ВИСНОВКИ

Проведений аналіз частотних похибок апроксимаційних поліномів для процесу відновлення дискретного сигналу за його відліками показав:

1) відтворення сигналу за його дискретними відліками без фазних похибок забезпечує лише апроксимація поліномом першого порядку за неявною схемою (трапеціями);

2) у разі можливості вибору перевагу слід надавати лише неявним обчислювальним схемам побудови апроксимаційного полінома, які забезпечують значно менший рівень амплітудних і фазних частотних похибок;

3) порядок апроксимаційного полінома для забезпечення достатньо точного (амплітудна похибка не більше 5 %, фазна – не перевищує 2°) відтворення сигналу може бути обмежений другим-третім порядком. Застосування апроксимацій вищих порядків невиправдане через:

– незначне зростання точності в нижній частині робочого діапазону (до 1/20 частоти квантування);

– різке зростання похибок у верхній частині робочого діапазону (1/20...1/2 частоти квантування), що може спричинити незадовільну роботу замкнених цифрових систем автоматичного регулювання.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. *Джури Э.* Импульсные системы автоматического регулирования. – М.: Физматгиз, 1963. – 456 с.
2. *Ту Ю.* Цифровые и импульсные системы автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1964. – 703 с.
3. *Изерман Р.* Цифровые системы управления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 541 с.
4. *Куо Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
5. *Олссон Г., Пиани Дж.* Цифровые системы автоматизации и управления. – СПб.: Невский Диалект, 2001. – 557 с.
6. *Sanz R., Årzén K.–E.* Trends in Software and Control // IEEE Control Systems Magazine. – 2003, June. – Pp. 12–15.
7. *Мороз В.* Застосування інтегралу згортки для синтезу цифрових систем // Вісник Хмельницького національного університету. Т. 2. Технічні науки. – 2007. – № 2. – С. 75–78.
8. *Гришина Т. Ф.* Определение передаточной функции линейной системы по кривой переходного процесса // Изв. вузов. Электромеханика. – 1969. – № 7. – С. 762–768.
9. *Фильц Р. В.* Математические основы теории электромеханических преобразователей. – К.: Наукова думка, 1979. – 208 с.
10. *A. Alleyne, S. Brennan, B. Rasmussen, R. Zhang, Y. Zhang.* Controls and Experiments: Lessons Learned // IEEE Control Systems Magazine. – 2003. – October. – Pp. 20–34.

Надійшла 20.03.2008

С использованием частотных характеристик проведено исследование рационального порядка аппроксимационного полинома для восстановления сигнала за его отсчетами.

The rational polynomial approximation order of sampling signal reconstruction was analyzed using Bode plots.

УДК 519.876.5

А. Г. Овский, В. А. Толок

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЗАКОНА ОРТОГОНАЛЬНОСТИ МАТРИЦ ПРЯМОГО И ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СОСТАВЛЕННЫХ ВЛАСОВЫМ В. З.

Авторы анализируют полученное В. З. Власовым [1] общее операторное решение трехмерных уравнений теории упругости, проверяют его основные свойства в системе программирования Maple. В разработанной программе доказывается закон ортогональности матриц прямого и обратного преобразований, составленных из полученных операторов. В работе используется упрощающая символическая запись в виде трансцендентных операционных формул, которая позволяет применять ЭВМ для построения математических моделей задач теории упругости.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время, в связи с появлением новых конструктивных материалов, возникает необходимость в росте прочности машин и конструкций с параллельным снижением их себестоимости и расходов на их обслуживание. В связи с этим, остро встает вопрос о разработке новых математических методов для расчета напряженно-деформируемого состояния различных тел и конструкций [2].

В рассматриваемой работе показана возможность реализации символики Власова В. З. в системе программирования Maple [3]. Проверены свойства линейных дифференциальных операторов, которые получаются в результате работы созданной авторами программы. С помощью этих операторов строится общее решение трехмерных дифференциальных уравнений теории упругости. В своей работе [1] В. З. Власов предполагал ортогональность матриц прямого и обратного преобразований исходя из физических характеристик изотропного упругого тела. Цель данной работы, с помощью аналитических преобразований, которые реализуются в системе MAPLE, доказать это предположение. Удовлетворение линейных дифференциальных операторов этому закону служит оценкой правильности получаемого в программе общего решения трехмерных дифференциальных уравнений теории упругости.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим общую задачу о равновесии твердого изотропного упругого тела, испытывающего малые деформации. Эта задача описывается в трехмерной прямоугольной Декартовой системе координат *x, y, z* известными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial z} = -\dfrac{\partial W}{\partial x} + X, \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = \dfrac{\partial W}{\partial y} + Y, \\ \dfrac{\partial W}{\partial z} = \dfrac{\nu}{1-\nu}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\right) + \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}Z, \\ \dfrac{\partial Z}{z} = \dfrac{\partial X}{\partial x} - \dfrac{\partial Y}{y} - c, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial z} = \dfrac{1+\nu}{1-\nu}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{2}{1-\nu}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) - \dfrac{\nu}{1-\nu}\dfrac{\partial Z}{\partial y} - b, \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{1+\nu}{1-\nu}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{2}{1-\nu}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) - \dfrac{\nu}{1-\nu}\dfrac{\partial Z}{\partial x} - a, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{2}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\dfrac{\partial U}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z}\right)\right], \\ \sigma_y = \dfrac{2}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\dfrac{\partial V}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z}\right)\right], \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial x}, \end{cases} \quad (2)$$

где ν − коэффициент Пуассона тела; $U = Gu$, $V = G\upsilon$, $W = Gw$ − пропорциональные величины для перемещений $u = u(x, y, z)$, $\upsilon = \upsilon(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$; $X = \tau_{xz}$, $Y = \tau_{yz}$, $Z = \sigma_z$ − обозначения напряжений.

Используем математический аппарат Власова [1], принимаем за искомые основные функции: U, V, W и напряжения X, Y, Z.

Решение системы (1) будем искать в виде бигармонических уравнений:

$$\begin{cases} U = U_0(x, y)\cos(\gamma z) + U_1(x, y)\sin(\gamma z) + \\ \quad + U_2 z\cos(\gamma z) + U_3 z\sin(\gamma z), \\ V = V_0(x, y)\cos(\gamma z) + V_1(x, y)\sin(\gamma z) + \\ \quad + V_2 z\cos(\gamma z) + V_3 z\sin(\gamma z), \\ W = W_0(x, y)\cos(\gamma z) + W_1(x, y)\sin(\gamma z) + \\ \quad + W_2 z\cos(\gamma z) + W_3 z\sin(\gamma z), \\ X = X_0(x, y)\cos(\gamma z) + X_1(x, y)\sin(\gamma z) + \\ \quad + X_2 z\cos(\gamma z) + X_3 z\sin(\gamma z), \\ Y = Y_0(x, y)\cos(\gamma z) + Y_1(x, y)\sin(\gamma z) + \\ \quad + Y_2 z\cos(\gamma z) + Y_3 z\sin(\gamma z), \\ Z = Z_0(x, y)\cos(\gamma z) + Z_1(x, y)\sin(\gamma z) + \\ \quad + Z_2 z\cos(\gamma z) + Z_3 z\sin(\gamma z), \end{cases} \quad (3)$$

где $U_0(x, y)$, $V_0(x, y)$, $W_0(x, y)$, $X_0(x, y)$, $Y_0(x, y)$, $Z_0(x, y)$ − функции, задаваемые на плоскости $z = 0$ (начальные);

$\gamma = \sqrt{\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}}$ − дифференциальный оператор от функций;

$\gamma z = z\sqrt{\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial \gamma^2}}$ − произведение переменной z на оператор;

$\sin(\gamma z) = \gamma z - \dfrac{\gamma^3 z^3}{3!} + \dfrac{\gamma^5 z^5}{5!} - \ldots$ − бесконечный операционный ряд, разложение тригонометрической функции *sin* в ряд Маклорена;

$\cos(\gamma z) = 1 - \dfrac{\gamma^2 z^2}{2!} + \dfrac{\gamma^4 z^4}{4!} - \ldots$ − бесконечный операционный ряд, разложение тригонометрической функции cos в ряд Маклорена.

Вводим упрощающую символику, операторы дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial}{\partial y}$ заменяем на α и β. Далее используя результаты работы [4] получаем решение системы (1) в MAPLE:

$$\begin{cases} U = L_{UU}U_0 + L_{UV}V_0 + \ldots + L_{UZ}Z_0, \\ V = L_{VU}V_0 + L_{VV}V_0 + \ldots + L_{VZ}Z_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z = L_{ZU}U_0 + L_{ZV}V_0 + \ldots + L_{ZZ}Z_0, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$L_{UU} := \frac{1}{2}\frac{(-2+2\nu)\cos(\gamma z)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{z\sin(\gamma z)\alpha^2}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{VU} := \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta z\sin(\gamma z)}{\gamma(-1+\nu)},$$

$$L_{WU} := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\alpha}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{(-1+2\nu)\alpha\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{XU} := \frac{\alpha^2 z\cos(\gamma z)}{-1+\nu} - \frac{(-\alpha^2+\beta^2\nu-\beta^2)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{YU} := \frac{z\cos(\gamma z)\alpha\beta}{-1+\nu} + \frac{\alpha\beta\sin(\gamma z)\nu}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{ZU} := -\frac{\gamma\sin(\gamma z)z\alpha}{-1+\nu},$$

$$L_{UV} := \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta z\sin(\gamma z)}{\gamma(-1+\nu)},$$

$$L_{VV} := \frac{1}{2}\frac{(-2+2\nu)\cos(\gamma z)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{\beta^2 z\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{WV} := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\beta}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{(-1+2\nu)\beta\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{XV} := \frac{z\cos(\gamma z)\alpha\beta}{-1+\nu} + \frac{\alpha\beta\sin(\gamma z)\nu}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{YV} := \frac{\beta^2 z\cos(\gamma z)}{-1+\nu} - \frac{(-\alpha^2+\nu\alpha^2-\beta^2)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{ZV} := -\frac{\gamma\sin(\gamma z)z\beta}{-1+\nu},$$

$$L_{UW} := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\alpha}{-1+\nu} - \frac{1}{2}\frac{(-1+2\nu)\alpha\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{VW} := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\beta}{-1+\nu} - \frac{1}{2}\frac{(-1+2\nu)\alpha\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{WW} := \frac{1}{2}\frac{(-2+2\nu)\cos(\gamma z)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{(-z\beta^2-z\alpha^2)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{XW} := -\frac{\gamma\sin(\gamma z)z\alpha}{-1+\nu},$$

$$L_{YW} := \frac{-\gamma\sin(\gamma z)z\beta}{-1+\nu},$$

$$L_{ZW} := -\frac{(z\alpha^2+z\beta^2)\cos(\gamma z)}{-1+\nu} - \frac{(-\beta^2-\alpha^2)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{UX} := -\frac{1}{4}\frac{\alpha^2 z\cos(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma^2} + \frac{1}{4}\frac{(4\nu\alpha^2+4\beta^2\nu-4\beta^2-3\alpha^2)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma^3},$$

$$L_{VX} := \frac{1}{4}\frac{\alpha\beta\sin(\gamma z)}{\gamma^3(-1+\nu)} - \frac{1}{4}\frac{\alpha\beta z\cos(\gamma z)}{\gamma^2(-1+\nu)},$$

$$L_{WX} := \frac{1}{4}\frac{\alpha z\sin(\gamma z)}{\gamma(-1+\nu)},$$

$$L_{XX} := \frac{1}{2}\frac{(-2+2\nu)\cos(\gamma z)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{z\sin(\gamma z)\alpha^2}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{YX} := \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta z\sin(\gamma z)}{\gamma(-1+\nu)},$$

$$L_{ZX} := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\alpha}{-1+\nu} - \frac{1}{2}\frac{(-1+2\nu)\alpha\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{UY} := \frac{1}{4}\frac{\alpha\beta\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)} - \frac{1}{4}\frac{\alpha\beta z\cos(\gamma z)}{\gamma^2(-1+\nu)},$$

$$L_{VY} := -\frac{1}{4}\frac{\beta^2 z\cos(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma^2} + \frac{1}{4}\frac{(4\beta^2\nu+4\nu\alpha^2-4\alpha^2-3\beta^2)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma^3},$$

$$L_{WY} := \frac{1}{4}\frac{\beta z\sin(\gamma z)}{\gamma(-1+\nu)},$$

$$L_{XY} := \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta z\sin(\gamma z)}{\gamma(-1+\nu)},$$

$$L_{YY} := \frac{1}{2}\frac{(-2+2\nu)\cos(\gamma z)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{\beta^2 z\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{ZY} := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\beta}{-1+\nu} - \frac{1}{2}\frac{(-1+2\nu)\beta\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{UZ} := \frac{1}{4}\frac{\alpha z\sin(\gamma z)}{\gamma(-1+\nu)},$$

$$L_{VZ} := \frac{1}{4}\frac{\beta z\sin(\gamma z)}{\gamma(-1+\nu)},$$

$$L_{WZ} := \frac{1}{4}\frac{z\cos(\gamma z)}{-1+\nu} + \frac{1}{4}\frac{(4\nu-3)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{XZ} := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\alpha}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{(-1+2\nu)\alpha\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{YZ} := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\beta}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{(-1+2\nu)\beta\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma},$$

$$L_{ZZ} = \frac{1}{2}\frac{(-2+2\nu)\cos(\gamma z)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{(-z\beta^2-z\alpha^2)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\gamma}. \quad (5)$$

Операторы L_{UU}, L_{UV}, ..., L_{ZZ} называются линейными дифференциальными операторами, которые относятся к начальным функциям $U_0(x, y)$, $V_0(x, y)$, $W_0(x, y)$, $X_0(x, y)$, $Y_0(x, y)$, $Z_0(x, y)$.

Множество из 36 операторов L_{UU}, L_{UV}, ..., L_{ZZ} определяет матрицу прямого линейного дифференциального преобразования, предложенную Власовым В. З.:

$$\begin{pmatrix} L_{UU} & L_{UV} & L_{UW} & L_{UX} & L_{UY} & L_{UZ} \\ L_{VU} & L_{VV} & L_{VW} & L_{VX} & L_{VY} & L_{VZ} \\ L_{WU} & L_{WV} & L_{WW} & L_{WX} & L_{WY} & L_{WZ} \\ L_{XU} & L_{XV} & L_{XW} & L_{XX} & L_{XY} & L_{XZ} \\ L_{YU} & L_{YV} & L_{YW} & L_{YX} & L_{YY} & L_{YZ} \\ L_{ZU} & L_{ZV} & L_{ZW} & L_{ZX} & L_{ZY} & L_{ZZ} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Умножив матрицу (6) на вектор $\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \\ X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$, получим формулы (4).

Если в формулах (4) считать U, V, W, X, Y, Z заданными, а U_0, V_0, W_0, X_0, Y_0, Z_0 искомыми, будем иметь обратное преобразование. В этом случае задача сводится к интегрированию системы из шести совместных дифференциальных уравнений в частных производных. Это сложная задача, но ее можно решить иначе, если выходить из физического содержания проблемы.

Принимая плоскость z = const за начальную, функции U, V, W, X, Y, Z за заданные, а функции U_0, V_0, W_0, X_0, Y_0, Z_0 – за искомые и предоставляя координате z отрицательное значение и исходя из формул операторов (одни из них изменяют знак при подстановке, а другие нет), учитывая физический смысл задачи, получим:

$$\begin{cases} U_0 = L_{UU}U + L_{UV}V + L_{UW}W - L_{UX}X - L_{UY}Y + L_{UZ}Z, \\ V_0 = L_{VU}U + L_{VV}V - L_{VW}W - L_{VX}X - L_{VY}Y + L_{VZ}Z, \\ W_0 = -L_{WU}U - L_{WV}V + L_{WW}W + L_{WX}X + L_{WY}Y - L_{WZ}Z, \\ X_0 = -L_{XU}U - L_{XV}V + L_{XW}W + L_{XX}X + L_{XY}Y - L_{XZ}Z, \\ Y_0 = -L_{YU}U - L_{YV}V + L_{YW}W + L_{YX}X + L_{YY}Y - L_{YZ}Z, \\ Z_0 = L_{ZU}U + L_{ZV}V - L_{ZW}W - L_{ZX}X - L_{ZY}Y + L_{ZZ}Z. \end{cases} \tag{7}$$

Эти формулы позволяют определить матрицу обратного линейного дифференциального преобразования, предложенную Власовым В. З. [1]. Вид матрицы обратного линейного дифференциального преобразования аналогичен виду матрицы (7) за исключением знаков перед операторами L_{UU}, L_{UV}, ..., L_{ZZ}:

$$\begin{pmatrix} L_{UU} & L_{UV} & -L_{UW} & -L_{UX} & -L_{UY} & L_{UZ} \\ L_{VU} & L_{VV} & -L_{VW} & -L_{VX} & -L_{VY} & L_{VZ} \\ -L_{WU} & -L_{WV} & L_{WW} & L_{WX} & L_{WY} & -L_{WZ} \\ -L_{XU} & -L_{XV} & L_{XW} & L_{XX} & L_{XY} & -L_{XZ} \\ -L_{YU} & -L_{YV} & L_{YW} & L_{YX} & L_{YY} & -L_{YZ} \\ L_{ZU} & L_{ZV} & -L_{ZW} & -L_{ZX} & -L_{ZY} & L_{ZZ} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В книге Власова [1] на странице 369 авторами была исправлена опечатка: оператор L_{XY} брался со знаком «–», в то время как нужно его брать со знаком «+». Благодаря доказательству закона ортогональности и соответствующему выводу программы, она была исправлена. Подставляя функции U_0, V_0, W_0, X_0, Y_0, Z_0, которые определяются формулами (7) в правые части равенств прямого преобразования (4) получим тождественные уравнения. Этот свойство выполняется и наоборот: для функций U, V, W, X, Y, Z. Чтобы убедиться в этом, необходимо формулы (4) подставить в (7). Отсюда вытекает, что преобразования (4) и (7) ортогональные. Убедиться в правильности обратного линейного дифференциального преобразования можно с помощью умножения двух матриц (6) и (8). В результате получим матрицу с единичной главной диагональю. Определители матриц прямого и обратного преобразований равны 1.

Операторы преобразования (4) являются взаимными (в этом можно убедиться, проанализировав результаты работы программы), т. е.:

$$L_{VU} = L_{XY},\ L_{UV} = L_{YX} \text{ и т. д.} \tag{9}$$

Поэтому матрицы преобразований имеют симметричную структуру с диагоналями симметрии, которые проходят через правый верхний угол и левый нижний угол каждой из матриц [1].

Взаимность операторов L_{VU} и L_{UV} и симметричных с ними операторов L_{XY} и L_{YX} преобразований (4) и (7) обуславливается изотропностью упругого тела относительно оси z. Мы получаем таким образом для операторов прямого и обратного преобразований следующие выражения:

$$\begin{cases} L_{YU} = L_{XV}, L_{ZU} = L_{XW}, L_{WU} = L_{XZ}, \\ L_{VU} = L_{XY}, L_{UU} = L_{XX}, L_{UV} = L_{YX}, \\ L_{UW} = L_{ZX}, L_{UZ} = L_{WX}, L_{UY} = L_{VX}. \end{cases} \tag{10}$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Результатом работы программы являются: построенные и аналитически выведенные дифференциальные операторы Власова в виде трансцендентных операционных формул (5). А также полностью аналитически проверенное свойство ортогональности матриц прямого и обратного преобразований. Результат проверки ортогональности для начальной функции напряжения X_0 показан ниже, рис. 1. По подобной схеме производятся проверки для остальных функций. Выражения вывода программы представлены в машинно-аналитической форме. К сожалению, система не производит полное приведение подобных членов, поэтому форма представления результатов усложнена.

Программа автоматически выполняет также перемножение матриц прямого и обратного преобразований и вычисляет определители каждой из матриц. Результаты этих операций в статье не приведены, в статье показана основная схема, по которой происходит аналитическое упрощение для каждой из функций.

Результаты на рис. 1 требуют дополнительного анализа, так как мы имеем дело с операторно-символическим способом записи. Однако согласно с методом начальных функций Власова В. З. [1] в формулах (4) и (5) при разложении в ряд Маклорена операционных функций выполняется умножение оператора на соответствующую начальную функцию, а потом производится

«Проверка свойства ортогональности»

$$X_0 := \left(\left(\left(\frac{2\nu}{(-1+\nu)^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - \frac{2}{(-1+\nu)^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)z\alpha^3 + \left(\left(\frac{2\nu}{(-1+\nu)^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - \frac{2}{(-1+\nu)^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)z\beta^2 +\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{(-1+\nu)^2} - \frac{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\nu}{(-1+\nu)^2}\right)z\right)\alpha\right)\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)w0 +$$

$$+\left(\left(\left(-\frac{\alpha^2}{4(-1+\nu)^2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{4(\alpha^2+\beta^2)(-1+\nu)^2} + \frac{\alpha^4}{4(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)}\right)z^2 +\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\nu^2}{(-1+\nu)^2} + \frac{1}{(-1+\nu)^2} - \frac{2\nu}{(-1+\nu)^2}\right)\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2 +$$

$$+\left(\left(\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^{(3/2)}(-1+\nu)^2} - \frac{\nu}{(\alpha^2+\beta^2)^{(3/2)}(-1+\nu)^2}\right)z\alpha^4 +\right.$$

$$+\left(\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^{(3/2)}(-1+\nu)^2} - \frac{\nu}{(\alpha^2+\beta^2)^{(3/2)}(-1+\nu)^2}\right)z\beta^2 +$$

$$\left.+\left(\frac{\nu}{(-1+\nu)^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - \frac{1}{(-1+\nu)^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)z\right)\alpha^2\Bigg)\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z) +$$

$$+\left(\left(-\frac{\alpha^2}{4(-1+\nu)^2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{4(\alpha^2+\beta^2)(-1+\nu)^2} + \frac{\alpha^4}{4(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)}\right)z^2 -\right.$$

$$-\frac{2\beta^4\nu}{(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)^2} - \frac{3\alpha^2\beta^2\nu}{(\alpha^2+\beta^2)^2(-1+\nu)^2} + \frac{7\beta^2\alpha^2}{4(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)^2} - \frac{\alpha^2\nu}{(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)} -$$

$$\left.-\frac{\nu\alpha^4}{(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)^2} + \frac{\nu^2\alpha^2\beta^2}{(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)^2} + \frac{3\alpha^4}{4(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)^2}\right)\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2 xx0 +$$

$$+\left(\left(-\frac{\beta\alpha}{4(-1+\nu)^2} + \frac{\beta^3\alpha}{4(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)} + \frac{\alpha^3\beta}{4(\alpha^2+\beta^2)(-1+\nu)^2}\right)z^2\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2 +\right.$$

$$+\left(\left(\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^{(3/2)}(-1+\nu)^2} - \frac{\nu}{(\alpha^2+\beta^2)^{(3/2)}(-1+\nu)^2}\right)z\beta\alpha^3 +\right.$$

Рисунок 1 – Проверка свойств ортогональности для начальных функций

$$+\left(\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^{(3/2)}(-1+\nu)^2}-\frac{\nu}{(\alpha^2+\beta^2)^{(3/2)}(-1+\nu)^2}\right)z\beta^3+$$

$$+\left(\frac{\nu}{(-1+\nu)^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}-\frac{1}{(-1+\nu)^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)z\beta\Bigg)\alpha\Bigg)\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)+$$

$$+\Bigg(\Bigg(-\frac{\beta\alpha}{4(-1+\nu)^2}+\frac{\beta^3\alpha}{4(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)}+\frac{\alpha^3\beta}{4(\alpha^2+\beta^2)(-1+\nu)^2}\Bigg)z^2-\frac{\alpha\beta\nu}{(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)}-\frac{\alpha^3\beta}{4(\alpha^2+\beta^2)^2(-1+\nu)^2}+$$

$$+\frac{\alpha^3\beta\nu}{(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)^2}-\frac{\beta^3\nu^2\alpha}{(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)^2}-\frac{\beta^3\alpha}{4(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)^2}\Bigg)\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2\Bigg)yy0+$$

$$+\Bigg(\Bigg(\frac{z^2\alpha^3}{4(-1+\nu)^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\left(\frac{z^2\beta^2}{4(-1+\nu)^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}-\frac{z^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{4(-1+\nu)^2}\right)\alpha\Bigg)+\frac{\beta^3\alpha\nu}{4(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)^2}-\frac{\nu^2\alpha^3\beta}{(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)^2}+$$

$$+\frac{\alpha\beta}{4(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)}+\frac{\alpha\nu^2\beta}{(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)}\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)+\left(\frac{\beta^2\alpha\nu}{(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)}-\frac{3\alpha\beta^2}{4(\alpha^2+\beta^2)(-1+\nu)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\nu\alpha}{(-1+\nu)^2}+\frac{3\alpha}{4(-1+\nu)^2}+\frac{\alpha^3\nu}{(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)}-\frac{3\alpha^3}{4(-1+\nu)^2(\alpha^2+\beta^2)}\right)z\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2\Bigg)zz0$$

«После упрощений»

$$U_0:=\left(\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2+\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2\right)u0$$

$$V_0:=\left(\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2+\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2\right)v0$$

$$W_0:=\left(\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2+\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2\right)w0$$

$$X_0:=\left(\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2+\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2\right)xx0$$

$$Y_0:=\left(\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2+\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2\right)yy0$$

$$Z_0:=\left(\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2+\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)^2\right)zz0$$

«В итоге»

$U_0 := u0$ $V_0 := v0$ $W_0 := w0$ $X_0 := xx0$ $Y_0 := yy0$ $Z_0 := zz0$

Продолжение рисунка 1

$$\mathrm{Res} := \left(\sin(\mathrm{gam}\ z)^2 + \cos(\mathrm{gam}\ z)^2\right) u0(x, y)$$

Прямое преобразование Фурье по переменной z:

$$f2\sin\ :=\ \frac{1}{4}u0\left(-\,\mathrm{fourier}(e^{(-2I\mathrm{gam}\ z)}, z, \mathrm{sig}) - \mathrm{fourier}(e^{(2I\mathrm{gam}\ z)}, z, \mathrm{sig}) + 4\pi\,\mathrm{Dirac}(\mathrm{sig})\right)$$

$$f2\cos\ :=\ \frac{1}{4}u0\left(\mathrm{fourier}(e^{(-2I\mathrm{gam}\ z)}, z, \mathrm{sig}) + \mathrm{fourier}(e^{(2I\mathrm{gam}\ z)}, z, \mathrm{sig}) + 4\pi\,\mathrm{Dirac}(\mathrm{sig})\right)$$

Сумма преобразований

$$\mathrm{Res} := \frac{1}{4}u0\left(-\,\mathrm{fourier}(e^{(-2I\mathrm{gam}\ z)}, z, \mathrm{sig}) - \mathrm{fourier}(e^{(2I\mathrm{gam}\ z)}, z, \mathrm{sig}) + 4\pi\,\mathrm{Dirac}(\mathrm{sig})\right) +$$

$$+\frac{1}{4}u0\left(\mathrm{fourier}(e^{(-2I\mathrm{gam}\ z)}, z, \mathrm{sig}) + \mathrm{fourier}(e^{(2I\mathrm{gam}\ z)}, z, \mathrm{sig}) + 4\pi\,\mathrm{Dirac}(\mathrm{sig})\right)$$

$$\mathrm{Res} := 2u0\,\pi\,\mathrm{Dirac}(\mathrm{sig})$$

Обратное преобразование Фурье по z

$$gt0 = u0$$

Рисунок 2 – Доказательство закона ортогональности

«После упрощений»

$$U\_ := \left(\sin\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)^2 + \cos\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)^2\right)U$$

$$V\_ := \left(\sin\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)^2 + \cos\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)^2\right)V$$

$$W\_ := \left(\sin\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)^2 + \cos\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)^2\right)W$$

$$X\_ := \left(\sin\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)^2 + \cos\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)^2\right)X$$

$$Y\_ := \left(\sin\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)^2 + \cos\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)^2\right)Y$$

$$Z\_ := \left(\sin\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)^2 + \cos\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)^2\right)Z$$

«В итоге»

$$U\_ := U \quad V\_ := V \quad W\_ := W \quad X\_ := X \quad Y\_ := Y \quad Z\_ := Z$$

Рисунок 3 – Проверка свойств ортогональности для функций, получаемых через начальные функции замена на дифференциалы. В силу этого, с помощью преобразования Фурье для любого z в созданной программе доказываются равенства из рис. 1. Все это выполняет программа, результаты доказательства для U_0 на рис. 2.

Как видно на результат, существенно влияет знак, стоящий перед преобразованием Фурье каждой из операционных функций, а форма самого преобразования не учитывается, так как все преобразования взаимно упрощаются. Остается лишь преобразование Фурье для функции u_0.

Аналогично для U (рис. 3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного анализа было проверено свойство ортогональности матриц прямого и обратного преобразований. Как следствия из этого, установлены свойства дифференциальных операторов, представимых в виде тригонометрических операционных функций. Эти функции разлагаются в символические бесконечные ряды Маклорена с производными высоких порядков.

Благодаря проверенным выше свойствам в задачах теории упругости можно производить операции с разлагаемыми операционными трансцендентными функциями, как с обычными функциями. На этой основе можно построить новую теорию операторно-символического исчисления для задач теории упругости в двумерной и трехмерной постановке. Но основной смысл предложенного к рассмотрению доказательства состоит в следующем: после проверки ортогональности операторных формул (7) и (8) можно переходить к рассмотрению вариационного принципа минимума потенциальной энергии. Этот принцип, вместе с использованием формул для перемещений и напряжений за методом Власова позволит решать более широкий класс задач теории упругости на системе программирования Maple.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* балки плиты и оболочки на упругом основании. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 491 с.
2. *Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Талаковский Д. В.* Теория упругости и пластичности. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – с.
3. *Дьяконов В. П.* Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.: ил.
4. *Толок В. А., Шапар В. В.* Операторно-символьные ряды Власова В. З. в решении задач теории упругости в системе Maple // Гідроакустичний журнал. – 2006. – № 3. – С. 66–74.

Надійшла 1.04.2008

Автори аналізують отримане Власовим В. З. [1] загальне операторне рішення трьохвимірних рівнянь теорії пружності, перевіряють його основні властивості в системі програмування Maple. У розробленій програмі доводиться закон ортогональності матриць прямого і зворотного перетворень, складених з отриманих операторів. У роботі використовується спрощуючий символічний запис у вигляді трансцендентних операційних формул, який дозволяє застосовувати ЕОМ для побудови математичних моделей задач теорії пружності.

Authors analyse got Vlasov V. Z. [1] general statement decision of freedimension equations of theory of resiliency, check up his basic properties in the system of programming of Maple. Law of ortogonal of matrices of direct and reverse transformations, made in obedience to work of Vlasov V. Z. is proved in the developed program. A simplifying symbolic record as transcendent operating formulas, which allows to apply COMPUTER for the construction of mathematical models of tasks of theory of resiliency, is in-process utillized.

УДК 539.3

Е. С. Решевская, С. Н. Гребенюк

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ИНТЕРПОЛИРУЮЩИМ ПОЛИНОМОМ ЭРМИТА

Описана методика построения конечного элемента на основе интерполяционного полинома Эрмита, реализованная в подсистеме «КОЭРМА» программного комплекса «МІРЕЛА+», предназначенного для решения задач теории упругости методом конечных элементов. Для проверки достоверности результатов представлен тестовый пример в качестве нагружаемой плиты, закрепленной по контуру.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, применение метода конечных элементов в механике деформируемого твердого тела позволяет решать самые разнообразные и сложные задачи теории упругости. Построение решения по данному