МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING

УДК 519.65

Н. І. Біла, Н. О. Нечипоренко, Л. О. Бондаренко

ПРО РЕГУЛЯРИЗАЦІЮ ЧИСЕЛЬНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Наводяться алгоритми, що дають найкраще за порядком наближення похідної таблично з аданої функції. Використання класичних методів квазірішення та нев'язки зводить задачу чисельного диференціювання до розв'язання задач лінійного програмування зі спеціальною структурою матриці обмежень, що дозволяє значно зменшити об'єм обчислень.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу обчислення похідної функції $f(t)$, що задана своїми значеннями $\tilde{f}_k$ на рівномірній сітці $\{t_k\}_{k=1}^N$. Значення $\tilde{f}_k$ відомі з похибкою ε, тобто мають місце нерівності

$$\left|\tilde{f}_k - f(t_k)\right| \le \varepsilon, \quad k = \overline{1, N}. \tag{1}$$

Необхідно обчислити значення похідної $f'(t)$ у вузлах сітки $\{t_k\}_{k=1}^N$.

Відомо [1], що задача чисельного диференціювання функцій, значення яких можливо мати лише з якоюнебудь похибкою, є некоректною, тому потребує додаткової інформації та спеціальних алгоритмів для її регулярізації. Якщо значення ε відомо, маємо можливість регулярізувати задачу за методом нев'язки. Якщо ж значення ε не відомо, але є можливість отримати оцінки зверху другої похідної типу

$$\left|\frac{f(t_{k+1}) - 2f(t_k) + f(t_{k-1})}{(t_{k+1} - t_k)^2}\right| \le L_2, \quad k = 2, 3, \ldots, N-1, \tag{2}$$

використовуємо метод квазірішень. Використання цих методів до задачі чисельного диференціювання у середньоквадратичній нормі наведено в [1] та [2]. В даній роботі наводяться алгоритми, що використовують норму простору l_∞, що буває важливим для деяких практичних задач. Особливості алгоритмів дозволили створити комп'ютерні програми, що розв'язують задачу с заданими характеристиками якості [3].

МЕТОД НЕВ'ЯЗКИ

До значень функції $\tilde{f}_k$, $k = \overline{1, N}$, для яких виконується нерівнсть (1)і та відомо значення похибки ε, застосуємо алгоритм, що згладжує ці значення та базується на методі нев'язки. Значення $f'(t_k)$, $k = \overline{1, N}$ обчислюються за різницевою формулою з використанням згладжених значень. Вектор $F = \{f_1, f_2, ..., f_N\}$ згладжених значень функції є рішенням такої екстремальної задачі:

$$\min_{f_k} \max_{2 \le k \le N-1} |f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}| \tag{3}$$

при обмеженнях

$$|f_k - \tilde{f}_k| \le \varepsilon, \quad k = \overline{1, N}. \tag{4}$$

Задача (3)–(4) може бути зведена до вирішення такої задачі лінійного програмування:

$$\max x_{N+1} \tag{5}$$

при обмеженнях

$$\begin{gathered} x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2} + x_{N+1} \ge -B_k, \\ -x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} + x_{N+1} \ge B_k, \\ k = \overline{1, N-2}, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} 0 \le x_k \le 2\varepsilon, \quad k = \overline{1, N}, \\ x_{N+1} \ge 0, \end{gathered} \tag{7}$$

де $B_k = \tilde{f}_k - 2\tilde{f}_{k+1} + \tilde{f}_{k+2}$, $k = \overline{1, N-2}$; $x_k = f_k - \tilde{f}_k + \varepsilon$, $k = \overline{1, N}$.

Задача (5)–(7) вирішується методом послідовного покращення [4]. За начальне наближення беремо вектор $x_k = 0$, $k = \overline{1, N}$; $x_{N+1} = \max_k |B_k|$, тобто на першому кроці буде лише одне активне обмеження. На кожному наступному кроці число активних обмежень (а, значить, і активних змінних) збільшується на одиницю. На s-му кроці метода послідовних покращань необхідно розв'язувати дві системи алгебраїчних рівнянь порядку s. Обмеження (5) враховуються алгоритмічно, до активних входять лише обмеження з системи нерівностей (4). Тому матриця системи алгебраїчних рівнянь має таку структуру (при відповідному впорядкуванні рядків і стовпців системи): перші $s-1$ рядок мають кожен не більше 3 ненульових елементів, а останній рядок складається з s одиниць. Враховуючи вказану особливість матриці, можливо розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь зі значною економією пам'яті та числа операцій. Розрахунки показали, що при розв'язанні системи число ненульових елементів збільшується менш, ніж у два рази.

Для розв'язання задачі лінійного програмування (5)–(7) можливо також використовувати метод послідовного покращання з перерахунком оберненої матриці. В цьому разі кількість операцій на кожному кроці, безперечно, зменшується, однак, більші похибки перерахунку оберненої матриці при заміні рядків та стовпців призводять до значних відхилень у рішенні. В цьому сенсі метод послідовних покращань набагато точніше.

Матрицю обмежень (7) немає необхідності зберігати в пам'яті комп'ютера, необхідні значення елементів матриці обчислюються за допомогою виклику необхідної функції.

Після того, як знайдено вектор $X = \{x_1, x_2, ..., x_{N+1}\}$ – розв'язок задачі (5)–(7), згладжені значення функції f_k обчислюються за формулою

$$f_k = \tilde{f}_k + x_k - \varepsilon, \quad k = \overline{1, N},$$

при цьому

$$\max_{1 \le k \le N-2} |f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k| = x_{N+1}.$$

Значення похідної $f'(t)$ у вузлах $\{t_k\}_{k=2}^{N-1}$ обчислюється за однією з різницевих формул

$$f'(t_k) = \frac{f_{k+1} - f_k}{t_{k+1} - t_k},$$

$$f'(t_k) = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}}.$$

Якщо відома оцінка другої похідної L_2, то маємо таку оцінку похибки обчислення похідної:

$$\begin{aligned} &\max_k \left| f'(t_k) - \frac{f_{k+1} - f_k}{t_{k+1} - t_k} \right| \le \\ &\le \max_k \left\{ \left| f'(t_k) - \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \right| + \right. \\ &+ \left| \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k} - \frac{\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k}{t_{k+1} - t_k} \right| + \\ &\left. + \left| \frac{\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}}{t_{k+1} - t_k} \right| \right\} \le \frac{L_2 \Delta t}{2} + \frac{4\varepsilon}{\Delta t}, \end{aligned}$$

де $\Delta t = \max_k (t_{k+1} - t_k)$.

Ясно, що перед розв'язанням задачі, якщо N досить велике, належить збільшити крок сітки Δt, зменшуючи тим самим число N.

Проведені розрахунки з використанням наведеного алгоритму показали його ефективність.

Якщо про функцію відома деяка якісна інформація, а саме, інтервали, на яких функція зростає чи спадає, та (або) інтервали опуклості функції, то використання цієї інформації дозволить значно покращати якість апроксимації похідної. У цьому випадку до нерівностей (4) додамо такі:

$$(-1)^{l_i}(f_{k+1} - f_k) \ge 0, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{8}$$

$$(-1)^{n_j}(f_{k+1}-2f_k+f_{k-1}) \ge 0,\ k = \overline{2, N-1},$$
$$j = \overline{1, m_1}, \tag{9}$$

тут l_i та n_j можуть приймати значення 1 або 2 в залежності від зростання або спадання функції при $t = t_k$ і в залежності від виду опуклості функції відповідно. m – кількість інтервалів монотонності функції, m_1 – кількість інтервалів монотонності похідної функції.

Заміна змінних $x_k = f_k - \tilde{f}_k + \varepsilon$ зводить задачу (3), (4), (8), (9) до задачі лінійного програмування (5) при обмеженнях (6), (7) та

$$-x_k + x_{k+1} \ge (-1)^{l_i} d_k,\quad k = \overline{1, N-1},$$
$$i = \overline{1, m}, \tag{10}$$

$$x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2} \ge (-1)^{n_j} B_k,\quad k = \overline{1, N-2},$$
$$j = \overline{1, m_1}, \tag{11}$$

де $d_k = \tilde{f}_k - \tilde{f}_{k+1}$.

Розв'язання останньої задачі лінійного програмування може бути здійснено так же, як і задачі (5)–(7). Матриці алгебраїчних систем зберігають свою структуру. В цьому випадку трохи збільшується кількість кроків методу послідовного покращання та порядок систем алгебраїчних рівнянь на останніх кроках.

МЕТОД КВАЗІРІШЕНЬ

Нехай для значень функції виконується нерівність (2) та константа L_2 відома. До заданих значень функції $\tilde{f}_k$, $k = \overline{1, N}$, застосуємо алгоритм, який оснований на методі квазірішень [2], що згладжує значення функції у вузлах. Значення похідної після цього обчислюються за різницевими формулами. Вектор $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_N\}$ згладжених значень функції є рішенням такої екстремальної задачі

$$\min_{f_k} \max_{1 \le k \le N} |f_k - \tilde{f}_k| \tag{12}$$

при обмеженнях

$$|f_k - 2f_{k+1} + f_{k+2}| \le L_2 h^2,$$
$$k = 1, 2, \ldots, N-2. \tag{13}$$

Введемо такі позначення:

$$f_k - \tilde{f}_k = x_k,\quad \max_{1 \le k \le N}|x_k| = x_{N+1},$$
$$B_k = \tilde{f}_k - 2\tilde{f}_{k+1} + \tilde{f}_{k+2},$$
$$B_k^+ = -L_2 h^2 + B_k,$$
$$B_k^- = -L_2 h^2 - B_k.$$

Одержуємо задачу лінійного програмування:

$$\min x_{N+1} \tag{14}$$

при обмеженнях

$$-x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = B_k^+,\quad k = \overline{1, N-2},$$
$$x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2} \ge B_k^-,\quad k = \overline{1, N-2},$$
$$-x_k + x_{N+1} \ge 0,\ x_k + x_{N+1} \ge 0,$$
$$x_{N+1} \ge 0,\quad k = \overline{1, N}. \tag{15}$$

Для того, щоб знайти початкове наближення, що задовольняє обмеженням (15), необхідно вирішити допоміжну задачу лінійного програмування. Задаємо $x_k = 0$, $k = \overline{1, N}$, та виділяємо індекси j, для яких $B_j^+ > 0$, та індекси i, для яких $B_i^- > 0$. Розв'язуємо задачу

$$\min\left\{\sum_j (B_j^+ + (x_j - 2x_{j+1} + x_{j+2})) + \right.$$
$$\left. + \sum_i (B_i^- - (x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2}))\right\}$$

при виконанні решти обмежень.

Розв'язання наведених задач, здійснюється методом послідовного покращання з перерахунком оберненої матриці. Зважаючи на розрідженість матриці обмежень, одержуємо алгоритм, що має на порядок менше кількість операцій, ніж повна задача лінійного програмування.

Аналогічно ставляться та розв'язуються задачі, що враховують обмеження на монотонність та опуклість функції.

ВИСНОВКИ

Як показали розрахунки, наведені алгоритми є досить ефективними. Методи нев'язки та квазірішень являються оптимальними за порядком точності, та для кожного з них має місце рівномірна збіжність обчисленої похідної до точної при $\varepsilon \to 0$.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 240 с.
2. *Гребенников А. И.* Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 208 с.
3. *Сергиенко И. В., Задирака В. К., Бабич М. Д. и др.* Компьютерные технологии решения задач прикладной и вычислительной математики с заданными значениями характеристик качества // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 5. – С. 33–41.

4. *Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева М. А.* Численные методы линейного программирования. – М.: Наука, 1977. – 368 с.

Надійшла 20.11.2007
Після доробки 25.03.2008

Приводятся оптимальные по порядку алгоритмы приближения производной таблично заданной функции. Использование классических методов квазирешения и невязки сводит задачу численного дифференцирования к решению задач линейного программирования со специальной структурой матрицы ограничений, которая позволяет значительно уменьшить объем вычислений.

The algorithms of the approximation the derivative of the function given by table are given. Classic methods quasi-solution and discrepancy are used to numerical differentiation and lead the task to linear programming problems with special structure of distraction matrix, what allow us to decrease greatly computational complexity.

УДК 621.365.036

А. Н. Довбня, С. Г. Удовенко, А. А. Шамраев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ МАГНИТНОГО СПЕКТРОМЕТРА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Разработан специализированный контроллер для цифрового управления магнитным спектрометром. По результатам активного эксперимента рассчитаны параметры модели анализирующего магнита, которая стала основой для синтеза адаптивного регулятора.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных задач в технике линейных ускорителей является измерение энергетического спектра ускоренных частиц. Наиболее точным является метод измерений с использованием анализирующего магнита, устанавливаемого на выходе линейного ускорителя. Точность измерений определяется качеством системы управления магнитом, эффективность которой в значительной мере зависит от качества используемых при ее построении математических моделей, которые, с одной стороны, должны наиболее полно отражать свойства исследуемых объектов, а с другой быть удобными для реализации алгоритмов управления. Отсутствие полной информации об условиях функционирования объектов, а также об их динамических характеристиках и характере действующих помех обусловливают необходимость применения при управлении такими объектами адаптивного и робастного подходов, допускающих возможность использования при синтезе регуляторов упрощенных (в частности, линейных) моделей.

К основным методам построения математических моделей технических объектов можно отнести: эмпирический, который основывается на статистической обработке реальных данных, полученных в процессе функционирования объекта; аналитический, основанный на применении законов физики и химии; комбинированный, который объединяет рациональное планирование эксперимента, статистическую обработку экспериментальных данных и основные физико-химические закономерности; автоматическое построение математической модели с помощью цифрового вычислителя, подключенного к объекту через датчики и преобразователи.

В данной работе рассматривается решение задачи динамической идентификации анализирующего магнита с применением специализированного контроллера в комплексе с персональной ЭВМ для автоматизированного измерения энергетического спектра пучка ускоренных электронов на выходе линейного ускорителя ЛУ-40.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В общем случае задача построения математической модели объекта состоит в выборе ее структуры и оценке ее параметров таким образом, чтобы при использовании критерия минимума некоторой функции разности расчетных и экспериментальных данных соблюдалось условие близости модели исследуемому процессу.

В соответствии с априорными данными об анализирующем магните как объекте управления, он был классифицирован как одномерный объект с самовыравниванием, наиболее эффективным методом определения параметров модели которого является активный эксперимент. Для получения передаточной функции по результатам эксперимента целесообразно использовать модифицированный метод площадей Симою [1].

СХЕМА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

На рис. 1 приведена часть схемы цифрового управления магнитным спектрометром, использованная для