

замена на дифференциалы. В силу этого, с помощью преобразования Фурье для любого z в созданной программе доказываются равенства из рис. 1. Все это выполняет программа, результаты доказательства для U_0 на рис. 2.

Как видно на результат, существенно влияет знак, стоящий перед преобразованием Фурье каждой из операционных функций, а форма самого преобразования не учитывается, так как все преобразования взаимно упрощаются. Остается лишь преобразование Фурье для функции u_0 .

Аналогично для U (рис. 3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного анализа было проверено свойство ортогональности матриц прямого и обратного преобразований. Как следствия из этого, установлены свойства дифференциальных операторов, представимых в виде тригонометрических операционных функций. Эти функции разлагаются в символические бесконечные ряды Маклорена с производными высоких порядков.

Благодаря проверенным выше свойствам в задачах теории упругости можно производить операции с разлагаемыми операционными трансцендентными функциями, как с обычными функциями. На этой основе можно построить новую теорию операторно-символического исчисления для задач теории упругости в двумерной и трехмерной постановке. Но основной смысл предложенного к рассмотрению доказательства состоит в следующем: после проверки ортогональности операторных формул (7) и (8) можно переходить к рассмотрению вариационного принципа минимума по-

тенциальной энергии. Этот принцип, вместе с использованием формул для перемещений и напряжений за методом Власова позволит решать более широкий класс задач теории упругости на системе программирования Maple.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. балки плиты и оболочки на упругом основании. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 491 с.
2. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Талаковский Д. В. Теория упругости и пластичности. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – с.
3. Дьяконов В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.: ил.
4. Толок В. А., Шапар В. В. Операторно-символьные ряды Власова В. З. в решении задач теории упругости в системе Maple // Гідроакустичний журнал. – 2006. – № 3. – С. 66–74.

Надійшла 1.04.2008

Автори аналізують отримане Власовим В. З. [1] загальне операторне рішення трьохвимірних рівнянь теорії пружності, перевіряють його основні властивості в системі програмування Maple. У розробленій програмі доводиться закон ортогональності матриць прямого і зворотного перетворень, складених з отриманих операторів. У роботі використовується спрощуючий символічний запис у вигляді трансцендентних операційних формул, який дозволяє застосовувати ЕОМ для побудови математичних моделей задач теорії пружності.

Authors analyse got Vlasov V. Z. [1] general statement decision of freedimension equations of theory of resiliency, check up his basic properties in the system of programming of Maple. Law of ortogonal of matrices of direct and reverse transformations, made in obedience to work of Vlasov V. Z. is proved in the developed program. A simplifying symbolic record as transcendent operating formulas, which allows to apply COMPUTER for the construction of mathematical models of tasks of theory of resiliency, is in-process utilized.

УДК 539.3

Е. С. Решевская, С. Н. Гребенюк

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ИНТЕРПОЛИРУЮЩИМ ПОЛИНОМОМ ЭРМИТА

Описана методика построения конечного элемента на основе интерполяционного полинома Эрмита, реализованная в подсистеме «КОЭРМА» программного комплекса «МІРЕЛА+», предназначенного для решения задач теории упругости методом конечных элементов. Для проверки достоверности результатов представлен тестовый пример в качестве нагружаемой плиты, закрепленной по контуру.

© Решевская Е. С., Гребенюк С. Н., 2008

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, применение метода конечных элементов в механике деформируемого твердого тела позволяет решать самые разнообразные и сложные задачи теории упругости. Построение решения по данному

методу является достаточно громоздким, особенно в двух и трехмерных случаях. В связи с чем необходимо применение ЭВМ. В настоящее время для облегчения данного процесса разработано ряд программных комплексов, позволяющих автоматизировать процесс построения решения задач методом конечных элементов. Среди них выделяют: PLAXIS 3D Foundation [1], ЛИРА-Windows [2], COSMOSWORKS [3], MSC.Nastran [4], ИСПА [5], ANSYS [6], ASKA [7] и др. Большинство из выше перечисленных комплексов являются широко специализированными дорогостоящими коммерческими системами. Во всем мире большой объем задач решается по данным программам. Однако для правильности проведения расчетов и получения приемлемых результатов необходимо обладать специализированными навыками. Что связано с большой затратой времени и средств.

В настоящее время, в связи с широким применением в машиностроении резиновых виброизолирующих элементов, является актуальной задача расчета напряженно-деформированного состояния эластомерных конструкций. Материалы данного класса обладают отличительной особенностью – слабой сжимаемостью (коэффициент Пуассона имеет значения в интервале $0,49 \leq \nu < 0,5$). Учет данной особенности при решении задачи методом конечных элементов приводит к вырожденности матрицы системы уравнений. Возникает необходимость в модификации метода конечных элементов, позволяющей обойти данную особенность.

В широко специализированных вычислительных комплексах, таких как ANSYS, MSC.Nastran, COSMOSWORKS, для решения возникающей проблемы предложены различные вариации для выражения потенциала упругой энергии деформации для эластомера с различными формами добавки члена, учитывающего слабую сжимаемость. Однако, в большинстве из существующих систем, основанных на методе конечных элементов, все же не предусмотрен учет слабой сжимаемости эластомеров.

Система «МИРЕЛА+» [8], разработанная на базе вычислительного комплекса КОДЕТОМ, является специализированной системой по расчету эластомерных конструкций на прочность, разрушение и долговечность, предназначена для расчета напряженно-деформированного состояния эластомерных конструкций. Программный комплекс обладает возможностью автоматизированного задания дискретной области исследуемого трехмерного объекта, физико-механических характеристик материала. Комплекс основан на единой методике расчета эластомерных элементов методом конечных элементов, позволяющей учитывать жесткие смещения, эффект ложного сдвига и слабую сжимаемость данного материала.

Данная система позволяет производить расчеты эластомерных конструкций различной геометрической

формы. Так, в работе [9] реализован расчет жесткостных характеристик эластомерных виброизоляторов сложной формы. Одним из недавних разработок является реализация расчета контактных задач. Моделирование контактных взаимодействий осуществляется путем задания условий непроникновения контактирующих тел. Решение контактных задач взаимодействия эластомерных виброизоляторов и абсолютно жесткой плиты изложено в работах [10,11].

В рамках системы «МИРЕЛА+» была создана подсистема «КОЭРМА», в которой реализован подход решения задач теории упругости методом конечных элементов, основанном на интерполяционном полиноме Эрмита, учитывающем перемещения и их производные.

Взаимосвязь программ системы КОЭРМА с частями комплекса МИРЕЛА+ схематически изображена на рис. 1.

В приведенной системе реализован расчет конструкций методом конечных элементов. Процесс расчета

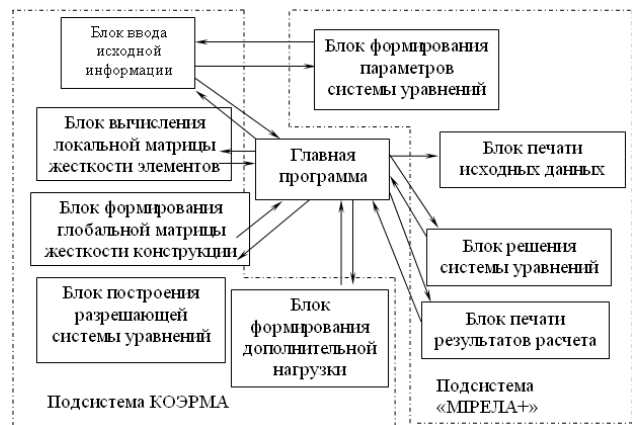


Рисунок 1

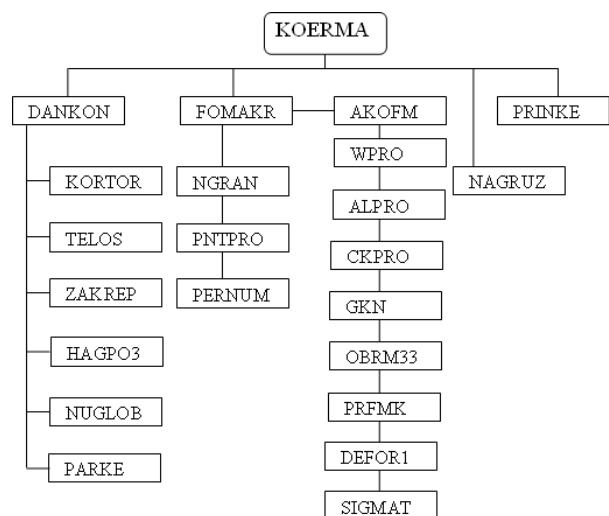


Рисунок 2

состоит из трех взаимосвязанных этапов. На первом этапе задается конечно-элементная дискретизация расчетной схемы, топология и граничные условия исследуемого объекта, физические характеристики материала. На втором этапе рассчитываются локальные матрицы жесткости конечных элементов, строится глобальная матрица жесткости конструкции, составляется разрешающая система уравнений, находится ее решение. Определяются поля деформаций, напряжений, перемещений и их производных и их значения заносятся в файл. Данная функциональная схема представлена на рис. 2.

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА ЭРМИТА

Метод конечных элементов основан на введении аппроксимирующей функции максимально приближенной к искомой. Данная функция зависит от формы элемента и числа узловых точек. Наиболее распространенным типом аппроксимации являются полиномы, число членов которых равно числу степеней свободы данного конечного элемента.

Интерполирующие функции, обеспечивающие непрерывность поля перемещений относятся к интерполирующим функциям нулевого уровня, если же в элементе непрерывны и первые производные, то обеспечивается C^1 -непрерывность, и, соответственно, при учете непрерывности производных высших порядков – C^r непрерывность. Среди полиномов первого типа следует выделить следующие полиномы: Лагранжа [9], Ньютона [13], Серендипа [9] и др. Кроме того, используется широкий класс ортогональных полиномов, которые вводятся как разложения некоторых функций в обобщенные ряды Фурье [14]: Якоби, Гегенбауэра, Чебышева, Лежандра, Лагера.

Конечно-элементные соотношения, построенные на основе перечисленных многочленов, имеют ряд положительных свойств. Одним из таких свойств является непрерывность функций формы при переходе через границу между элементами. Однако данные элементы не учитывают значения производных интерполируемых величин в узлах и, как следствие, внутри элемента. С целью получения интерполяции, учитывающей производные, для вывода функций форм используется аппроксимирующий полином Эрмита. Так, в работах [15, 16] интерполяционная формула Эрмита представлена через квадраты коэффициентов полинома Лагранжа. Для двумерных прямоугольных конечных элементов, называемых эрмитовыми бикубическими элементами, были получены соотношения для коэффициентов полинома Эрмита [17], удовлетворяющего непрерывности типа C_1 . С этой целью были за-

даны в узлах элемента значения $u(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

В работе [17] построен интерполирующий полином Эрмита для плоского треугольного конечного элемента, обеспечивающего непрерывность первых производных при переходе от элемента к элементу.

Для построения трехмерной эрмитовой интерполяции необходимо учитывать значения перемещений и семи их частных производных в каждом из восьми узлов объемного параллелепипедного элемента. При использовании данного полинома Эрмита в методе конечных элементов строится матрица жесткости. Для одного конечного элемента размерность 512×512 . Это приводит к большим затратам машинного времени при решении системы разрешающих уравнений, построенных на основе глобальной матрицы жесткости, особенно при расчетах конструкций сложной геометрической формы.

Для уменьшения размерности матрицы жесткости без существенной потери точности решения в качестве параметров эрмитовой интерполяции были приняты узловые перемещения и значения частной производной перемещений. Построен аппроксимирующий многочлен Эрмита, обеспечивающий непрерывность функций $u(x, y, z)$, $\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z}$:

$$P_3(x, y, z) = \sum_{i=0}^8 \left(u_i N_{000i}^{1,1,1} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_i N_{001i}^{1,1,1} \right). \quad (1)$$

Рассмотрен специальный конечный элемент эрмитового семейства параллелепипедной формы. Начало местной системы координат (ξ, η, μ) помещено в центр тяжести элемента, а оси координат расположены параллельно ребрам параллелепипеда. Размеры конечного элемента примем равными $1 \times 1 \times 1$.

На основании принятой аппроксимации полиномом Эрмита (1) были выведены основные соотношения моментной схемы метода конечных элементов для построения матрицы жесткости.

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛАСТОМЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В СИСТЕМЕ «КОЭРМА»

Для численного исследования точности результатов, полученных при применении вышеуказанной методики, рассмотрим задачи, решения которых были получены аналитически и сравним данные решения со значениями, полученными традиционной и моментной схемой лагранжевого [19] и эрмитового элементов.

Задача 1. Расчет плиты квадратной формы, которая защемлена по контуру, под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки.

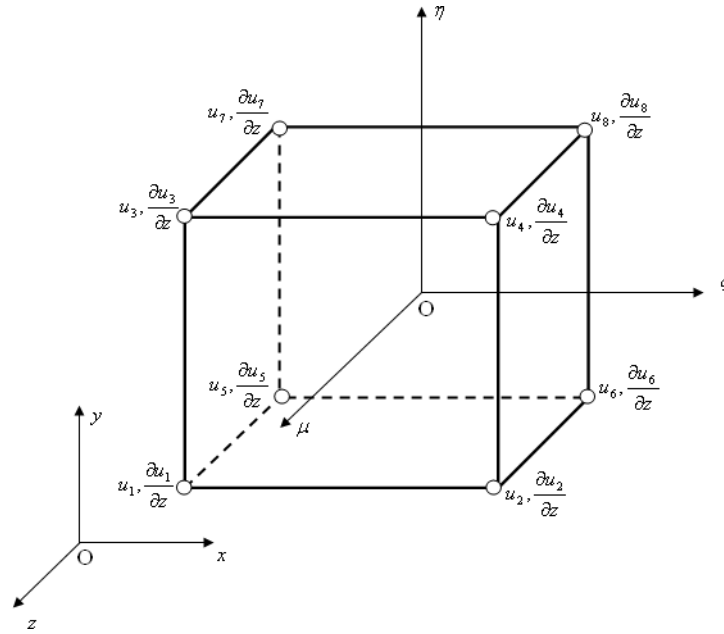


Рисунок 3

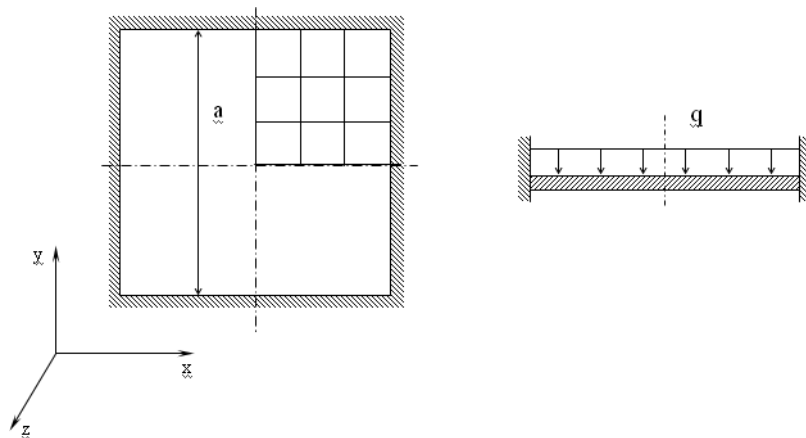


Рисунок 4

Размеры плиты: $a = 0,2$ м, толщина плиты $t = 0,01$ м, поверхностная нагрузка $q = 0,002$ МПа, модуль упругости материала балки $E = 2$ МПа. Расчетная схема изображена на рис. 4.

В связи с тем, что в расчетах кроме аппроксимации перемещений была применена также аппроксимация производной искомой функции по направлению оси z , исследуемая конструкция размещена так, чтобы направление нагрузки, действующей на плиту, совпадало с направлением оси z . Таким образом, будет задаваться производная функции перемещений по направлению наибольших перемещений, что позволит получить более точный результат.

Полученные данные были сравнены со следующими аналитическими решениями: максимальный прогиб в центре плиты [20] при $\nu = 0,3 - w = 2,42 \times 10^{-2}$ м, при $\nu = 0,49 - w = 1,87 \times 10^{-2}$ м, при $\nu = 0,499 - w = 1,85 \times 10^{-2}$ м, при $\nu = 0,4999 - w = 1,848 \times 10^{-2}$ м.

На рис. 5 приведены графики зависимости величины прогиба плиты от коэффициента Пуассона.

Распределение перемещений, возникающих в плите, защемленной по контуру, под действием равномерно распределенной нагрузки приведено на рис. 6.

В табл. 1 приведены результаты расчетов методом конечных элементов при интерполяции искомой величины полиномом Лагранжа и Эрмита.

Таблица 1 – Результаты расчета прямоугольной плиты, защемленной по контуру

Сетка разбиения	Коэффициент Пуассона, ν	МКЭ на основе аппроксимирующего полинома Лагранжа		МКЭ на основе аппроксимирующего полинома Эрмита	
		$w \times 10^{-2}$, м	ε , %	$w \times 10^{-2}$, м	ε , %
5×5×3	0,3	0,34	85,1	0,34	85,1
7×7×5		0,61	73,2	0,65	71,4
8×8×5		0,7	69,2	0,76	66,6
11×11×7		1,13	50,3	1,37	39,8
13×13×9		1,96	13,8	2,0	12,1
5×5×3	0,49	0,37	80,5	0,4	78,9
7×7×5		0,62	67,4	0,8	57,9
8×8×5		0,62	67,4	0,96	49,5
11×11×7		1,05	44,7	1,82	4,2
13×13×9		1,79	5,8	1,84	3,1
5×5×3	0,499	0,37	80,3	0,4	78,7
7×7×5		0,62	67,0	0,8	57,4
8×8×5		0,66	64,8	0,96	48,9
11×11×7		1,06	43,5	1,81	3,6
13×13×9		1,66	11,6	1,82	3,1
5×5×3	0,4999	0,37	80,3	0,4	78,7
7×7×5		0,62	66,9	0,8	57,3
8×8×5		0,67	64,3	0,96	48,8
11×11×7		1,06	43,5	1,82	2,9
13×13×9		1,59	15,2	1,83	2,4

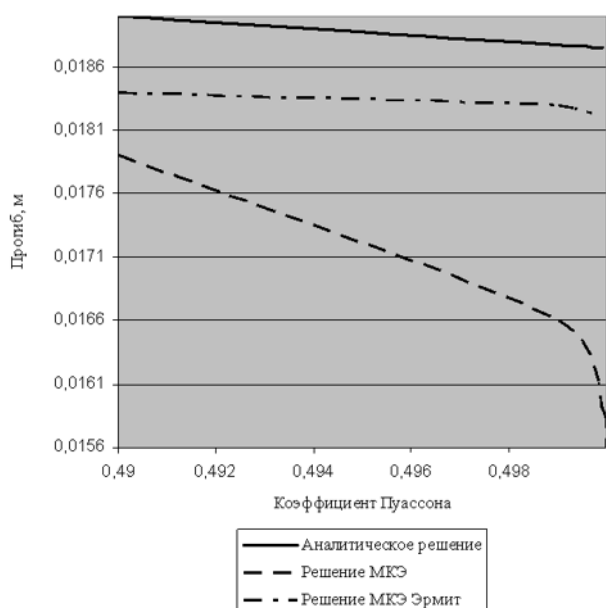


Рисунок 5

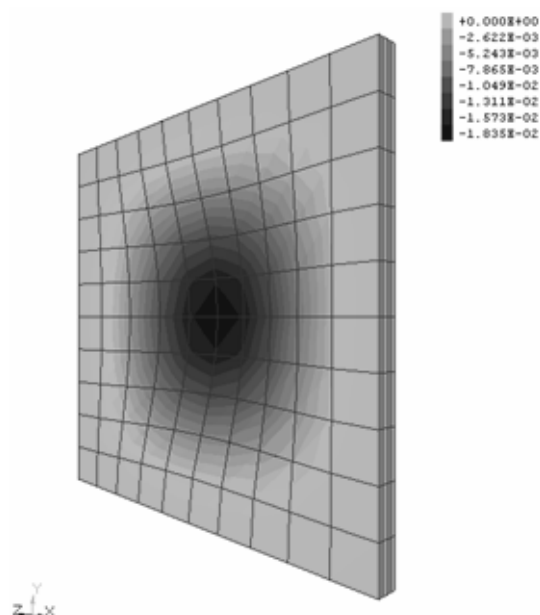


Рисунок 6

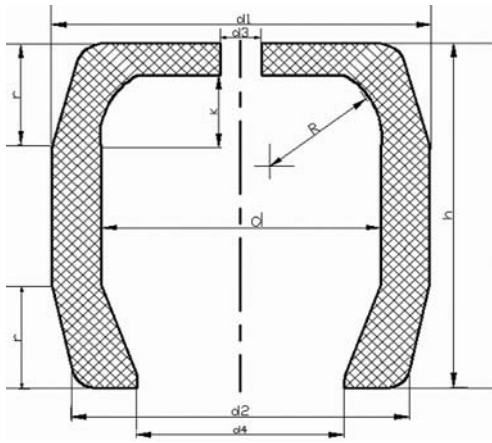


Рисунок 7

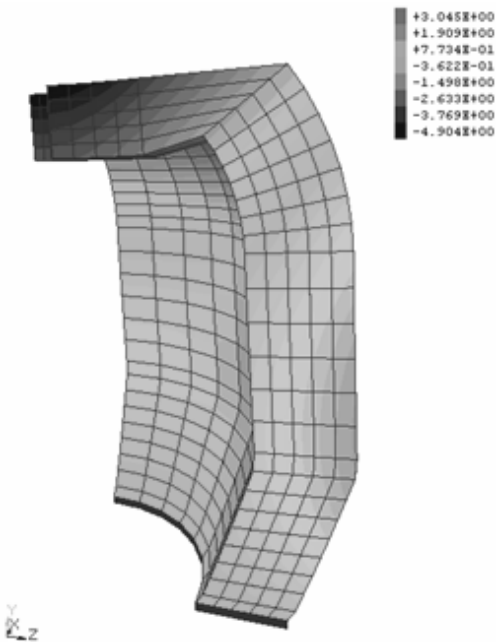


Рисунок 8

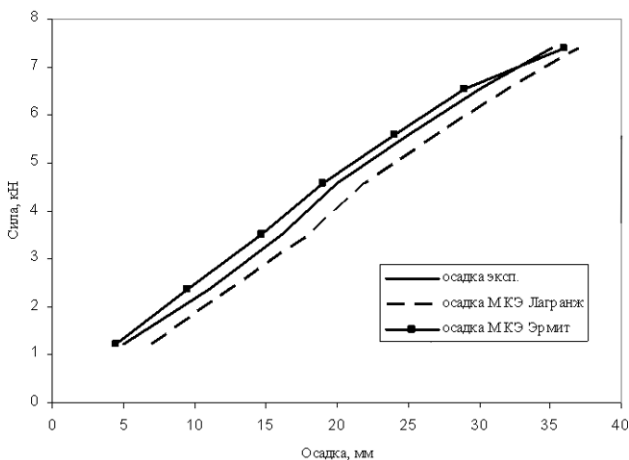


Рисунок 9

Задача 2. Проведен расчет значений осадок эластомерного виброизолятора типа ВР-203 (рис. 7, 8) при различных значениях нагрузок. Марка резины – 2959, модуль сдвига $G_0 = 1,76 \times 10^6$ Па, $\nu = 0,49$. Размеры: $r = 52$ мм, $d = 130$ мм, $d_1 = 200$ мм, $d_2 = 170$ мм, $d_3 = 32$ мм, $d_4 = 90$ мм, $h = 180$ мм, $R = 60$ мм, $k = 38$ мм.

Полученные результаты были сопоставлены с экспериментальными данными (рис. 9). Сравнение значений осадок, рассчитанных при различных усилиях приложенных к виброизолятору, показывает, что метод конечных элементов на основе полинома Эрмита дает лучший результат, чем конечный элемент, построенный с применением полинома Лагранжа.

ВЫВОДЫ

Проведенные расчеты в подсистеме «КОЭРМА» показывают, что метод конечных элементов, основанный на аппроксимации полей перемещений полиномом Эрмита, дает лучший результат, чем при аппроксимации полиномом Лагранжа. В том числе и для слабосжимаемых материалов.

Вышеуказанное утверждение было подтверждено расчетами, проведенными для эластомерной конструкции сложной формы, которые были сравнены с экспериментальными.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Программный комплекс конечно-элементных расчетов [Электронный ресурс]: Plaxis представляет собой пакет конечно-элементных программ для двумерных и трехмерных расчетов напряженно-деформированного состояния. – Электрон. дан. – Режим доступа: http://www.pinfor.ru/software/plaxis8/plaxis_foundation.htm – Загл. с экрана.
2. Прокопович А. А. Сопротивление изгибу железобетонных конструкций с различными условиями сцепления продольной арматуры с бетоном. – Самара: НВФ «Сенсоры. Модули. Системы», 2000. – 567с.
3. COSMOSWorks [Электронный ресурс]: мощный и простой в использовании программный комплекс для проведения инженерных расчетов. – Электрон. дан. – Режим доступа: <http://www.solidworks.ru/products/cosmos>. – Загл. с экрана.
4. MSC.NASTRAN [Электронный ресурс]: расчет и оптимизация конструкций. – Электрон. дан. – Режим доступа: <http://www.bee-pitron.com.ua/cae/nastran.htm>. – Загл. с экрана.
5. Интегрированная Система Прочностного Анализа (ИСПА) [Электронный ресурс]: систему расчета напряженно-деформированного сосконструкций. – Электрон. дан. – Режим доступа: <http://www.ispa-soft.ru/statxi/statxq1.htm>. – Загл. с экрана.
6. Чигарев А. В., Кравчук А. С., Смалюк А. Ф. ANSYS для инженеров. Справ. пособие. – М.: Машиностроение-1, 2004. – 512 с.
7. Скрим Э., Рой Дж. Р. Автоматическая система кинематического анализа // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ/ Пер. англ. под ред. А. П. Филина: В 2-х т. – Л.: Судостроение, 1974. – Т. 2. – С. 36–67.
8. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» / Киричевский В. В., Дохняк Б. М., Козуб Ю. Г., Гоменюк С. И., Киричевский Р. В., Гребенюк С. Н. – К.: Наук. думка, 2005. – 403 с.

9. Гребенюк С. Н., Лисица Н. Н., Решевская Е. С., Тархова В. М., Киричевский Р. В. Определение напряженно-деформированного состояния эластомерных виброизоляторов // Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць. Ін-т геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова НАН України. – Дніпропетровськ, 2006. – Вип. 63. – С. 123–130.
10. Киричевський Р. В., Решевська Е. С., Тархова В. М., Прокопенко Е. В., Киричевський В. В. Исследование задач механики деформируемого тела в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2006. – № 2. – С. 54–60.
11. Решевская Е. С., Тархова В. М., Киричевский Р. В. Исследование контактного взаимодействия конического эластомерного виброизолятора // Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць. Ін-т геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова НАН України. – Дніпропетровськ, 2007. – Вип. 71. – С. 222–226.
12. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
13. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 522 с.
14. Кузнецов Д. С. Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1965. – 641 с.
15. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1966. – 346 с.
16. Гончаров В. Л. Теория приближения и интерполирования функций. – М.: Гостехтеориздат, 1954. – 576 с.
17. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 456 с.
18. Коупер Г., Коско Р., Лимберг Г., Олсон М. Применение высокоточных треугольных элементов изгибаемых пластин в статических и динамических задачах // Ракетная техника и космонавтика. – 1969. – № 10. – С. 74–81.
19. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 492 с.
20. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности: Учеб. пособие для инж.-строит. Специальностей вузов. – М.: Высш. школа, 1970. – 288 с.

Надійшла 24.12.2007
Після доробки 13.05.2008

Описано методику побудови скінченного елемента на основі інтерполяційного поліному Ерміту, яка реалізована в підсистемі «КОЭРМА» програмного комплексу «МИРЕЛА+», призначеного для розв'язку задач теорії пружності методом скінчених елементів. Для перевірки вірогідності результатів представлено тестовий приклад в якості плити, що нагружується, закріпленої по контуру.

The technique of construction of a finite element on a basis of interpolational polynomial of Hermite, realized in a subsystem «КОЭРМА» of a program complex «МИРЕЛА+», intended for the decision of tasks of the theory of elasticity by a method of finite elements is described. For check of reliability of results the test example is submitted as a loaded plate fixed on a contour.