

5. Купин А. И. Нейросетевое прогнозирование показателей обогащения магнетитовых кварцитов // Вісник НТУ «ХПІ». – № 26. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2006. – С. 23–31.
6. Ксендзовский В. Р. Автоматизация процессов производства окатышей. – М.: Металлургия, 1971. – 216 с.

Надійшла 9.01.2008

Предложен принцип управления температурным режимом процесса обжига окатышей на конвейерной машине с использованием прогнозирующей ANFIS-модели.

The control principle of temperature conditions of rolled briquettes sintering process on conveyor machine based on the predictive ANFIS model is suggested.

УДК 681.5.015.73:621.34

В. І. Мороз

АНАЛІЗ РАЦІОНАЛЬНОГО ПОРЯДКУ АПРОКСИМАЦІЙНОГО ПОЛІНОМА ДЛЯ ВІДНОВЛЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ ЗА ЇЇ ДИСКРЕТНИМИ ВІДЛІКАМИ

З використанням частотних характеристик виконано дослідження раціонального порядку апроксимаційного полінома для відтворення сигналу за його дискретними відліками.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Однією з основних задач у цифрових системах керування або обробки інформації є відтворення неперервного сигналу за його дискретними відліками. Потрібно зауважити, що дана проблема може бути вирішена лише алгоритмічним шляхом у процесі формування сигналів керування, у той же час фізична реалізація можлива тільки для фіксатора нульового порядку, найпростішим варіантом якого в цифрових системах є звичайний багаторозрядний регістр. Відомо, що фіксатор нульового порядку вносить як амплітудну, так і, найголовніше, фазну похибку, що пов'язані з його півперіодним запізненням [1, 2]. Одним зі способів корекції такого запізнення в цифрових системах є використання апроксимацій сигналу вищих порядків для оцінки внесеної процесом дискретизації похибки та її компенсації.

Зрозуміло, що будь-яке відтворення сигналу за його дискретними відліками є наближенням і відображає первинний сигнал з певною похибкою. Таким чином, постає задача аналізу раціонального порядку апроксимаційного полінома, який би забезпечував необхідну точність відновлення неперервної інформації за умови найпростішого апроксимуючого виразу, тобто, за мінімальних програмно-апаратних витрат.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Огляд існуючих літературних джерел [3–6] показує, що в галузі розробки математичних основ циф-

рових систем домінує класичний підхід, закладений ще його основоположниками [1, 2]. Нічого не змінилося і в розробці практичних цифрових систем, коли навіть дуже складні сучасні алгоритми керування базуються на числових методах і способах дискретизації неперервних систем, які мають щонайменше піввікову історію [3, 4], а основна увага надається системам керування верхнього рівня ієрархії, паралельним і розподіленим системам [6]. Паралельно продовжують розвиватися числово-аналітичні підходи до синтезу цифрових систем [7].

Метою досліджень є визначення раціонального порядку апроксимаційного полінома для відтворення неперервного сигналу за його дискретними відліками та оцінка похибки, яка внесена процесом дискретизації.

Як відомо, у дискретних системах сигнали подаються своїми відліками, що найчастіше рівномірно розподілені в часі. Їхня наявність створює одну з основних проблем, які потребують свого вирішення в процесі реалізації цифрових систем – відновлення значення сигналу в проміжках між відліками. Як правило, це здійснюється шляхом апроксимації за кількома послідовними відліками за допомогою полінома відповідного порядку з наступною, за необхідністю, інтерполяцією. При цьому мета такої операції залишається незмінною – знаходження діючого значення неперервного сигналу, який відновлено за його дискретними значеннями.

Зрозуміло, що збільшення кількості послідовних відліків для побудови апроксимаційного полінома підвищує точність процедури відновлення, проте існує розумна межа, вище якої подальше збільшення відліків не дає відчутного підвищення точності. Раціональний порядок апроксимаційного поліному для сиг-

© Мороз В. І., 2008

налу $x(t)$ обмежується п'ятим порядком з кількох міркувань [8]:

1) поганою обумовленістю апроксимацій високого порядку [8] – невеликі зміни в коефіцієнтах полінома (наприклад, через обмежену розрядність їхнього подання в цифровій системі) можуть призводити до значних змін у поведінці апроксимуючої функції;

2) появою осциляцій (коливань) апроксимуючого полінома високого порядку (вище п'ятого) на ділянці апроксимації та поза нею [8, 9];

3) поведінка реальної системи високого порядку найчастіше незначно відрізняється від поведінки системи нижчого порядку [8, 10]; в роботі [10] на прикладі показано, що лінійна модель 5-го порядку забезпечує практично таку ж точність відтворення динамічних процесів, як і нелінійна модель 11-го порядку.

Похибка від процесу апроксимації сигналу $x(t)$ визначається різницею між двома його середніми значеннями на проміжку між часовими відліками (рис. 1):

– апроксимованим (наближеним) значенням, яке знаходиться інтегруванням апроксимуючої функції $x^*(t)$ в межах $t_i \leq t < t_{i+1}$;

$$X_i^* = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} x^*(t) dt;$$

– істинним (точним) значенням, яке знаходиться інтегруванням аналітичної функції $x(t)$ в межах $t_i \leq t < t_{i+1}$:

$$X_i = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt.$$

Таким чином, похибка апроксимації сигналу на i -му проміжку $t_i \leq t < t_{i+1}$ між двома його відліками визначатиметься

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= X_i - X_i^* = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt - \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} x^*(t) dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (x(t) - x^*(t)) dt. \end{aligned}$$

Недоліком такого способу є неможливість правильної оцінки похибки для довільного сигналу $x(t)$, оскільки в такому випадку для нього не існує аналітичного виразу, що унеможлиблює безпосереднє обчислення похибки. Вирішити дану задачу дає змогу широко використовуваний в теорії автоматичного керування аналіз частотних характеристик (амплітудних – АЧХ і фазних – ФЧХ) використовуваних апроксимацій як дискретних фільтрів [1, 2]. При цьому потрібно враху-

вати, що виразу $X_i = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt$ відповідає операція

аналітичного інтегрування, а виразу $X_i^* = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} x^*(t) dt$ –

інтеграл від апроксимуючого поліному. Таким чином, частотний аналіз похибок від застосування поліноміальних апроксимацій зводиться до аналізу графіків частотних похибок між операціями ідеального інтегрування та інтегрування апроксимуючого полінома $x_{(n)}^*(t) = a_n t^n + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$.

Знаходження інтегралу від апроксимуючого полінома можливе для двох випадків побудови обчислювальної схеми: явної та неявної. Пошук невідомих коефіцієнтів для апроксимуючих формул відбувається за відомою методикою – за n рівновіддаленими на крок h точками будують апроксимаційний поліном, коефіцієнти якого знаходять для двох згаданих випадків зі системи лінійних рівнянь, яка складена для моменту часу t_i :

1) для неявної схеми побудови апроксимаційного полінома, що допускається у випадку комп'ютерного

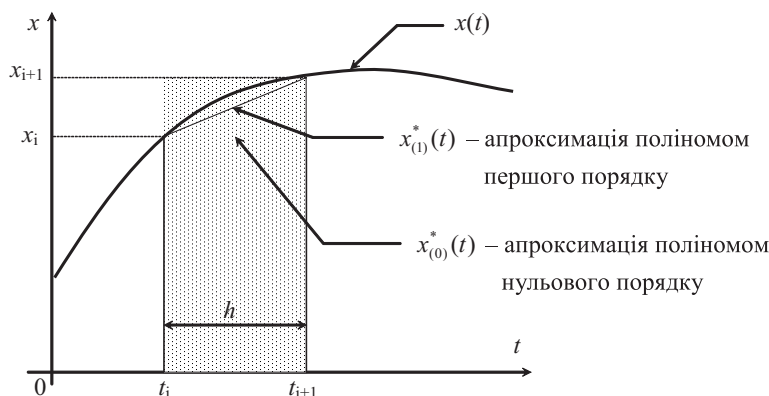


Рисунок 1 – Ілюстрація процесу визначення похибки апроксимації

моделювання, бо може бути вирішена за допомогою процедури розв'язування відповідної системи алгебричних рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} a_n \cdot h^n + a_{n-1} \cdot h^{n-1} + \dots + a_2 \cdot h^2 + a_1 \cdot h + a_0 &= x_{i+1}; \\ a_0 &= x_i; \\ a_n \cdot (-h)^n + a_{n-1} \cdot (-h)^{n-1} + \dots + a_2 \cdot (-h)^2 - a_1 \cdot h + a_0 &= x_{i-1}; \\ &\vdots \\ a_n \cdot ((n-1)h)^n + a_{n-1} \cdot ((n-1)h)^{n-1} + \dots + a_2 \cdot ((n-1)h)^2 - a_1 \cdot ((n-1)h) + a_0 &= x_{i-(n-1)}. \end{aligned} \right.$$

2) для явної схеми побудови апроксимаційного полінома – лише така розрахункова схема допускає фізичну реалізацію, бо не передбачає використання у момент часу t_i ще невідомого $i+1$ -го значення координати; застосування даного способу апроксимації придатне для цифрових систем керування:

$$\left\{ \begin{aligned} a_0 &= x_i; \\ a_n \cdot (-h)^n + a_{n-1} \cdot (-h)^{n-1} + \dots + a_2 \cdot (-h)^2 - a_1 \cdot h + a_0 &= x_{i-1}; \\ &\vdots \\ a_n \cdot ((n-1)h)^n + a_{n-1} \cdot ((n-1)h)^{n-1} + \dots + a_2 \cdot ((n-1)h)^2 - a_1 \cdot ((n-1)h) + a_0 &= x_{i-(n-1)}; \\ a_n \cdot (n \cdot h)^n + a_{n-1} \cdot (n \cdot h)^{n-1} + \dots + a_2 \cdot (n \cdot h)^2 - a_1 \cdot (n \cdot h) + a_0 &= x_{i-n}. \end{aligned} \right.$$

Для ілюстрації нижче на прикладі показано процес знаходження коефіцієнтів апроксимаційних поліномів першого порядку (за двома точками) і другого порядку (використовуються три точки).

ПОБУДОВА АПРОКСИМАЦІЙНОГО ПОЛІНОМА ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ЗА НЕЯВНОЮ СХЕМОЮ

Коефіцієнти апроксимації для заданого апроксимаційного полінома першого порядку $x^*(t) = a_1 t + a_0$ за двома відліками сигналу x_i і x_{i+1} в моменти часу t_i і t_{i+1} з інтервалом дискретності h знаходяться зі системи лінійних алгебричних рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} a_1 h + a_0 = x_{i+1}; \\ a_0 = x_i; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = x_i; \\ a_1 = \frac{x_{i+1} - x_i}{h}. \end{cases}$$

ПОБУДОВА АПРОКСИМАЦІЙНОГО ПОЛІНОМА ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА НЕЯВНОЮ СХЕМОЮ

Для побудови полінома $x^*(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ використовуються три відліки сигналу x_{i-1} , x_i і x_{i+1} в моменти часу t_{i-1} , t_i і t_{i+1} з інтервалом дискретності h . Коефіцієнти апроксимації знаходяться з відповідної системи лінійних алгебричних рівнянь третього порядку:

$$\begin{cases} a_2 h^2 + a_1 h + a_0 = x_{i+1}; \\ a_0 = x_i; \\ a_2 h^2 - a_1 h + a_0 = x_{i-1}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = x_i; \\ a_1 = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h}; \\ a_2 = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{2h^2}. \end{cases}$$

У випадку потреби застосування явної апроксимаційної схеми зі системи виключається рівняння для точки t_{i+1} , що призводить до відповідних змін у коефіцієнтах:

$$\begin{cases} a_0 = x_i; \\ a_2 h^2 - a_1 h + a_0 = x_{i-1}; \\ a_2 (2h)^2 - a_1 (2h) + a_0 = x_{i-2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = x_i; \\ a_1 = \frac{3x_i - 4x_{i-1} + x_{i-2}}{2h}; \\ a_2 = \frac{x_i - 2x_{i-1} + x_{i-2}}{2h^2}. \end{cases}$$

Аналогічна процедура застосовується для знаходження коефіцієнтів апроксимації поліномом довільного порядку. Знайдені коефіцієнти апроксимуючого полінома підставляються у відповідний вираз $x^*(t)$ для виконання процедури аналітичного інтегрування. За отриманими виразами будуються дискретні передатні функції для інтегралів апроксимуючих поліномів [1, 2].

Побудова графіків частотних похибок для знайдених дискретних передатних функцій відбувається в діапазоні до $1/10$ частоти квантування ω_0 згідно теорему відліків Шеннона-Котельникова – такий діапазон є робочим практично для всіх цифрових систем

[3–5]. Дана процедура є відомою [1, 2] і просто реалізується в середовищі будь-якого математичного пакету (наприклад, MathCAD чи MATLAB). Отримані графіки частотних похибок поліноміальних апроксимацій до п'ятого порядку включно показано на рис. 2 (для явних схем) і рис. 3 (для неявних схем). Для наочності графіки побудовані у тривимірному масштабі, що дає змогу одночасно оцінити амплітудну і фазну частотні похибки.

Аналіз частотних похибок поліноміальних апроксимацій показує безсумнівні переваги неявної обчислювальної схеми з точки зору амплітудних і, найголовніше, фазних частотних похибок, які є визначальними для замкнених систем автоматичного регулювання. Ще одним цікавим результатом є те, що відчутне зменшення частотних похибок у нижній частині робочого діапазону (нижче $1/20$ частоти квантування) практично припиняється після другого порядку апроксимаційного полінома.

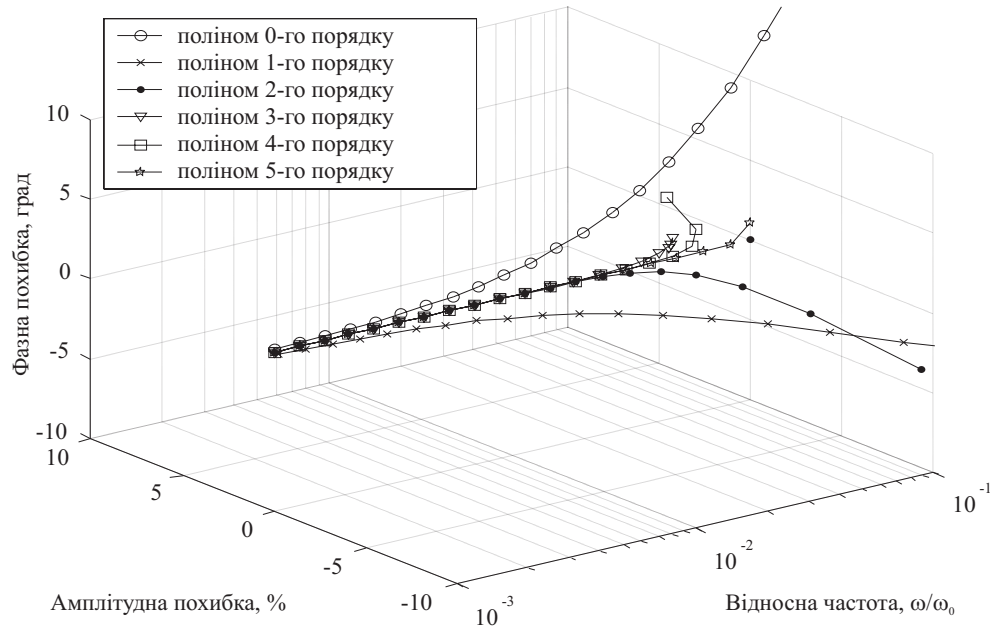


Рисунок 2 – Частотні похибки апроксимацій за явною схемою

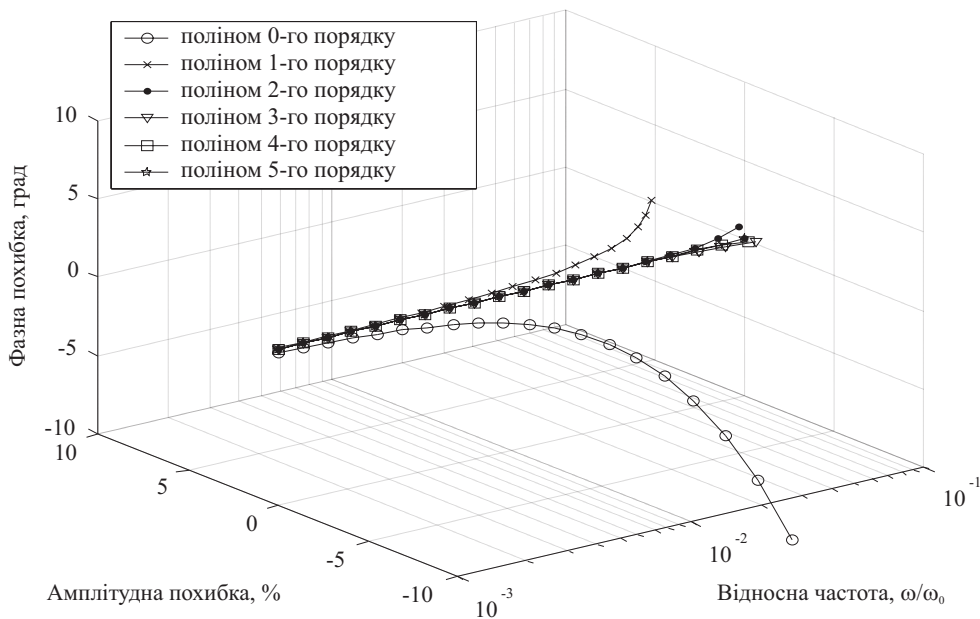


Рисунок 3 – Частотні похибки апроксимацій за неявною схемою

ВИСНОВКИ

Проведений аналіз частотних похибок апроксимаційних поліномів для процесу відновлення дискретного сигналу за його відліками показав:

1) відтворення сигналу за його дискретними відліками без фазних похибок забезпечує лише апроксимація поліномом першого порядку за неявною схемою (трапеціями);

2) у разі можливості вибору перевагу слід надавати лише неявним обчислювальним схемам побудови апроксимаційного полінома, які забезпечують значно менший рівень амплітудних і фазних частотних похибок;

3) порядок апроксимаційного полінома для забезпечення достатньо точного (амплітудна похибка не більше 5 %, фазна – не перевищує 2°) відтворення сигналу може бути обмежений другим-третьім порядком. Застосування апроксимацій вищих порядків невиправдане через:

– незначне зростання точності в нижній частині робочого діапазону (до 1/20 частоти квантування);

– різке зростання похибок у верхній частині робочого діапазону (1/20...1/2 частоти квантування), що може спричинити незадовільну роботу замкнених цифрових систем автоматичного регулювання.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. – М.: Физматгиз, 1963. – 456 с.
2. Ту Ю. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1964. – 703 с.
3. Изерман Р. Цифровые системы управления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 541 с.
4. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
5. Олссон Г., Пиани Дж. Цифровые системы автоматизации и управления. – СПб.: Невский Диалект, 2001. – 557 с.
6. Sanz R., Árzén K.-E. Trends in Software and Control // IEEE Control Systems Magazine. – 2003, June. – Pp. 12–15.
7. Мороз В. Застосування інтегралу згортки для синтезу цифрових систем // Вісник Хмельницького національного університету. Т. 2. Технічні науки. – 2007. – № 2. – С. 75–78.
8. Гришина Т. Ф. Определение передаточной функции линейной системы по кривой переходного процесса // Изв. вузов. Электромеханика. – 1969. – № 7. – С. 762–768.
9. Фильц Р. В. Математические основы теории электромеханических преобразователей. – К.: Наукова думка, 1979. – 208 с.
10. A. Alleyne, S. Brennan, B. Rasmussen, R. Zhang, Y. Zhang. Controls and Experiments: Lessons Learned // IEEE Control Systems Magazine. – 2003. – October. – Pp. 20–34.

Надійшла 20.03.2008

С использованием частотных характеристик проведено исследование рационального порядка аппроксимационного полинома для восстановления сигнала за его отсчетами.

The rational polynomial approximation order of sampling signal reconstruction was analyzed using Bode plots.

УДК 519.876.5

А. Г. Овский, В. А. Толок

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЗАКОНА ОРТОГОНАЛЬНОСТИ МАТРИЦ ПРЯМОГО И ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СОСТАВЛЕННЫХ ВЛАСОВЫМ В. З.

Авторы анализируют полученное В. З. Власовым [1] общее операторное решение трехмерных уравнений теории упругости, проверяют его основные свойства в системе программирования Maple. В разработанной программе доказывается закон ортогональности матриц прямого и обратного преобразований, составленных из полученных операторов. В работе используется упрощающая символическая запись в виде трансцендентных операционных формул, которая позволяет применять ЭВМ для построения математических моделей задач теории упругости.

© Овский А. Г., Толок В. А., 2008

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время, в связи с появлением новых конструктивных материалов, возникает необходимость в росте прочности машин и конструкций с параллельным снижением их себестоимости и расходов на их обслуживание. В связи с этим, остро встает вопрос о разработке новых математических методов для расчета напряженно-деформируемого состояния различных тел и конструкций [2].