

## РАДИОФИЗИКА

## РАДИОФИЗИКА

## RADIOPHYSICS

УДК 517.9 : 537.86

Онуфриенко Л. М.<sup>1</sup>, Чумаченко Я. В.<sup>2</sup>, Чумаченко В. П.<sup>3</sup><sup>1</sup>Канд. физ.-мат. наук, доцент, Запорожский национальный технический университет, Украина<sup>2</sup>Канд. техн. наук, доцент, Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа, Украина<sup>3</sup>Д-р физ.-мат. наук, профессор, Запорожский национальный технический университет, Украина,  
E-mail: chumac@zntu.edu.uaК ТЕОРИИ  $E$ -ПЛОСКОСТНОГО ВОЛНОВОДНОГО  
ТРАНСФОРМАТОРА С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ  $N$ -ГО ПОРЯДКА

Рассмотрена задача рассеяния волн в осесимметричном  $E$ -плоскостном соединении  $N$  одинаковых прямоугольных волноводов. Дано строгое обоснование предложенной ранее математической модели узла, которая учитывает свойства его геометрии и использует тригонометрические разложения искомого поля, полученные с помощью метода произведения областей. Для  $3 \leq N \leq 6$  показано, что для почти всех значений частотного параметра каждая из  $N$  бесконечных систем линейных уравнений, к которым приводит развитый подход, разрешима единственным образом в пространстве последовательностей  $l_1$ . Доказано, что эти решения могут быть найдены методом редукции, сходящимся по норме названного пространства.

**Ключевые слова:** волноводные неоднородности, метод произведения областей, матрично-операторные уравнения.

## ВВЕДЕНИЕ

Аналізу  $E$ -плоскостних структур різними методами присвячені роботи більшого числа авторів (см., наприклад, [1]–[4] і їх бібліографію). Однією з цілей подібних досліджень є побудова адекватних і строго обґрунтованих математических моделей, які забезпечували б точний і достовірний розрахунок характеристик волноводних вузлів при вивченні їх властивостей або при використанні цих об'єктів в якості автономних блоків в системах автоматизованого проектування пристроїв СВЧ і КВЧ.

В роботі [4] була запропонована електродинамічна модель з'єднання  $N$  однакових волноводів (розміра  $a \times b$ ), яке має вращательну симетрію  $N$ -го порядку відносно осі  $O_z$ , перпендикулярної площини з'єднання (см. рис. 1). Відмінною особливістю моделі є спосіб побудови шуканої компоненти магнітного поля  $H_z$  всередині з'єднаної порожнини  $\Omega$ , оснований на методі вироблення областей [5]. Використовуючи тригонометричні ряди, можна уникнути появи спеціальних функцій і отримати можливість виконати аналітично всі математическі операції, необхідні для розв'язання нескінченних систем лі-

нейних рівнянь (БСЛУ), яким задовольняють коефіцієнти розкладень. Чисельний алгоритм було перевірено на тестових завданнях і показало свою ефективність як при  $3 \leq N \leq 6$ , так і при більшому числі з'єднуваних волноводів. Однак формальне його обґрунтування не було надано. Наразі робота заповнює цей проміжок для  $3 \leq N \leq 6$ . Подібно [6] і [7] виникаючі БСЛУ розглядаються в якості операторних рівнянь в простран-

стві послідовностей  $l_1 = \left\{ \mathbf{s} = \{s_n\} : \sum_{n=0}^{\infty} |s_n| < +\infty \right\}$ .

Вибране множинство значень  $N$  охоплює практично всі пристрої, які зустрічаються в прикладних і мають зазначену геометрію.

Стаття організована наступним чином. В першому розділі конспективно (слідуючи [4]) викладено висновок БСЛУ, до якого зводиться гранична задача, а також розглядається питання єдиності їх розв'язків. В наступних розділах вивчаються властивості матричних систем, встановлюється розв'язність відповідних операторних рівнянь, аналізується можливість використання методу редукції. В висновку сформульовано основні результати роботи.

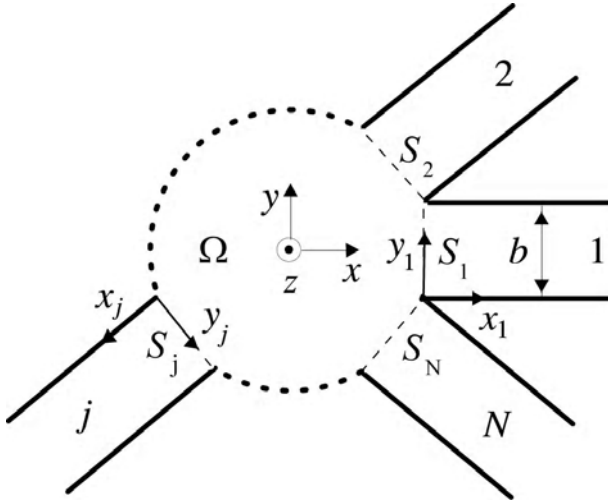


Рис. 1. Геометрия задачи

### СВЕДЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ К БСЛУ. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Требуется найти поле рассеянное конфигурацией при ее возбуждении со стороны первого плеча волной  $TE_{10}$  единичной амплитуды. Известно (см., например [1]), что после исключения временного множителя  $e^{i\omega t}$  и зависимости от  $z$  задача такого типа сводится к нахождению некоторой функции  $u(x, y)$ , которая должна удовлетворять двумерному уравнению Гельмгольца, однородным граничным условиям Неймана на контуре узла, условиям сопряжения в апертурах  $S_j$  ( $j = \overline{1, N}$ ) соединительной полости, условиям излучения в волноводах и условию конечности энергии, запасенной в любой ограниченной подобласти. Аналогичная граничная задача возникает и при анализе структур, имеющих другой физический смысл (например, соединений полосковых линий передачи [8] или акустических волноводов [9]). Существует единственное ее решение для всех значений частоты  $\omega > 0$  за исключением некоторого счетного множества точек [10]. Ниже предполагается, что  $\omega$  не является элементом этого множества (в частности, не совпадает ни с одной из частот отсечки собственных волн волноводов).

Представим вектор  $I = (\underbrace{1, 0, \dots, 0}_N)^T$  ( $T$ -транспонирование) амплитуд волн основного типа, падающих на соединение со всех возможных направлений, суммой  $N$  векторов, каждый из которых описывает возбуждающее поле, обладающее некоторым типом осевой симметрии:

$$I = \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{e_{jk}}{N} \right\}_{j=1}^{j=N}, \quad e_{jk} = e^{i(j-1)\beta_k},$$

$$\beta_k = (k-1) \frac{2\pi}{N}, \quad i^2 = -1. \quad (1)$$

В силу линейности уравнения Гельмгольца функцию  $u$  можно записать в виде суперпозиции

$$u = \sum_{k=1}^N u^{(k)} \quad (2)$$

его решений  $u^{(k)}$ , отвечающих отдельным слагаемым в (1). Основываясь на свойствах симметричных соединений [11] и используя косинус-разложение решения уравнения Гельмгольца в выпукло многоугольной области [5], величины  $u^{(k)}$  можно представить в виде

$$u_j^{(k)} = e_{jk} \left[ \frac{1}{N} e^{\gamma_0 x_j} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)} \varphi_n(y_j) e^{-\gamma_n x_j} \right], \quad j = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$u_C^{(k)} = \sum_{j=1}^N (j) u_C^{(k)}, \quad (j) u_C^{(k)} = e_{jk} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \varphi_n(y_j) e^{\gamma_n x_j}. \quad (4)$$

Здесь  $u_j^{(k)} \equiv u^{(k)}$  при  $x_j > 0$  и  $0 < y_j < b$ ,  $u_C^{(k)} \equiv u^{(k)}$  при  $(x, y) \in \Omega$ ,  $\varphi_n(y_j) = \cos \frac{n\pi y_j}{b}$ ,  $\gamma_n = \sqrt{(n\pi/b)^2 - \chi^2}$ ,

$\chi = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - (\pi/a)^2}$ ,  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные,  $A_n^{(k)}$  и  $B_n^{(k)}$  – искомые коэффициенты разложения. Представления (3) обеспечивают выполнение граничных условий на стенках волноводов и условий излучения. Можно показать, что система функций  $\left\{ \varphi_n(y_j) e^{\gamma_n x_j} \right\}_{j=1, n=0}^{j=N, n=\infty}$ , по которым разлагается  $u_C^{(k)}$ , линейно независима за исключением некоторого счетного множества точек значений  $\omega$ . Такие точки также исключаются из рассмотрения.

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих полей в апертурах соединительной полости следует

$$u_1^{(k)} \Big|_{x_1=0+} = u_C^{(k)} \Big|_{x_1=0-}, \quad \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0+} = \frac{\partial u_C^{(k)}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0-},$$

$$y_1 \in (0, b). \quad (5)$$

Так как углы при ребрах конфигурации меньше  $2\pi$ , то из требования конечности энергии, запасенной в ограниченной подобласти, вытекает (см., например, [12]), что нормальные производные, входящие в (5), могут иметь на интервале  $y_1 \in (0, b)$  лишь квадратично интегрируемые особенности. Использование условий (5) позволяет свести (см. [4]) задачи нахождения  $u^{(k)}$  ( $k = \overline{1, N}$ ) к решению  $N$  независимых парных БСЛУ

$$\frac{1}{N} \delta_{0m} + A_m^{(k)} = B_m^{(k)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}^{(k)} B_n^{(k)}, \quad m = \overline{0, \infty}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{N} \delta_{0m} - A_m^{(k)} = B_m^{(k)} + \sum_{n=0}^{\infty} d_{mn}^{(k)} B_n^{(k)}, \quad m = \overline{0, \infty}, \quad (7)$$

где

$$c_{mn}^{(k)} = \sum_{j=2}^N e_{jk} J_{mn}^{(j)}, \quad d_{mn}^{(k)} = \sum_{j=2}^N e_{jk} K_{mn}^{(j)}, \quad (8)$$

$$J_{mn}^{(j)} = \frac{2}{e_m b} \int_0^b \left[ \varphi_n(y_j) e^{\gamma_n x_j} \right]_{x_1=0} \varphi_m(y_1) dy_1, \quad (9)$$

$$K_{mn}^{(j)} = \frac{2}{e_m b \gamma_m} \int_0^b \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \varphi_n(y_j) e^{\gamma_n x_j} \right]_{x_1=0} \varphi_m(y_1) dy_1, \quad (10)$$

$e_m = 1 + \delta_{0m}$  и  $\delta_{0m}$  – символ Кронекера, причем

$$J_{mn}^{(N-l+2)} = (-1)^{m+n} J_{mn}^{(l)}, \quad K_{mn}^{(N-l+2)} = (-1)^{m+n} K_{mn}^{(l)} \quad (11)$$

при  $1 < l < N/2 + 1$ .

Вне соединительной полости условие конечности энергии в ограниченной области будет выполняться,

если вектор-столбец  $\mathbf{A}^{(k)} = \{A_n^{(k)}\}$  удовлетворяет условию  $\mathbf{A}^{(k)} \in \tilde{l}_2 = \left\{ \mathbf{s} = \{s_n\} : |s_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2 < +\infty \right\} [13]$ .

В соединительной полости мы усилим это требование, наложив его на каждую из функций  ${}^{(j)}u_C^{(k)}$  в отдельности, что приводит к  $\mathbf{B}^{(k)} = \{B_n^{(k)}\} \in \tilde{l}_2$ . Более того, мы предположим, что  $\mathbf{A}^{(k)}, \mathbf{B}^{(k)} \in l_1 \subset \tilde{l}_2$ . Существование соответствующих последовательностей  $\mathbf{A}^{(k)}, \mathbf{B}^{(k)}$  следует из устанавливаемой ниже разрешимости БСЛУ, порождаемых граничными условиями.

Матричное уравнение (6) образовано путем приравнивания коэффициентов разложения величин, входящих в левые и правые части первого из равенств (5), по функциям  $\{\varphi_n(y_1)\}_{n=0}^{\infty}$ . Если  $\mathbf{A}^{(k)}, \mathbf{B}^{(k)} \in l_1$  то разложения

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)} \varphi_n(y_1)$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \varphi_n(y_1)$  равномерно сходятся к

своим суммам, являясь их рядами Фурье. Аналогичный факт имеет место и для разложения по тем же функциям

величины  $\tilde{u}_C^{(k)} \equiv u_C^{(k)} - {}^{(1)}u_C^{(k)} = \sum_{j=2}^N {}^{(j)}u_C^{(k)}$  в силу ее абсолютной непрерывности на  $S_1$ . (При  $\mathbf{B}^{(k)} \in l_1$  условие

интегрируемости на  $S_1$  модуля производной  $\frac{\partial \tilde{u}_C^{(k)}}{\partial y_1}$  лег-

ко проверяется). Отсюда вытекает [14], что равенство Фурье-коэффициентов величин, входящих в первое граничное условие в (5), означает равенство самих этих величин всюду на  $S_1$ .

Таким образом, если БСЛУ (6),(7) имеет в  $l_1$  решение, то после его подстановки в (3), (4) условия на значения  $u^{(k)}$  будут выполняться в каждой точке апертуры  $S_1$ , а также  $S_2, \dots, S_N$ . Из (7) и полноты системы  $\{\varphi_n(y_1)\}_{n=0}^{\infty}$  в пространстве квадратично интегрируемых функций  $L_2(0, b)$  следует, что почти всюду на  $S_1$  и других апертурах будут выполняться также и условия, накладываемые на нормальную производную функции  $u^{(k)}$ . Тем самым формулами (3), (4) задается величина, удовлетворяющая как уравнению Гельмгольца, так и всем требуемым условиям на границе. Ясно, что такая БСЛУ может иметь в  $l_1$  не более одного решения, так как противоположное предположение противоречит теореме единственности решения исходной краевой задачи.

Далее вместо системы (6),(7) мы будем изучать эквивалентную систему, состоящую из матричного уравнения

$$B_m^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (c_{nm}^{(k)} + d_{nm}^{(k)}) B_n^{(k)} = \frac{1}{N} \delta_{0m}, \quad m = \overline{0, \infty}, \quad (12)$$

полученного из (6), (7) после исключения  $\{A_n^{(k)}\}$ , и пересчетной формулы для определения коэффициентов  $\{A_n^{(k)}\}$  по известным  $\{B_n^{(k)}\}$ , которую мы не выписываем.

### СВОЙСТВА МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ. РАЗРЕШИМОСТЬ БСЛУ

Будем рассматривать матрицы  $\mathbf{J}^{(j)} = (J_{mn}^{(j)})$ ,  $\mathbf{K}^{(j)} = (K_{mn}^{(j)})$  в качестве операторов в пространстве последовательностей  $l_1$ . Ниже  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{l_1}$ , а норма некоторого матричного оператора  $\mathbf{A} = (a_{mn}) : l_1 \rightarrow l_1$  определяется

формулой  $\|\mathbf{A}\| = \sup \sum_{0 \leq n < \infty} |a_{mn}|$  (см. [15], [16]). Извест-

но [16], что для того, чтобы оператор  $\mathbf{A}$  был  $\omega$ -непрерывным (частный случай полной непрерывности), необходимо и достаточно, чтобы  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{k \leq n < \infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{mn}| = 0$ .

При  $2 < j < N$  таковыми являются матрицы  $\mathbf{J}^{(j)}$  и  $\mathbf{K}^{(j)}$ , элементы которых содержат множители, которые убывают экспоненциально с ростом  $n$  и ведут себя как

$O\left(\frac{1}{m^2}\right)$  с ростом  $m$ .

Перепишем (12) в виде

$$(\mathbf{I} + \mathbf{T}^{(k)} + \mathbf{F}^{(k)}) \mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{H}, \quad (13)$$

где (см. (8))

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{N-1} e_{jk} (\mathbf{J}^{(j)} + \mathbf{K}^{(j)}) & \text{при } N > 3, \\ \mathbf{0} & \text{при } N = 3, \end{cases} \quad (14)$$

$$\mathbf{F}^{(k)} = \frac{1}{2} \left[ e_{2k} (\mathbf{J}^{(2)} + \mathbf{K}^{(2)}) + e_{Nk} (\mathbf{J}^{(N)} + \mathbf{K}^{(N)}) \right], \quad (15)$$

$$\mathbf{H} = \left( \frac{1}{N} \delta_{0m} \right), \quad (16)$$

а  $\mathbf{I}$  – тождественный оператор (бесконечная единичная матрица). Оператор  $\mathbf{T}^{(k)}$ , как линейная комбинация вполне непрерывных операторов, также вполне непрерывен.

Рассмотрим более детально оператор  $\mathbf{F}^{(k)}$ . Введем обозначения

$$\Gamma_n = \gamma_n \sin \beta, \quad {}^0\Gamma_n = \frac{n\pi}{b} \sin \beta, \quad \Pi_n = \frac{n\pi}{b} \cos \beta, \quad (17)$$

$$\Lambda_n = \Pi_n b, \quad \Phi_{mn}^{\pm} = \Gamma_n^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \pm \Pi_n \right)^2, \quad (18)$$

$${}^0\Phi_{mn}^{\pm} = \begin{cases} \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \pm \frac{2mn\pi^2}{b^2} \cos \beta & \text{при } mn > 0, \\ \infty & \text{при } mn = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\Psi_{mn}^{\pm} = \frac{1}{\Phi_{mn}^+} \pm \frac{1}{\Phi_{mn}^-}, \quad {}^0\Psi_{mn}^{\pm} = \frac{1}{{}^0\Phi_{mn}^+} \pm \frac{1}{{}^0\Phi_{mn}^-}, \quad (20)$$

где  $\beta = \frac{N-2}{N} \pi$  – угол при вершине правильного  $N$ -угольника, образующего  $\partial\Omega$ . Учитывая, что

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta - b \sin \beta, \\ y_2 &= -x_1 \sin \beta - y_1 \cos \beta + b \cos \beta, \end{aligned} \quad (21)$$

а также известные [17] формулы интегрирования, для значений  $J_{mn}^{(2)}$  и  $K_{mn}^{(2)}$  получим

$$J_{mn}^{(2)} = \frac{1}{e_m b} \left\{ \left[ (-1)^m \Gamma_n - (\Gamma_n \cos \Lambda_n - \Pi_n \sin \Lambda_n) e^{-\Gamma_n b} \right] \Psi_{mn}^+ + \frac{m\pi}{b} \sin \Lambda_n e^{-\Gamma_n b} \Psi_{mn}^- \right\}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} K_{mn}^{(2)} &= \frac{1}{e_n \gamma_m b} \left\{ (-1)^m \left[ \chi^2 \sin \beta \cos \beta \Psi_{mn}^+ + {}^0\Gamma_n \frac{m\pi}{b} \Psi_{mn}^- \right] + \right. \\ &+ \left[ \gamma_n \cos \beta (\Gamma_n \cos \Lambda_n - \Pi_n \sin \Lambda_n) - {}^0\Gamma_n (\Gamma_n \sin \Lambda_n + \Pi_n \cos \Lambda_n) \right] e^{-\Gamma_n b} \Psi_{mn}^+ + \\ &+ \left. \frac{m\pi}{b} \left[ {}^0\Gamma_n \cos \Lambda_n - \gamma_n \cos \beta \sin \Lambda_n \right] e^{-\Gamma_n b} \Psi_{mn}^- \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Далее, так как

$$e_{2k} = \cos \beta_k + i \sin \beta_k, \quad e_{Nk} = \cos \beta_k - i \sin \beta_k, \quad (24)$$

то в силу (11) и (15) имеем

$$F_{mn}^{(k)} = M_{mn} U_{mn}^{(k)}, \quad (25)$$

где

$$M_{mn} = J_{mn}^{(2)} + K_{mn}^{(2)}, \quad U_{mn}^{(k)} = \begin{cases} \cos \beta_k & \text{при } m+n \text{ четном,} \\ i \sin \beta_k & \text{при } m+n \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (26)$$

Представим  $\mathbf{F}^{(k)}$  в виде

$$\mathbf{F}^{(k)} = {}^1\mathbf{F}^{(k)} + {}^*\mathbf{F}^{(k)} \equiv \left( M_{mn} - {}^0M_{mn} \right) U_{mn}^{(k)} + \left( {}^0M_{mn} U_{mn}^{(k)} \right), \quad (27)$$

где

$${}^0M_{mn} = \frac{2(-1)^m}{b} {}^0\Phi_{mn}^+. \quad (28)$$

Несложно установить, что оператор  $\mathbf{M} - {}^0\mathbf{M}$  является  $\omega$ -непрерывным. Тем более  $\omega$ -непрерывным будет оператор  ${}^1\mathbf{F}^{(k)}$ , порождаемый матрицей  $\left( M_{mn} - {}^0M_{mn} \right) U_{mn}^{(k)}$ .

Рассмотрим далее оператор  ${}^*\mathbf{F}^{(k)}$ . Найдем предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} |{}^0M_{mn} U_{mn}^{(k)}|$ . Предположим вначале, что  $n = 2n'$ .

Мы получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} |{}^0M_{mn} U_{mn}^{(k)}| &= |\cos \beta_k| \lim_{n' \rightarrow \infty} \sum_{m'=1}^{\infty} |{}^0M_{2m', 2n'}| + \\ &+ |\sin \beta_k| \lim_{n' \rightarrow \infty} \sum_{m'=1}^{\infty} |{}^0M_{2m'-1, 2n'}|. \end{aligned} \quad (29)$$

Далее

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \sum_{m'=1}^{\infty} |{}^0M_{2m', 2n'}| = \frac{\sin \beta}{\pi} \lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{1}{n'} \sum_{m'=1}^{\infty} \frac{1}{\left( \frac{m'}{n'} \right)^2 + 2 \frac{m'}{n'} \cos \beta + 1}. \quad (30)$$

Предел (30) может быть заменен некоторым интегралом, значение которого известно [17], а именно,

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \sum_{m'=1}^{\infty} |{}^0 M_{2m', 2n'}| = \frac{\sin \beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dv}{v^2 + 2v \cos \beta + 1} = \frac{\beta}{\pi}. \quad (31)$$

Заметим, что монотонность подынтегральной функции, являющаяся одним из условий перехода от предела к интегралу, существенна лишь для больших значений переменной интегрирования (см. [18], решение задачи

30 из второго отдела). Предел  $\lim_{n' \rightarrow \infty} \sum_{m'=1}^{\infty} |{}^0 M_{2m'-1, 2n'}|$  так-

же равен  $\frac{\beta}{\pi}$ . Значит, при  $n = 2n'$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} |{}^0 M_{mn} B_{mn}^{(k)}| = \frac{\beta}{\pi} (|\cos \beta_k| + |\sin \beta_k|) \equiv \Delta^{(k)}. \quad (32)$$

Аналогичный результат получается и когда  $n \rightarrow \infty$ , пробегая нечетные значения. Прямая численная проверка показывает, что при  $3 \leq N \leq 6$  и любых возможных значениях  $k$  справедливо неравенство  $0 < \Delta^{(k)} < 1 - \delta$ , где  $\delta > 0$ .

Введем проекторы  $\mathbf{P}_n = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$  и

$\mathbf{R}_n = \mathbf{I} - \mathbf{P}_n$ . Ясно, что  $\mathbf{P}_n^2 = \mathbf{P}_n$  и  $\|\mathbf{P}_n\| = 1$ . Исходя из определения предела и (32), можно утверждать, что для

любого  $\varepsilon > 0$  существует конечное число  $N^{(k)}(\varepsilon)$  такое, что  $\sum_{m=0}^{\infty} |{}^0 M_{mn} B_{mn}^{(k)}| < \Delta^{(k)} + \varepsilon \forall n > N^{(k)}$ . Представим

${}^* \mathbf{F}^{(k)}$  в виде  ${}^* \mathbf{F}^{(k)} = {}^2 \mathbf{F}^{(k)} + {}^B \mathbf{F}^{(k)}$ , где  ${}^2 \mathbf{F}^{(k)} = {}^* \mathbf{F}^{(k)} \mathbf{P}_{N^{(k)}}$ , а  ${}^B \mathbf{F}^{(k)} = {}^* \mathbf{F}^{(k)} \mathbf{R}_{N^{(k)}}$ . Пусть  $\varepsilon < \delta$ . Тогда  $\|{}^B \mathbf{F}^{(k)}\| < 1$ , а оператор  ${}^2 \mathbf{F}^{(k)}$  является  $\omega$ -непрерывным в силу конечнос-

ти  $N^{(k)}$ . Таким образом уравнение (13) можно переписать в виде

$$\mathbf{W}^{(k)} \mathbf{B}^{(k)} \equiv (\mathbf{G}^{(k)} + {}^C \mathbf{F}^{(k)}) \mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{H}, \quad (33)$$

$$\mathbf{G}^{(k)} = \mathbf{I} + {}^B \mathbf{F}^{(k)}, \quad {}^C \mathbf{F}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)} + {}^1 \mathbf{F}^{(k)} + {}^2 \mathbf{F}^{(k)}, \quad (34)$$

где оператор  $\mathbf{G}^{(k)}$  непрерывно обратим, а  ${}^C \mathbf{F}^{(k)}$  вполне непрерывен. Это значит, что оператор  $\mathbf{W}^{(k)}$  фредгольмов и, так как  $\mathbf{H} \in l_1$ , то уравнение (33) в силу альтернативы Фредгольма [19] имеет в  $l_1$  единственное решение.

### РЕШЕНИЕ БСЛУ МЕТОДОМ РЕДУКЦИИ

Пусть  $n > N^{(k)}$ ,  $X_n = \mathbf{P}_n l_1$  – подпространства в  $l_1$ ,  $\mathbf{B}_n^{(k)} \in X_n$  и  ${}^B \mathbf{F}_n^{(k)} = \mathbf{P}_n {}^B \mathbf{F}^{(k)}$ . Ясно, что  $\mathbf{G}^{(k)} X_n \neq X_n$  и  $\mathbf{P}_n \mathbf{G}^{(k)} \mathbf{B}_n^{(k)} = (\mathbf{I} + {}^B \mathbf{F}_n^{(k)}) \mathbf{B}_n^{(k)} \equiv \mathbf{G}_n^{(k)} \mathbf{B}_n^{(k)}$ . Рассмотрим теперь наряду с точным уравнением (33) полученные из него усеченные уравнения

$$\mathbf{W}_n^{(k)} \mathbf{B}_n^{(k)} \equiv (\mathbf{G}_n^{(k)} + \mathbf{P}_n {}^C \mathbf{F}^{(k)}) \mathbf{B}_n^{(k)} = \mathbf{P}_n \mathbf{H}. \quad (35)$$

Поскольку  $\|{}^B \mathbf{F}_n^{(k)}\| \leq \|{}^B \mathbf{F}^{(k)}\| < 1$ , то операторы  $\mathbf{G}_n^{(k)} : X_n \rightarrow X_n$  непрерывно обратимы, а обратные операторы ограничены по норме в совокупности:

$$\|(\mathbf{G}_n^{(k)})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|{}^B \mathbf{F}_n^{(k)}\|} \leq \frac{1}{1 - \|{}^B \mathbf{F}^{(k)}\|}. \quad (36)$$

Полагая  $X = Y = l_1$  в условиях известной теоремы ([20], теорема 6.2) и принимая во внимание свойства операторов  $\mathbf{W}^{(k)}$ ,  $\mathbf{G}^{(k)}$ ,  ${}^C \mathbf{F}^{(k)}$ ,  $\mathbf{P}_n$  и  $\mathbf{G}_n^{(k)}$ , мы приходим к заключению, что для достаточно больших значений  $n$  системы (35) однозначно разрешимы и имеет место сходимость последовательности приближенных решений  ${}^* \mathbf{B}_n^{(k)} = (\mathbf{W}_n^{(k)})^{-1} \mathbf{P}_n \mathbf{H}$  к точному решению  ${}^* \mathbf{B}^{(k)} = (\mathbf{W}^{(k)})^{-1} \mathbf{H}$ :

$$\|{}^* \mathbf{B}^{(k)} - {}^* \mathbf{B}_n^{(k)}\| = O\left(\inf_{\mathbf{B}_n^{(k)} \in X_n} \|{}^* \mathbf{B}^{(k)} - \mathbf{B}_n^{(k)}\|\right) = O\left(\|\mathbf{R}_n {}^* \mathbf{B}^{(k)}\|\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (37)$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дано строгое математическое обоснование развитого ранее подхода к решению задачи рассеяния волн в осесимметричном соединении  $N$  волноводов в  $E$ -плоскости. Бесконечные системы линейных уравнений, к которым сводится исходная граничная задача, предложено рассматривать в качестве операторных уравнений в пространстве последовательностей  $l_1$ . Показано, что для почти всех значений частотного параметра  $\omega > 0$  эти

уравнения могут иметь не более одного решения. С целью анализа матричный оператор каждого из уравнений представлен в виде суммы тождественного оператора, оператора, описывающего взаимодействие апертур первого и прилегающих волноводов, а также вполне непрерывного оператора, описывающего взаимодействие апертур первого и остальных волноводов. Для  $3 \leq N \leq 6$  установлено, что второй из перечисленных операторов может быть разделен на две части, а имен-

но, оператор сжатия и вполне непрерывный оператор. Тем самым обоснованы фредгольмовость рассматриваемых уравнений и их разрешимость. Доказано, что решение каждой из БСЛУ может быть найдено методом редукции, сходящимся по норме пространства  $l_1$ .

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шестопалов, В. П. Резонансное рассеяние волн. Т. 2. Волноводные неоднородности / В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, Л. А. Рудь. – К. : Наукова думка, 1986. – 216 с.
2. Cullen, A. L. Using the least-squares boundary residual method to model the symmetrical five-port waveguide junction / A. L. Cullen, S. P. Yeo // IEE Proceedings on Microwaves, Antennas & Propagation. – 1987. – Vol. 134-H, No. 2. – P. 116–124.
3. Bialkowski, M. E. Analysis of an N-port consisting of a radial cavity and E-plane coupled rectangular waveguides / M. E. Bialkowski // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1992. – Vol. 40, No. 9. – P. 1840–1843.
4. Chumachenko, V. P. Simple full-wave model of E-plane waveguide star junction / V. P. Chumachenko // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 2002. – Vol. 16, No. 9. – P. 1223–1232.
5. Chumachenko, V. P. Efficient field representation for polygonal region / V. P. Chumachenko // Electronics Letters. – 2001. – Vol. 37, No. 19. – P. 1164–1165.
6. Чумаченко, Я. В. О бесконечных системах линейных уравнений, связанных с задачами рассеяния волн в плоскостных волноводных узлах с областью взаимодействия прямоугольной формы / Я. В. Чумаченко, В. П. Чумаченко // Радиоелектроніка, інформатика, управління. – 2012. – № 2. – С. 20–25.
7. Chumachenko, V. P. Properties of some matrix operators appearing in the theory of planar waveguide junctions / V. P. Chumachenko // Telecommunications and Radio Engineering. – 2013. – Vol. 72, No. 6. – P. 469–484.
8. Kompa, G. Planar waveguide model for calculating microstrip components / G. Kompa, R. Mehran // Electronics Letters. – 1975. – Vol. 11, No. 19. – P. 459–460.
9. Грінченко, В. Т. Основы акустики / В. Т. Грінченко, І. В. Вовк, В. Т. Маципура. – К. : Наукова думка, 2007. – 640 с.
10. Шестопалов, В. П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур / В. П. Шестопалов. – К. : Наукова думка, 1987. – 288 с.
11. Montgomery, C. G. Principles of Microwave Circuits / C. G. Montgomery, R. H. Dicke, E. M. Purcell. – New York : McGraw-Hill, 1948. – 486 p.
12. Мумтра, Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли. – М. : Мир, 1974. – 328 с.
13. Шестопалов, В. П. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции / В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов. – К. : Наукова думка, 1984. – 296 с.
14. Бари, Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : Физматгиз, 1961. – 936 с.
15. Хатсон, В. Приложения функционального анализа и теории операторов / В. Хатсон, Дж. Пим. – М. : Мир, 1983. – 432 с.
16. Грибанов, Ю. И. Координатные пространства и бесконечные системы линейных уравнений. III / Ю. И. Грибанов // Изв. вузов. Математика. – 1963. – №3 (34). – С. 27–39.
17. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.
18. Поля, Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч.1 / Г. Поля, Г. Сеге. – М. : Наука, 1978. – 392 с.
19. Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1980. – 496 с.
20. Габдулхаев, Б. Г. Теория приближенных методов решения операторных уравнений / Б. Г. Габдулхаев. – Казань : Казанский государственный университет, 2006. – 112 с.

Стаття надійшла до редакції 29.01.2014.

Онуфрієнко Л. М.<sup>1</sup>, Чумаченко Я. В.<sup>2</sup>, Чумаченко В. П.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Канд. фіз.-мат. наук, доцент, Запорізький національний технічний університет, Україна

<sup>2</sup>Канд. технічних наук, доцент, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Україна

<sup>3</sup>Д-р фіз.-мат. наук, професор, Запорізький національний технічний університет, Україна

### ДО ТЕОРІЇ E-ПЛОЩИННОГО ХВИЛЕВОДНОГО ТРАНСФОРМАТОРА З ОСЬОВОЮ СИМЕТРІЄЮ N-ГО ПОРЯДКУ

Розглянута задача розсіювання хвиль в E-площинному з'єднанні N однакових прямокутних хвилеводів. Дано строго обґрунтування запропонованої раніше математичної моделі вузла, яка враховує властивості його геометрії і використовує тригонометричні розвинення шуканого поля, отримані за допомогою методу добутку областей. Для  $3 \leq N \leq 6$  показано, що для майже всіх значень частотного параметра кожна із N нескінченних систем лінійних рівнянь, до яких приводить розвинутий підхід, розв'язана єдиним чином в просторі послідовностей  $l_1$ . Доведено, що ці розв'язки можуть бути знайдені методом редукції, збіжним за нормою названого простору.

**Ключові слова:** хвилеводні неоднорідності, метод добутку областей, матрично-операторні рівняння.

Onufriyenko L. M.<sup>1</sup>, Chumachenko Ya. V.<sup>2</sup>, Chumachenko V. P.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Ph.D., Associate Professor, Zaporizhzhia National Technical University, Ukraine

<sup>2</sup>Ph.D., Associate Professor, Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ukraine

<sup>3</sup>Doctor of Science, Professor, Zaporizhzhia National Technical University, Ukraine

### ON THE THEORY OF AN E-PLANE WAVEGUIDE TRANSFORMER WITH THE N-FOLD ROTATIONAL SYMMETRY

The mathematical justification of an earlier full-wave model for a symmetrical junction of N rectangular waveguides coupled in E-plane is presented in the paper. The problem of scattering of waveguide modes is formulated in the form of a boundary value-problem for the Helmholtz equation with Neumann boundary conditions on the periphery of the unit, and with the edge and radiation conductions. The model is based on the symmetry properties of the geometry and on trigonometric-series expansions of the field in the connecting region, which are constructed using the domain-product technique.

It is suggested to consider  $N$ -infinite systems of linear equations (ISLE) with respect to expansion coefficients, which arise in the course of solving the problem, in the capacity of matrix-operator equations in the sequence space  $l_1$ . The analysis has shown that an ISLE of the sort can have no more than one solution for almost all values of the frequency parameter. For  $3 \leq N \leq 6$ , it has been found that operator of the ISLE can be presented as a sum of an identity operator, a contraction operator and a completely continuous operator. The obtained results allow considering the ISLE as a functional equation with the Fredholm operator. It has been proved that this equation is solvable in  $l_1$  by means of the truncation method convergent in the norm.

**Keywords:** waveguide discontinuities, domain-product technique, matrix-operator equations.

## REFERENCES

1. Shestopalov V. P., Kirilenko A. A., Rud' L. A. Rezonansnoe rasseyaniye voln. Vol. 2. Volnovodny'e neodnorodnosti. Kyiv, Naukova Dumka, 1986, 216 p.
2. Cullen A. L., Yeo S. P. Using the least-squares boundary residual method to model the symmetrical five-port waveguide junction, *IEE Proceedings on Microwaves, Antennas & Propagation*, 1987, Vol. 134-H, No. 2, pp. 116–124.
3. Bialkowski M. E. Analysis of an N-port consisting of a radial cavity and E-plane coupled rectangular waveguides, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1992, Vol. 40, No. 9, pp.1840–1843.
4. Chumachenko V. P. Simple full-wave model of E-plane waveguide star junction, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2002, Vol. 16, No. 9. pp. 1223–1232.
5. Chumachenko V. P. Efficient field representation for polygonal region, *Electronics Letters*. 2001, Vol. 37, No. 19, pp. 1164–1165.
6. Chumachenko Ya. V., Chumachenko V. P. O beskonechny'x sistemax linejny'x uravnenij, svyazanny'x s zadachami rasseyaniya voln v ploskostny'x volnovodny'x uzlax s oblast'yu vzaimodejstviya pryamougol'noj formy', *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2012, No. 2, pp. 20–25.
7. Chumachenko V. P. Properties of some matrix operators appearing in the theory of planar waveguide junctions, *Telecommunications and Radio Engineering*. 2013, Vol. 72, No. 6, pp. 469–484.
8. Kompa G. Planar waveguide model for calculating microstrip components, *Electronics Letters*. 1975, Vol. 11, No. 19, pp. 459–460.
9. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Macy'pura V. T. Osnovy' akusty'ky'. Kyiv, Naukova dumka, 2007, 640 p.
10. Shestopalov V. P. Spektral'naya teoriya i vzbuzhdenie otkry'ty'x struktur. Kyiv, Naukova dumka, 1987, 288 p.
11. Montgomery C. G., Dicke R. H., Purcell E. M. Principles of Microwave Circuits. New York, McGraw-Hill, 1948, 486 p.
12. Mittra R., Lee S. W. Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. New York, Macmillan, 1971, 302 p.
13. Shestopalov V. P., Kirilenko A. A., Masalov S. A. Matrichny'e uravneniya tipa svertky' v teorii difrakcii. Kyiv, Naukova dumka, 1984, 296 p.
14. Bari N. K. Trigonometricheskie ryady'. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 936 p.
15. Xatson V., Pim Dzh. Prilozheniya funkcional'nogo analiza i teorii operatorov. Moscow, Mir, 1983, 432 p.
16. Gribov Yu. I. Koordinatny'e prostranstva i beskonechny'e sistemy' linejny'x uravnenij. III, *Izv. vuzov. Matematika*. 1963, No. 3 (34), pp. 27–39.
17. Gradshtejn I. S., Ry'zhik I. M. Tablicy' integralov, sum, ryadov i proizvedenij. Moscow, Nauka, 1971, 1108 p.
18. Polia G., Sege G. Zadachi i teoremy' iz analiza. Vol.1. Moscow, Nauka, 1978, 392 p.
19. Trenogin V.A. Funkcional'ny'j analiz. Moscow, Nauka, 1980, 496 p.
20. Gabdulxayev B. G. Teoriya priblizhenny'x metodov resheniya operatorny'x uravnenij. Kazan', Kazansky'j gosudarstvenny'j universitet, 2006, 112 p.