в кожному університеті. Кожен університет має свою специфіку, яка закладається у відповідну модель. На жаль не існує стандартних моделей на яких можна було б порівнювати різні алгоритми розв'язку. В деякій мірі стандартною можна вважати запропоновану модель, так як вона містить тільки природні обмеження та цільову функцію, яка забезпечує якість навчання. Щодо існуючих методів розв'язування задач оптимізації з булевими змінними, то пропонуються переважно тільки методи розгалужень та границь і еволюційні алгоритми, що використовують випадковий пошук. Ці методи потребують занадто багато часу навіть при розв'язуванні задач невеликої розмірності. Зі зростанням розмірності задачі час розв'язування експоненційно зростає. Тому при розв'язуванні практичних задач складання розкладу ці методи будуть вимагати декілька днів чи тижнів неперервної роботи комп'ютера, або завершувати роботу раніше з отриманням розв'язку далекого від оптимального та часто недопустимого. На даний час використання методу EQR та запропонованого алгоритму для складання розкладу не має альтернатив. Це підтверджується також значним обсягом порівняльних обчислювальних експериментів для тестових мультимодальних задач [11]. Крім того, даний метод легко реалізується в пакеті Excel за допомогою надбудови OpenSolver практично для довільної розмірності.

Для підтвердження ефективності запропонованого алгоритму були проведені обчислювальні експерименти. Враховуючи те, що запропонована модель складання розкладу є новою, порівнювались результати розв'язування даної моделі розробленим алгоритмом та існуючими програмами. Для обчислювального експерименту була скорочена матриця невідомих булевих змінних розглянутого прикладу до розміру 15×8. В якості альтернативи розробленому алгоритму використовувалось існуюче програмне забезпечення, це надбудови Solver та OpenSolver пакету Excel 10 в яких реалізовані алгоритми еволюційні та з булевими змінними. Спочатку розв'язувалась задача (1)–(8) з булевими змінними програмами Solver та OpenSolver в яких реалізовані алгоритми методу розгалужень та границь. Кожна з цих програм протягом 5 годин не змогла завершити роботу. Зауважимо, що

DOI 10.15588/1607-3274-2021-3-15

якщо відкинути умову булевості змінних, то дана задача буде розв’язана за долі секунди.

Далі для даного прикладу розв’язувалась задача (1)–(9) еволюційним пошуком. Але для цього прикладу даний пошук не зміг знайти допустимий розв’язок задачі. В той же час, для розв’язування задачі (3)–(8), (10)–(11) запропонованим алгоритмом потребувалось менше однієї хвилини машинного часу. Таким чином, запропонований алгоритм для даного класу задач, як мінімум в 300 разів ефективніше існуючих алгоритмів, причому зі зростанням розмірності задачі ця ефективність також буде зростати.

Таблиця 1 – Дані для складання розкладу

Заняття	Лекції						Лабораторні роботи					
Викладачі	В1	В2	В3	В4	В5	В1	В6	В2	В3	В4	В6	В6
Предмети	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П1	П2	П3	П4	П5	П6
Години	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1

Таблиця 2 – Розподіл занять по дням тижня

	Понеділок					Вівторок					Середа					Четвер					П’ятниця				
Гр.1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
Гр.2	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0

Таблиця 3 – Розподіл занять по дням тижня (з урахування комп’ютерних класів)

	Понеділок					Вівторок					Середа					Четвер					П’ятниця				
Гр.1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
Гр.2	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0

Таблиця 4 – Оптимальний розклад

	Група 1												**Група 2**											
В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**6**	**2**	**3**	**4**	**6**	**6**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**6**	**2**	**3**	**4**	**6**	**6**
Г	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**	**2**	**2**	**1**
	Лекції						***Лабораторні***						***Лекції***						***Лабораторні***					
П																								**1**
																							1	
											1						**1**							
							1						**1**											
В									**1**															
			1																					
										1				**1**										
															1									
																					1			
С																								
					1														**1**					
						1																**1**		
	1																			**1**				
								1																
Ч																								
							1																	
		1																				**1**		
											1							**1**						
				1																**1**				
П																							**1**	
																			1					
								1								**1**								
										1		**1**												
												1												

DOI 10.15588/1607-3274-2021-3-15

ВИСНОВКИ

В роботі вирішено актуальну науково-технічну проблему знаходження оптимального розкладу навчання в університетах.

Розглянута задача складання розкладу для студентів однієї спеціальності. Побудована нова оптимізаційна модель цієї задачі, що містить нову цільову функцію та обмеження на відсутність вікон в заняттях студентів. Цю модель легко узагальнити для факультету чи всього університету. При необхідності обмеження задачі можна доповнити.

Наукова новизна роботи полягає в тому, що вперше за 70 років досліджень складання розкладів пропонується простий та ефективний алгоритм знаходження оптимального розкладу. Існуючі моделі та методи або досить складні і не дозволяють отримати оптимальні розв'язки існуючими методами, або використовують евристичні алгоритми, що знаходять розв'язки часто далекі від оптимальних.

Практична цінність роботи полягає в тому, що ми вже сьогодні можемо впроваджувати дану модель та алгоритм в диспетчерські відділи кожного університету.

Майбутні напрями дослідження та розробки пов'язані з дачею практичних рекомендацій диспетчерським відділам по використанню запропонованої моделі та алгоритму. Ми також продовжуємо обчислювальні експерименти для нової моделі складання розкладів, а також для її узагальнень. Актуальною залишається проблема обчислювальних експериментів для складання розкладу факультету чи всього університету.

ПОДЯКА

Автори даної статті щиро вдячні співробітникам відділу диспетчеризації УДХТУ за змістовну постановку задачі складання розкладу навчання в університеті.

ЛІТЕРАТУРА / ЛИТЕРАТУРА

1. de Werra D. An introduction to timetabling / D. de Werra // European Journal of Operational Research. – 1985. – 19. – P. 151–162.
2. Kosolap A. A new method for global optimization / A. Kosolap // ESAIM: Proceedings and surveys. – 2021. – Vol. 71. – P. 121–130.
3. Junginger W., Timetabling in Germany – a survey [Электронный ресурс] // In Interfaces. – 1986. – Vol. 16, No. 4. – P. 66–74. https://pubsonline.informs.org. /doi/abs/10.1287/inte.16.4.66.
4. Shraerf A. A survey of automated timetabling // Journal Artificial Intelligence Review. – 1999. – Volume 13, Issue 2. – P. 1–42. DOI:10.1023/A:1006576209967.
5. Practices in timetabling in higher education institutions: a systematic review / [R. A. Oude Vrielink, E. A. Jansen, E. W. Hans, J. van Hillegersberg] // Ann. Oper. Res. – 2019. – 275. – P. 145–160.
6. Aziz N.L.A. A brief review on the features of university course timetabling problem / N.L.A. Aziz, N.A.H. Aizam // AIP Conference Proceedings, Volume 2016, Issue 1. – P. 1–8. DOI.org/10.1063/1.5055403.
7. Qu R. A survey of search methodologies and automated system development for examination timetabling / R. Qu, E.K. Burke // Journal of scheduling. – 2009. – Volume 12, Number 1. – P. 55–89.
8. An overview of curriculum-based course timetabling / [A. Bettinelli, V. Cacchiani, R. Roberti, P. Toth] // TOP. – 2015. – No 23. – P. 313–349. DOI: 10.1007/s11750-015-0366-z.
9. Alghamdi H. A Review of Optimization Algorithms for University Timetable Scheduling Engineering / H. Alghamdi, T. Alsubait, H. Alhakami, A. Baz // Technology & Applied Science Research. – 2020. – Vol. 10, No. 6. – P. 6410–6417.
10. Nocedal J. Numerical optimization / J. Nocedal, S. J. Wright. – Springer, 2006. – 685 p.
11. Kosolap A. Practical Global optimization / A. Kosolap. – Dnipro : Publisher Bila K.O., 2020. – 192 p.

Стаття надійшла до редакції 25.06.2021.
Після доробки 16.08.2021.

УДК 519.85

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПИСАНИЯ ОБУЧЕНИЯ В УНИВЕРСИТЕТЕ

Косолап А. І. – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрою специализированных компьютерных систем Украинского государственного химико-технологического университета, Днепр, Украина.

Дубовик Т.М. – старший преподаватель кафедры специализированных компьютерных систем Украинского государственного химико-технологического университета, Днепр, Украина.

АННОТАЦИЯ

Актуальность. В этой работе рассматривается известная задача составления расписания обучения в университете. Такие задачи решаются несколько раз в год в каждом учебном заведении. Несмотря на многочисленные исследования в данной области, проблема построения оптимального расписания остается открытой. Это связано со сложностью соответствующей оптимизационной задачи, в частности ее значительной размерностью, что затрудняет численное решение такой задачи существующими методами оптимизации. В совершенствовании нуждаются также оптимизационные модели составления расписаний. Таким образом, оптимизация расписания является сложной вычислительной проблемой и требует разработки новых методов ее решения.

Цель работы. Совершенствование оптимизационных моделей составления расписаний обучения в университете и использования новых эффективных методов для их решения.

Метод. Мы используем метод точной квадратичной регуляризации для решения оптимизационных задач составления университетского расписания. Точная квадратичная регуляризация позволяет преобразовать сложные оптимизационные модели с булевыми переменными к задаче максимума нормы вектора на выпуклой множестве. Для решения этой задачи мы используем эффективный прямо-двойственный метод внутренней точки и метод дихотомии. Этот метод показал значительно лучшие результаты при решении многих сложных мультимодальных задач. Это подтверждается многими сравнительны-

DOI 10.15588/1607-3274-2021-3-15

ми вычислительными экспериментами. Еще большую эффективность метод точной квадратичной регуляризации демонстрирует при решении задач составления расписания обучения. Этот метод оптимизации используется впервые, для данного класса задач, поэтому он потребовал разработки соответствующего алгоритмического обеспечення.

Результаты. Построена новая более простая оптимизационная модель составления расписания, которая легко реализуется программно в пакете Excel при наличии надстроек OpenSolver, RiskSolver и других. Приведен небольшой пример построения расписания и описана пошагово инструкция получения оптимального решения.

Выводы. Разработана новая эффективная технология составления расписания обучения в университете, которая отличается простотой реализации и не требует разработки специального программного обеспечения. Эффективность обеспечивается использованием нового метода точной квадратичной регуляризации.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: университетское расписание, оптимизация, задачи по булевыми переменными, метод точной квадратичной регуляризации.

UDC 519.85

OPTIMIZATION OF TIMETABLE AT THE UNIVERSITY

Kosolap A. I. – Dr. Sc., Professor, head of the Department of Specialized Computer Systems of the Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnipro, Ukraine.

Dubovik T. M. – Senior Lecturer of the Department of Specialized Computer Systems of the Ukrainian State Chemical-Technological University, Dnipro, Ukraine.

ABSTRACT

Context. In this paper, we consider a well-known university scheduling problem. Such tasks are solved several times a year in every educational institution. The problem of constructing an optimal schedule remains open despite numerous studies in this area. This is due to the complexity of the corresponding optimization problem, in particular, its significant dimension. This complicates its numerical solution with existing optimization methods. Scheduling models also need improvement. Thus, schedule optimization is a complex computational problem and requires the development of new methods for solving it.

Objective. Improvement of optimization models for timetabling at the university and the use of new effective methods to solve them.

Method. We use the exact quadratic regularization method to solve timetabling optimization problems. Exact quadratic regularization allows transforming complex optimization models with Boolean variables into the problem of maximizing the vector norm on a convex set. We use the efficient direct dual interior point method and dichotomy method to solve this problem. This method has shown significantly better results in solving many complex multimodal problems. This is confirmed by many comparative computational experiments. The exact quadratic regularization method is even more effective in solving timetabling problems. This optimization method is used for the first time for this class of problems, so it required the development of adequate algorithmic support.

Results. We propose a new, simpler timetabling optimization model that can be easily implemented software in Excel with the OpenSolver, RoskSolver, and others. We give a small example of building a schedule and describe step-by-step instructions for obtaining the optimal solution.

Conclusions. An efficient new technology developed for university timetable, which is simple to implement and does not require the development of special software. The efficiency of the technology is ensured by the use of a new method of exact quadratic regularization.

KEYWORDS: university timetabling, optimization, problems with boolean variables, exact quadratic regularization method.

REFERENCES

1. de Werra, D. An introduction to timetabling, *European Journal of Operational Research*, 1985, 19, pp. 151 – 162.
2. Kosolap A. A new method for global optimization, *ESAIM: Proceedings and surveys*, 2021, Vol. 71. pp. 121–130.
3. Junginger W. Timetabling in Germany – a survey [Электронный ресурс], *In Interfaces,* 1986, Vol. 16, No. 4, pp. 66–74. https://pubsonline.informs.org.
4. Shraerf A. A survey of automated timetabling, *Journal Artificial Intelligence Review,* 1999, Volume 13, Issue 2, pp. 1–8.
5. Oude Vrielink R. A., Jansen E. A., Hans E. W., van Hillegersberg J. Practices in timetabling in higher education institutions: a systematic review. *Ann. Oper. Res*., 2019, 275, pp. 145–160.
6. Aziz N. L. A., Aizam N. A. H. A brief review on the features of university course timetabling problem. *AIP Conference Proceedings*, Volume 2016, Issue 1, pp. 1–8.
7. Qu R., Burke E.K. A survey of search methodologies and automated system development for examination timetabling. *Journal of scheduling*, 2009, Volume 12, Number 1, pp. 55–89.
8. Bettinelli A., Cacchiani V., Roberti R., Toth P. An overview of curriculum-based course timetabling, *TOP*, 2015, No 23, pp. 313–349. DOI: 10.1007/s11750-015-0366-z.
9. Hayat Alghamdi, Tahani Alsubait, Hosam Alhakami, Abdullah Baz A Review of Optimization Algorithms for University Timetable Scheduling Engineering, *Technology & Applied Science Research,* 2020, Vol. 10, No. 6, pp. 6410–6417.
10. Nocedal J., Wright S. J. Numerical optimization. Springer, 2006. 685 p.
11. Kosolap A. Practical Global optimization. Dnipro, Publisher Bila K. O., 2020, 192 p.

DOI 10.15588/1607-3274-2021-3-15