

# РАДІОФІЗИКА

# РАДИОФИЗИКА

# RADIOPHYSICS

УДК 537.874.6

А. В. Крапивной, В. П. Чумаченко, Я. В. Чумаченко

## ОБ УТОЧНЕНИИ ОДНОЙ ОЦЕНКИ СКАЛЯРНОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ РАССЕЯННОГО ИМПЕДАНСНОЙ СФЕРОЙ

*На примере рассеяния плоской скалярной волны импедансной сферой исследуются возможности совершенствования нового метода, близкого к методу физической оптики и учитывающего (в исходном варианте) кривизну граничной поверхности в плоскости падения волны. Показано, что возможный в рамках этого подхода учет кривизны в плоскости перпендикулярной плоскости падения улучшает оценку рассеянного поля, однако, это улучшение не столь существенно, как в случае перехода от физической оптики к исходному варианту метода с учетом кривизны только в одной плоскости.*

### ВВЕДЕНИЕ

Недавно в работах [1, 2] был предложен новый подход к оцениванию коротковолнового поля, рассеянного выпуклым двумерным объектом, который, сохраняя простоту метода физической оптики, позволяет заметно улучшить оценки для не зеркальных направлений. В работах [3, 4] область его приложений была расширена на решение трехмерных задач рассеяния плоской волны сферическими препятствиями, а в [5] метод был обобщен на случай произвольного выпуклого импедансного тела. Подобно приближению физической оптики метод дает аналитическое выражение для поля у рассеивающей поверхности, однако, при этом учитывает ее кривизну в плоскости падения волны и не предполагает обращения в нуль поля на теневой части тела. В работе [3], в частном случае мягкой сферы, было показано, что в рамках развиваемого подхода может быть рассмотрена кривизна поверхности также и в плоскости перпендикулярной плоскости падения. В настоящей

работе возможности улучшения оценок путем учета кривизны поверхности в двух упомянутых плоскостях изучаются на примере решения задачи рассеяния для сферы с произвольным поверхностным импедансом.

### РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Пусть  $(x, y, z)$  и  $(\rho, \theta, \varphi)$  – прямоугольная и сферическая системы координат с полярной осью вдоль оси  $z$ , а  $S$  – сфера радиуса  $R$ , обладающая в общем случае поверхностным импедансом  $Z$  (рис. 1). Среда, в которой расположено препятствие, характеризуется волновым сопротивлением  $Z_0$  и скоростью распространения волн  $c$ . Поле будем характеризовать переменной  $p$  и, опущенным в последующих соотношениях, временным множителем  $e^{i\omega t}$ , где  $\omega$  – круговая частота колебаний. Если ось  $z$  направлена навстречу падающей плоской волне, то возбуждающее поле можно записать в виде

$$p_i = e^{ikz}, \quad (1)$$

где  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , а  $\lambda$  – длина волны в среде. Полное поле

$$p = p_i + p_s \quad (2)$$

удовлетворяет уравнению Гельмгольца вне сферы и импедансному граничному условию

$$\frac{\partial p}{\partial n} - ik\chi p = 0 \quad (3)$$

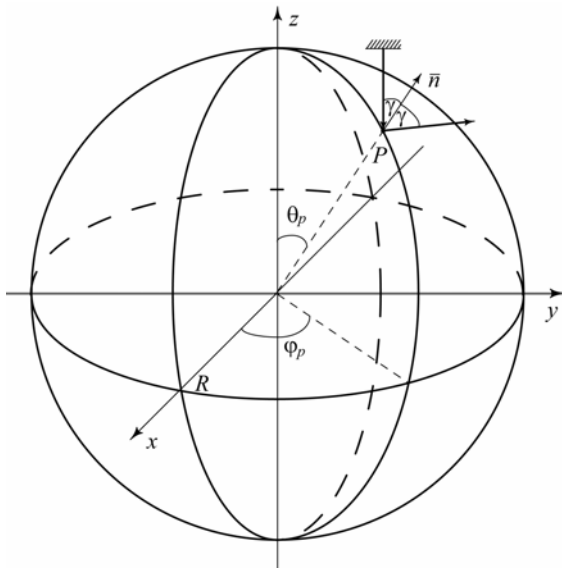


Рисунок 1 – Геометрия задачи

на ее поверхности. Здесь  $\chi = \frac{Z_0}{Z}$ , а направление нормали  $\vec{n}$  указано на рис. 1. Значение  $\chi = 0$  отвечает случаю жесткой сферы.

Для мягкой сферы  $\chi = \infty$  и

$$p = 0 \tag{4}$$

на границе  $S$ .

Рассеянное поле  $p_s$  вне сферы может быть выражено через значения  $p$  и  $\partial p / \partial n$  на ее поверхности с помощью интеграла Киргофа. В дальней зоне это представление преобразуется к виду

$$p_s(M) \approx f(\varphi_M, \theta_M) \frac{e^{-ik|\vec{r}|}}{|\vec{r}|}, \tag{5}$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки  $M$ , а амплитудная функция рассеяния  $f(\varphi_M, \theta_M)$  определяется [3, 4] формулами

$$f(\varphi_M, \theta_M) = -\frac{ik}{4\pi} \iint_S [\chi(P) - \cos\alpha] p(P) e^{ikR \cos\alpha} dS_P \tag{6}$$

(для импедансной поверхности) и

$$f(\varphi_M, \theta_M) = \frac{ikZ_0}{4\pi} \iint_S v_n(P) e^{ikR \cos\alpha} dS_P \tag{7}$$

(для случая  $\chi = \infty$ ). Здесь  $\alpha$  – угол между  $\vec{r}$  и  $\overline{OP}$  ( $O$  – начало координат), а

$$v_n(P) = \left. \frac{i}{kZ_0} \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_P. \tag{8}$$

Чтобы улучшить оценки, получаемые для  $p(P)$  и  $v_n(P)$  методом физической оптики, приблизим сначала рассеивающую поверхность в окрестности точки  $P$  поверхностью кругового цилиндра, который перпендикулярен плоскости падения волны и ось которого проходит через центр сферы. Кривизна поверхности в направлении, перпендикулярном плоскости падения, при этом очевидно не учитывается. Следуя работам [3, 4], мы получим в случае импедансной поверхности следующее выражение для  $p(P)$ :

$$p = e^{ikR \cos\gamma} \left[ 1 + ik \frac{\chi - \cos\gamma}{X' - i\chi k} \right], \tag{9}$$

где  $\gamma$  – угол падения в точке  $P$ , а

$$X' = k \left[ \frac{\mu}{kR} - \frac{H_{\mu+1}^{(2)}(kR)}{H_{\mu}^{(2)}(kR)} \right]. \tag{10}$$

Здесь  $H_{\mu}^{(2)}(kR)$  – функция Ганкеля и

$$\mu = kR \sin\gamma. \tag{11}$$

Оценка для  $v_n(P)$  в случае мягкой сферы имеет вид

$$v_n = \frac{ie^{ikR \cos\gamma}}{kZ_0} [ik \cos\gamma - X']. \tag{12}$$

Чтобы учесть кривизну поверхности в направлении, перпендикулярном плоскости падения, введем в окрестности точки  $P$  локальные сферические координаты  $(\rho, \vartheta, \phi)$  с началом отсчета в центре сферы и полярной осью вдоль оси упомянутого выше цилиндра. При этом точке  $P$  отвечают значения  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  и  $\phi = 0$ , причем при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  угол  $\phi$  определяется разностью  $\phi = \theta - \theta_P$ . Будем считать далее, что в малой окрестности точки  $P$ , как и в случае плоской поверхности, функциональные зависимости падающей и отраженной волн совпадают вдоль поверхности с точностью до постоянного множителя. Разделяя переменные в уравнении Гельмгольца, получим [3] при этом условии

$$p_s = C \frac{h_v^{(2)}(k\rho)}{h_v^{(2)}(kR)} e^{-i\mu\phi}, \tag{13}$$

где  $\mu$  определяется формулой (11), а  $h_v^{(2)}(k\rho)$  является сферической функцией Бесселя индекса

$$v = \sqrt{\mu^2 + 0,25} - 0,5. \tag{14}$$

Определив постоянную  $C$  с помощью граничного условия (3) или (4), сможем получить оценки для  $p(P)$

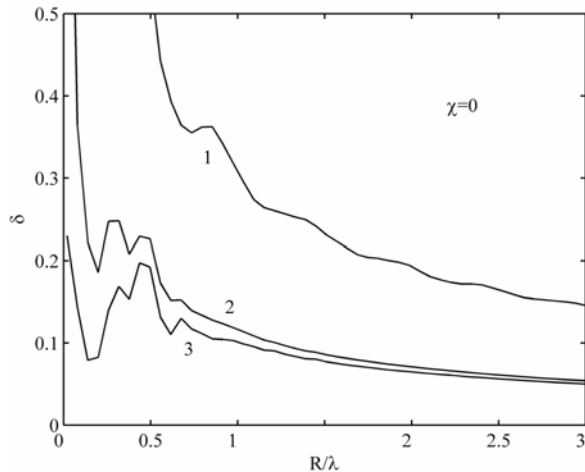


Рисунок 2 – Относительная среднев квадратическая  
ошибка для случая жесткой сферы:

1 – метод физической оптики, 2 – формула (10), 3 – формула (15)

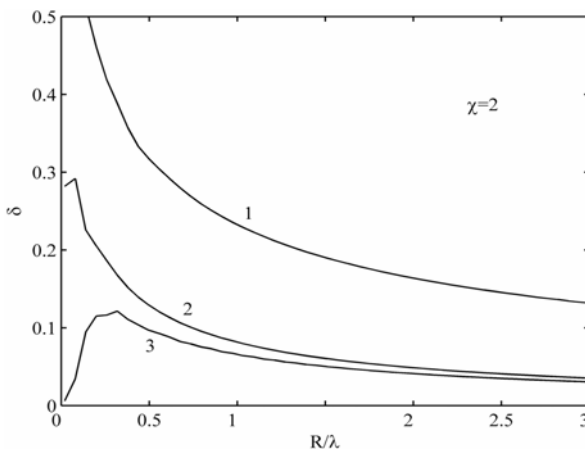


Рисунок 3 – Относительная среднев квадратическая  
ошибка для случая импедансной сферы:

1 – метод физической оптики, 2 – формула (10), 3 – формула (15)

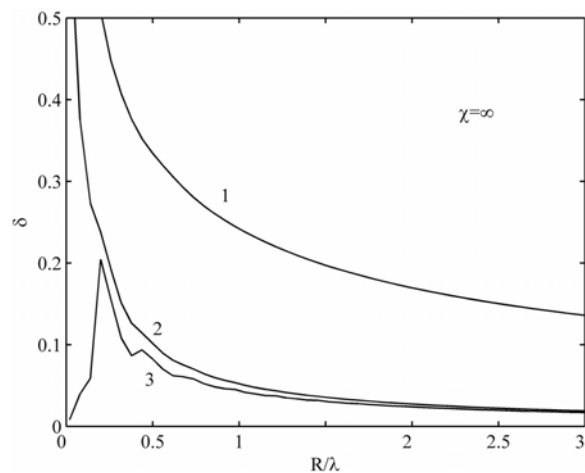


Рисунок 4 – Относительная среднев квадратическая  
ошибка для случая мягкой сферы:

1 – метод физической оптики, 2 – формула (10), 3 – формула (15)

и  $v_n(P)$ . Они снова описываются формулами (9) и (12), если только понимать под  $X'$  величину

$$X' = k \left[ \frac{v}{kR} - \frac{h_{\nu+1}^{(2)}(kR)}{h_{\nu}^{(2)}(kR)} \right]. \quad (15)$$

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2, 3 и 4 представлены частотные зависимости относительной среднев квадратической ошибки

$$\delta = \frac{\sqrt{\int_0^{\pi} |f - f_{ex}|^2 d\theta_M}}{\sqrt{\int_0^{\pi} |f_{ex}|^2 d\theta_M}}, \quad (16)$$

которая возникает при оценивании функции рассеяния  $f$  с помощью выписанных выше приближений в случаях жесткой, импедансной и мягкой поверхностей, соответственно. Под точным решением  $f_{ex}$  мы понимаем решение, полученное в виде ряда методом разделения переменных [6]. Видно, что переход к приближению, основанному на учете кривизны рассеивающей поверхности в плоскости падения волны, ведет к значительному уменьшению ошибки по сравнению с методом физической оптики. Учет кривизны в двух плоскостях приводит к дальнейшему ее сокращению, однако, это сокращение в высокочастотной области уже не столь существенно.

Заметим, что из представленных данных также следует, что последнее приближение заметно лучше других приближений при  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow 0$  и обеспечивает приемлемую оценку функции  $f$  для шаров малых радиусов. На рис. 5 и 6 приведены угловые зависимости рассеянного

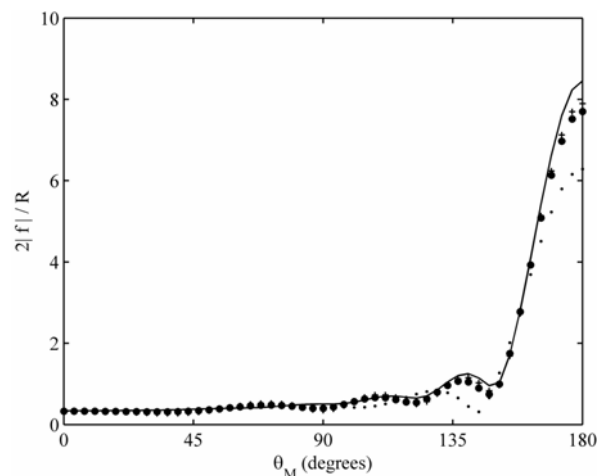


Рисунок 5 – Угловая зависимость рассеянного поля  
в дальней зоне при  $R/\lambda = 1$  и  $\chi = 2$ :

сплошная линия – точно, пунктир – метод физической оптики,  
кружки – формула (10), крестики – формула (15)

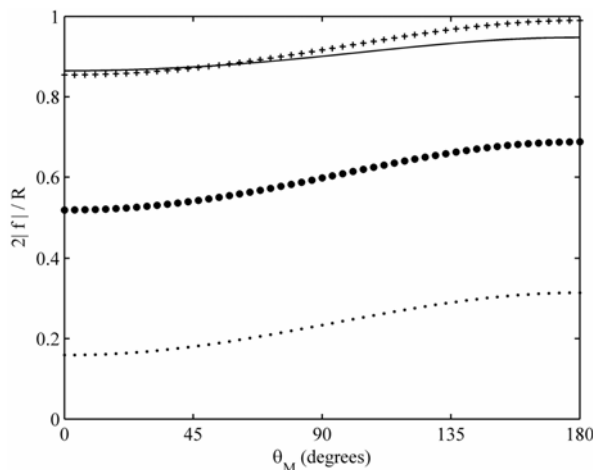


Рисунок 6 – Угловая зависимость рассеянного поля в дальней зоне при  $R/\lambda = 0,05$  и  $\chi = 2$ :

сплошная линия – точно, пунктир – метод физической оптики, кружки – формула (10), крестики – формула (15)

поля в дальней зоне, которые характерны для больших и малых значений  $\frac{R}{\lambda}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере решения задачи рассеяния скалярной волны импедансной сферой рассмотрены возможности дальнейшего совершенствования предложенного недавно приближенного подхода, который близок к методу физической оптики и учитывает кривизну рассеивающей поверхности в плоскости падения волны. Показано, что возможное в рамках метода рассмотрение кривизны поверхности в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, улучшает оценку рассеянного поля в высокочастотной части диапазона волн, однако, это улучшение не так существенно, как в случае перехода от физической оптики к варианту метода с учетом кривизны только в одной плоскости. Установлено также, что учет кривизны в двух плоскостях делает возможным использование развитого подхода и для оценок

характеристик рассеяния шаров малого, в сравнении с длиной волны, радиуса.

## ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Chumachenko V. P. On the estimation of scattering from convex conducting cylinders // Microwave and Optical Technology Letters. – Vol. 45. – May 2005. – P. 191–194.
2. Крапивну А. В., Чумаченко В. П. On the estimation of scattering from convex impedance cylinders // Proceedings of the 11<sup>th</sup> Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Kharkiv, Ukraine. – June 26–29, 2006. – P. 248–250.
3. Крапивной А. В., Чумаченко В. П. Об оценивании волнового поля рассеянного мягкой сферой // Радиоэлектроника. Информатика. Управление. – 2006. – № 2. – С. 5–8.
4. Крапивной А. В., Чумаченко В. П., Чумаченко Я. В. О рассеянии плоской скалярной волны импедансной сферой // Радиоэлектроника. Информатика. Управление. – 2007. – № 1. – С. 9–14.
5. Chumachenko V. P., Крапивну А. В., Чумаченко Я. В. An estimation method for acoustic scattering from convex bodies // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – Vol. 310, Mar. – P. 845–854.
6. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. – Том 1. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 930 с.

Надійшла 24.03.2008

*На прикладі розсіювання плоскої скалярної хвилі імпедансною сферою досліджуються можливості вдосконалення нового методу, який близький до методу фізичної оптики і враховує (в початковому варіанті) кривизну граничної поверхні в площині падіння хвилі. Показано, що можливе в рамках цього підходу урахування кривизни в площині, перпендикулярній площині падіння, покращує оцінку розсіяного поля, але це покращення не настільки суттєве, як у випадку переходу від фізичної оптики до початкового варіанту методу з урахуванням кривини тільки в одній площині.*

*The problem of scalar plane-wave scattering off a reactively loaded sphere is examined. The features of a new approach, which is close to the physical optics approximation and considers (in its initial variant) the curvature of the target at the plane of incidence, are studied. It is shown, that possible consideration of the curvature at the plane perpendicular to the plane of incidence improves the estimate of the scattered field, but this improvement is not so essential as in the case of change from physical optics to the initial variant of the method considering the curvature at only one plane.*