УДК 681.518.2

Е. М. Потапенко, А. Е. Казурова, Е. В. Душинова, В. И. Левыкина

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫПОЛНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НА МНОГОФАЗНЫХ СИГНАЛАХ

Разработан аппарат для проведения математических операций на многофазных зашумленных сигналах с неизвестной частотой и с постоянными неизвестными смещениями ноля. В частности, аппарат позволяет получить производные и интегралы главных гармоник фазовых сигналов. В качестве примера получены два алгоритма определения потокосцепления асинхронного двигателя по его ЭДС.

ВВЕДЕНИЕ

В науке и технике широко используются однофазные, двухфазные, трехфазные и т. д. сигналы. Однофазные сигналы встречаются практически везде. Двухфазные сигналы появляются, в частности, при рассмотрении плоского вращения вектора относительно какой-либо двумерной системы координат (базиса) с помощью его проекций на оси этого базиса. Трехфазные сигналы имеют место, например, при рассмотрении плоского вращения вектора в проекциях на три оси, лежащие в плоскости вращения. Типичной областью применения двухфазных и трехфазных сигналов является электротехника переменного тока и, в частности, электродвигатели переменного тока. Трехфазную систему можно свести к эквивалентной двухфазной системе следующим образом [1].

Пусть x_a, x_b, x_c – переменные (токи, напряжения, потокосцепления) каждой из фаз статора. Эти переменные можно представить в виде трех векторов с общим результирующим вектором. Результирующий вектор можно разложить на две составляющие x_α, x_β вдоль осей ортогональной системы координат (α, β), жестко связанной со статором двигателя. В трехфазной электротехнической системе оси фаз расположены под углом 120° друг к другу. Если переменные подчиняются зависимости

$$x_a + x_b + x_c = 0,$$

то имеют место следующие соотношения [1]:

$$x_\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}x_a,\ \ x_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_a + 2x_b);$$

$$x_a = \sqrt{\frac{2}{3}}x_\alpha,\ \ x_b = \sqrt{\frac{2}{3}}\Big(-\frac{1}{2}x_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}x_\beta\Big),$$

$$x_c = -\sqrt{\frac{2}{3}}\Big(\frac{1}{2}x_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}x_\beta\Big).$$

В каждой фазе могут присутствовать постоянное смещение ноля и высокочастотные шумы. Для качественного управления электротехнической системой требуется выделение главных гармоник фаз и проведение с ними различных математических операций: дифференцирование, интегрирование и т. п. После дифференцирования реального (исходного) сигнала уровень высокочастотных шумов возрастает, что может сделать невозможным дальнейшее использование полученного сигнала. О важности учета этого эффекта говорит существование специального раздела в теории фильтрации «Дифференцирование сигналов» [2]. После интегрирования сигнала уровень шумов снижается, но появляются постоянная ошибка, равная неизвестной постоянной интегрирования, и линейно возрастающая со временем ошибка за счет интегрирования неизвестного смещения ноля. В отличие от однофазного сигнала, многофазные сигналы обладают дополнительной информацией за счет детерминированной взаимосвязи между фазами (одни и те же частота и амплитуда, постоянный сдвиг фазы между сигналами). В работе [3] этот факт был успешно использован для фильтрации двухфазного сигнала.

Целью данной статьи является использование свойств многофазных сигналов для выполнения ряда математических операций с ними, таких как дифференцирование, интегрирование, фильтрация и др.

Поскольку существуют эквивалентные преобразования между трехфазными и двухфазными сигналами, то ниже будут рассматриваться только двухфазные сигналы.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассматривается двухфазная система x_α, x_β, представляющая собой проекции вектора x на оси ортогонального базиса (α, β). Пусть главные гармоники фаз описываются уравнениями

$$x_{0\alpha} = |x_0|\cos\omega t,\ \ x_{0\beta} = |x_0|\sin\omega t. \tag{1}$$

Производные и интегралы выражений (1) при условии медленности изменения амплитуды x_0 и частоты ω приближенно можно описать уравнениями

$$\dot{x}_{0\alpha} = -\omega|x_0|\sin\omega t = -\omega x_{0\beta},$$
$$\dot{x}_{0\beta} = \omega|x_0|\cos\omega t = \omega x_{0\alpha}, \qquad (2)$$

$$\int x_{0\alpha}dt = \omega^{-1}|x_0|\sin\omega t = \omega^{-1}x_{0\beta},$$
$$\int x_{0\beta}dt = -\omega^{-1}|x_0|\cos\omega t = -\omega^{-1}x_{0\alpha}. \qquad (3)$$

Умножим в (2) первое уравнение на $x_{0\beta}$, второе уравнение на $-x_{0\alpha}$ и затем полученные уравнения сложив, найдем

$$\omega = \frac{x_{0\alpha}\dot{x}_{0\beta} - x_{0\beta}\dot{x}_{0\alpha}}{x^2_{0\alpha} + x^2_{0\beta}}. \qquad (4)$$

На практике имеют место соотношения

$$x_\alpha = x_{0\alpha} + \vartheta_\alpha,\ x_\beta = x_{0\beta} + \vartheta_\beta, \qquad (5)$$

где ϑ_α и ϑ_β представляют собой высокочастотные по сравнению с основной частотой ω погрешности входных сигналов x_α, x_β. Для устранения высокочастотных помех сигналы (5) предлагается пропустить через идентичные фильтры низких частот с передаточной функцией $W_f(p)$, имеющей амплитудную $A(\omega)$ и фазовую $\varphi(\omega)$ частотные характеристики. Не принимая во внимание сдвиг по фазе помех $\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta$ на выходах фильтров, будем иметь

$$x^*_\alpha = A(\omega)|x_0|\cos(\omega t + \varphi) + A(\omega_\vartheta)\vartheta_\alpha,$$
$$x^*_\beta = A(\omega)|x_0|\sin(\omega t + \varphi) + A(\omega_\vartheta)\vartheta_\beta$$

или, что то же самое,

$$x^*_\alpha = A(\omega)|x_0|(\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi) + A(\omega_\vartheta)\vartheta_\alpha,$$
$$x^*_\beta = A(\omega)|x_0|(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi) + A(\omega_\vartheta)\vartheta_\beta, \qquad (6)$$

где ω_ϑ – частота погрешностей. Из (6) на основании (2), (5) можно найти точные значения проекций вектора x_0 (искомые сигналы) в виде

$$x_{0\alpha} = |x_0|\cos\omega t = A^{-1}(\omega)(x^*_\alpha\ \cos\varphi + x^*_\beta\ \sin\varphi) +$$
$$+ A^{-1}(\omega)A(\omega_\vartheta)(\vartheta_\alpha\cos\varphi + \vartheta_\beta\sin\varphi),$$

$$x_{0\beta} = |x_0|\sin\omega t = A^{-1}(\omega)(x^*_\beta\ \cos\varphi - x^*_\alpha\ \sin\varphi) +$$
$$+ A^{-1}(\omega)A(\omega_\vartheta)(\vartheta_\beta\cos\varphi - \vartheta_\alpha\sin\varphi). \qquad (7)$$

Поскольку погрешности ϑ_α и ϑ_β не известны, то вместо точных значений $x_{0\alpha}$ и $x_{0\beta}$ будем использовать их оценки $\hat{x}_{0\alpha}, \hat{x}_{0\beta}$ по зависимостям

$$\hat{x}_{0\alpha} = A^{-1}(\omega)(x^*_\alpha\ \cos\varphi + x^*_\beta\ \sin\varphi),$$
$$\hat{x}_{0\beta} = A^{-1}(\omega)(x^*_\beta\ \cos\varphi - x^*{}_\alpha\sin\varphi). \qquad (8)$$

В выражения (8) входят выходные сигналы фильтров x^*_α , x^*_β , с пониженным содержанием шумов, следовательно, эти выражения можно рассматривать как оценки главных гармоник исходных сигналов x_α, x_β. Определим погрешности этих оценок. Будем полагать, что амплитуды сигналов ϑ_α и ϑ_β равны ϑ_a. Тогда погрешности $\tilde{x}_\alpha = \hat{x}_{0\alpha} - x_\alpha$, $\tilde{x}_\beta = \hat{x}_{0\beta} - x_\beta$ оценок (8) по сравнению с точными значениями (6) можно оценить выражением

$$\tilde{x}_\alpha = \tilde{x}_\beta = A^{-1}(\omega)A(\omega_\vartheta)\vartheta_a. \qquad (9)$$

Фильтры выбираются из условия близости $A(\omega)$ к единице, а $A(\omega_\vartheta)$ к нулю.

Пусть собственно фильтры представляют собой инерционные звенья первого порядка

$$W_f(p) = \frac{k_f}{Tp+1}, k_f > 0, T > 0,$$

(T – постоянная времени) с частотными характеристиками

$$A(\omega) = \frac{k_f}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}},\ \operatorname{tg}\varphi(\omega) = -T\omega. \qquad (10)$$

С помощью соотношений

$$\sin\varphi(\omega) = \frac{\operatorname{tg}\varphi(\omega)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi(\omega)}},\ \cos\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi(\omega)}}$$

и выражений (10) можно записать

$$\sin\varphi = -T\omega k_f^{-1}A(\omega), \cos\varphi = k_f^{-1}A(\omega). \qquad (11)$$

Подстановка (10), (11) в (8) дает

$$\hat{x}_{0\alpha} = k_f^{-1}(x^*_\alpha\ - T\hat{\omega}x^*_\beta\ ),$$
$$\hat{x}_{0\beta} = k_f^{-1}(x^*_\beta\ + T\hat{\omega}x^*_\alpha\ ), \qquad (12)$$

где ω заменена ее оценкой $\hat{\omega}$, которая по аналогии с (4) определяется выражением

$$\hat{\omega} = \frac{x_\alpha^* \ \dot{x}_\beta^* - x_\beta^* \ \dot{x}_\alpha^*}{{x_\alpha^*}^2 + {x_\beta^*}^2}. \tag{13}$$

С использованием (2), (3), (12) запишем

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{0\alpha} &= -\hat{\omega} k_f^{-1}(x_\beta^* + T\hat{\omega} x_\alpha^*), \\ \dot{\hat{x}}_{0\beta} &= \hat{\omega} k_f^{-1}(x_\alpha^* - T\hat{\omega} x_\beta^*), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \hat{x}_{0\alpha} dt &= (\hat{\omega} k_f)^{-1}(x_\beta^* + T\hat{\omega} x_\alpha^*), \\ \int_0^t \hat{x}_{0\beta} dt &= -(\hat{\omega} k_f)^{-1}(x_\alpha^* - T\hat{\omega} x_\alpha^*) \end{aligned} \tag{15}$$

или при $k_f = T$

$$\begin{aligned} \int_0^t \hat{x}_{0\alpha} dt &= (x_\alpha^* + (T\hat{\omega})^{-1} x_\beta^*), \\ \int_0^t \hat{x}_{0\beta} dt &= (x_\beta^* - (T\hat{\omega})^{-1} x_\alpha^*). \end{aligned} \tag{16}$$

Выражение скорости (13) содержит производные от сигналов, пропущенных через инерционные звенья первого порядка, то есть $\hat{\omega}$, а следовательно и переменные (12), (14)–(16) фактически будут содержать не отфильтрованные высокочастотные шумы. Для повышения помехозащищенности можно сигнал $\hat{\omega}$ пропустить через фильтр низкой частоты. Рассмотрим другой путь.

Вместо фильтров первого порядка применим фильтр второго порядка с передаточной функцией и частотными характеристиками следующего вида:

$$W_f(p) = \frac{k_f}{T^2 p^2 + 2dTp + 1}; \ k_f, \ T, \ d > 0, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{k_f}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2dT\omega)^2}}, \\ \mathrm{tg}\varphi(\omega) &= -\frac{2dT\omega}{1 - T^2\omega^2}, \end{aligned} \tag{18}$$

откуда

$$\begin{aligned} \sin\varphi(\omega) &= -\frac{2dT\omega}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2dT\omega)^2}}, \\ \cos\varphi(\omega) &= \frac{1 - T^2\omega^2}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2dT\omega)^2}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Подстановка (18), (19) в (8) дает уравнения оценок главных гармоник

$$\begin{aligned} \hat{x}_{0\alpha} &= k_f^{-1}[x_\alpha^* \ (1 - T^2\hat{\omega}^2) - x_\beta^* \ 2dT\hat{\omega}], \\ \hat{x}_{0\beta} &= k_f^{-1}[x_\beta^* \ (1 - T^2\hat{\omega}^2) + x_\alpha^* \ 2dT\hat{\omega}] \end{aligned} \tag{20}$$

где ω заменено на $\hat{\omega}$. С использованием (2), (3), (20) запишем

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{0\alpha} &= -\hat{\omega} k_f^{-1}[x_\beta^* \ (1 - T^2\hat{\omega}^2) + x_\alpha^* \ 2dT\hat{\omega}], \\ \dot{\hat{x}}_{0\beta} &= \hat{\omega} k_f^{-1}[x_\alpha^* \ (1 - T^2\hat{\omega}^2) - x_\beta^* \ 2dT\hat{\omega}]; \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \hat{x}_{0\alpha} dt &= (\hat{\omega} k_f)^{-1}[x_\beta^* \ (1 - T^2\hat{\omega}^2) + x_\alpha^* \ 2dT\hat{\omega}], \\ \int_0^t \hat{x}_{0\beta} dt &= -(\hat{\omega} k_f)^{-1}[x_\alpha^* \ (1 - T^2\hat{\omega}^2) - x_\beta^* \ 2dT\hat{\omega}]. \end{aligned} \tag{22}$$

В рассмотренном случае выражение скорости (13) содержит производные первого порядка от сигналов, пропущенных через колебательные звенья (второго порядка), то есть $\hat{\omega}$, а следовательно, и переменные (20)–(22) не будут содержать не отфильтрованные высокочастотные шумы.

Фильтры (12), (20) подробно изучены в работе [3]. Дифференциаторы (14), (21) и интеграторы (15), (22) рассмотрены впервые. Следует отметить возможность применения интеграторов для оценки не измеряемых потокосцеплений двигателей переменного тока путем интегрирования ЭДС.

Потокосцепление ротора Ψ связано с ЭДС двигателя e зависимостями

$$\dot{\Psi}_\alpha = L_r L_m^{-1} e_\alpha, \ \dot{\Psi}_\beta = L_r L_m^{-1} e_\beta, \tag{23}$$

где L_r, L_m – индуктивность ротора и взаимная индуктивность ротора и статора. По выражениям (23) путем интегрирования можно получить потокосцепление, но с точностью до неизвестных начальных условий и с возрастающими с течением времени ошибками за счет постоянных смещений в фазах ЭДС. Для устранения влияния начальных условий и ограничения ошибок за счет смещения нолей воспользуемся алгоритмом интегрирования (16), синтезированного для инерционного звена первого порядка. Обозначив

$$x_\alpha := L_r L_m^{-1} e_\alpha, \ \ x_\beta := L_r L_m^{-1} e_\beta, \tag{24}$$

с помощью алгоритма (16) получим

$$\hat{\Psi}_\alpha = L_r L_m^{-1}(e_\alpha^* + (T\hat{\omega})^{-1} e_\beta^*),$$
$$\hat{\Psi}_\beta = L_r L_m^{-1}(e_\beta^* - (T\hat{\omega})^{-1} e_\alpha^*), \qquad (25)$$

где

$$e_\alpha^* = \frac{T}{Tp+1} e_\alpha, \; e_\beta^* = \frac{T}{Tp+1} e_\beta; \qquad (26)$$

$$\hat{\omega} = \frac{e_\alpha^* \dot{e}_\beta^* - e_\beta^* \dot{e}_\alpha^*}{e_\alpha^{*2} + e_\beta^{*2}}. \qquad (27)$$

Выражения (25)–(27) в точности совпадают с выражениями потокосцепления, полученными в работе [4] совершенно другим методом, а именно, с помощью наблюдателя Луэнбергера. Работа [4] содержит результаты численного моделирования, подтверждающие высокую точность интегрирования.

Пусть теперь используются фильтры второго порядка (17) и обозначения (24). Тогда в соответствии с (22)

$$\hat{\Psi}_\alpha = (\hat{\omega} k_f)^{-1}[e_\beta^* (1 - T^2\hat{\omega}^2) + e_\alpha^* \, 2dT\hat{\omega}],$$
$$\hat{\Psi}_\beta = -(\hat{\omega} k_f)^{-1}[e_\alpha^* (1 - T^2\hat{\omega}^2) - e_\beta^* \, 2dT\hat{\omega}], \qquad (28)$$

где

$$e_\alpha^* = \frac{k_f}{T^2p^2 + 2dTp + 1} e_\alpha,$$
$$e_\beta^* = \frac{k_f}{T^2p^2 + 2dTp + 1} e_\beta. \qquad (29)$$

Выражения (27)–(29) составляют алгоритм оценки потокосцепления с фильтрами второго порядка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены соотношения, позволяющие осуществлять такие операции как различной степени фильтрация, дифференцирование и интегрирование многофазных зашумленных сигналов с неизвестной частотой. Разработанный метод можно распространить и на другие математические операции.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. *Чиликин М. Г., Ключев В. И., Сандлер А. С.* Теория автоматизированного электропривода. – М.: Энергия, 1979. – 616 с.
2. *Емельянов С. В., Коровин С. К.* Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 352 с.
3. *Потапенко Е. Е., Потапенко Е. М.* Синтез и анализ компенсационных фильтров многофазных неопределенных сигналов // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць «Проблеми автоматизованого електропривода. Теорія і практика». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2003. – № 10, т.2. – С. 342–344.
4. *Потапенко Е. М., Потапенко Е. Е.* Оценка векторов потокосцеплений и их скоростей в двигателях переменного тока // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск «Проблеми автоматизованого електропривода. Теорія і практика».– Харків: НТУ «ХПІ». – 2003. – № 10, т. 1. – С. 105–107.

Надійшла 11.09.07

Розроблено апарат для проведення математичних операцій на багатофазних зашумлених сигналах з невідомою частотою та з постійними невідомими зсувами ноля. Зокрема, апарат дозволяє отримати похідні та інтеграли головних гармонік фазових сигналів. Як приклад отримано два алгоритми визначення потокозчеплення асинхронного двигуна за його ЕРС.

The apparatus for realizing mathematical operations on multiphase noising signals with unknown frequency and with constant unknown displacements of zeros was developed. In particular the apparatus permits to find derivatives and integrals of main harmonics of phase signals. As an example two algorithms of induction motor flux estimation by electromotive force are obtained.