

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БОЙОВИХ ДІЙ З МОЖЛИВІСТЮ ПЕРЕРОЗПОДІЛУ БОЙОВИХ РЕСУРСІВ МІЖ ДІЛЯНКАМИ ЗІТКНЕННЯ ТА РОЗПОДІЛУ РЕЗЕРВІВ

Фурсенко О. К. – канд. техн. наук, доц., завідувач кафедри вищої математики, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна.

Черновол Н. М. – старший викладач кафедри вищої математики, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна.

АНОТАЦІЯ

Актуальність. Математичні і комп'ютерні моделі динаміки бойових дій є важливим інструментом для прогнозування їх результату. Відомі моделі ланчестерівського типу були імітаційними і не враховували кінцеву мету і перерозподіл ресурсів в ході бойових зіткнень. В даній роботі пропонується оптимізаційна модель динаміки бойових дій між сторонами А і В на двох ділянках зіткнення, в основу якої покладено метод динамічного програмування з максимізацією цільової функції як функції втрат супротивника. Розроблена математична і комп'ютерна модель типової для сучасної війни ситуації ведення бойових дій між сторонами А і В на двох ділянках зіткнення з метою нанесення противнику максимальних втрат бойових ресурсів. Досягається ця мета шляхом перерозподілу ресурсів між ділянками зіткнення і введення на ці ділянки відповідних резервів.

Мета роботи. Побудувати математичну і комп'ютерну моделі динаміки бойових дій між сторонами А і В на двох ділянках зіткнення, в яких метою сторони А є максимізація втрат сторони В шляхом використання трьох ресурсів (першим параметром є кількість бойових одиниць, яку має можливість сторона А розподілити по ділянках зіткнення в початковий момент часу; другим параметром є кількість бойових одиниць, яку має перекинути сторона А з однієї ділянки на іншу в деякий наступний момент часу; третій параметр – це кількість бойових одиниць, яку має розподілити сторона А, використовуючи резерв) і шляхом моделювання знайти оптимальні значення цих параметрів.

Метод. В основу математичної моделі покладено метод динамічного програмування з функцією цілі як функцією втрат супротивника, а параметрами є одиниці бойових ресурсів на різних ділянках зіткнення. Їх число змінюється шляхом перерозподілу між цими ділянками і введенням резервних бойових одиниць. Втрати противника визначаються за допомогою систем диференціальних рівнянь Ланчестера. Враховуючи складність цільової функції для пошуку її максимуму використовується мова програмування Python.

Результати. Побудована математична модель і реалізована у вигляді алгоритму комп'ютерна модель поставленої задачі, яка базується на поєднанні метода динамічного програмування з розв'язанням систем диференціальних рівнянь динаміки бою Ланчестера з певними початковими умовами на кожному з трьох етапів бою. За допомогою чисельного експерименту проаналізовано допустимість параметрів задачі (кількостей бойових одиниць сторони А, які відповідно розподіляються, перекидаються з ділянки на ділянку або із числа резерву на кожному етапі бою). В роботі запропоновано алгоритм у вигляді блок-схеми, який дозволяє для будь-яких початкових даних давати відповідь щодо оптимального розподілу ресурсів сторони А, в тому числі із числа резерву, на трьох етапах бою і підраховувати відповідні найбільші втрати противника в заданий момент часу або давати відповідь, що немає допустимих значень параметрів задачі, тобто задача при певних початкових даних не має розв'язання.

Висновки. Наукова новизна полягає в тому, що розроблено математичну і комп'ютерну моделі динаміки бою на двох ділянках зіткнення, в якій враховується перерозподіл бойових ресурсів і резерву з метою нанесення противнику максимальних втрат. Чисельне моделювання за допомогою розробленого алгоритму дало можливість проаналізувати допустимість параметрів перерозподілу і резерву. На основі розглянутих прикладів зроблено висновок, що якщо задача не має розв'язання при певних даних, то це означає, що потрібно зменшити час перерозподілу бойових одиниць на одному або декількох етапах бою, тобто скоротити тривалість бою на певному етапі, тим самим можна прогнозувати час перерозподілу бойових ресурсів і резерву.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: функція цілі як функція втрат, диференціальні рівняння динаміки «поганоорганізованого» бою, ділянки зіткнення, перерозподіл бойових одиниць, розподіл резервних бойових одиниць, ефективна скорострільність, максимізація втрат, допустимість параметрів перерозподілу і резервів.

АБРЕВІАТУРИ

БО – бойові одиниці;

ДЗ – ділянка зіткнення;

ДР – диференціальні рівняння;

А – сторона А;

В – сторона В.

НОМЕНКЛАТУРА

t_0 – час початку бою;

t_i – час закінчення i -го етапу бою ($i = 1, 2, 3$);

K – кількість бойових одиниць А на початку бою;

L – кількість бойових одиниць В на початку бою;

M – резерв А;

K_1 – кількість БО А, що розподіляється в момент часу t_0 на ДЗ Π_1 ;

L_1 – кількість БО В, що розподіляється в момент часу t_0 на ДЗ Π_1 ;

α_1 – середня ефективна скорострільність БО А на першому етапі бою на ДЗ Π_1 і ДЗ Π_2 ;

α_2 – середня ефективна скорострільність БО В на першому етапі бою на ДЗ П₁;

α_3 – середня ефективна скорострільність БО В на першому етапі бою на ДЗ П₂;

K_2 – кількість неушкоджених БО А, що перекидається з ДЗ П₁ на ДЗ П₂ в момент часу t_1 ;

K_3 – кількість БО А із числа резерву, що розподіляється на ДЗ П₁ в момент часу t_2 ;

α_{11} – середня ефективна скорострільність БО А на другому етапі бою на ДЗ П₁;

α_{12} – середня ефективна скорострільність БО А на другому етапі бою на ДЗ П₂;

α_{13} – середня ефективна скорострільність БО А на третьому етапі бою на ДЗ П₁;

α_{14} – середня ефективна скорострільність БО А на третьому етапі бою на ДЗ П₂;

$x_1(t, K_1)$ – середня чисельність неушкоджених БО А в момент часу t на ДЗ П₁ на першому етапі бою;

$x_2(t, K_1)$ – середня чисельність неушкоджених БО В в момент часу t на ДЗ П₁ на першому етапі бою;

$y_1(t, K_1)$ – середня чисельність неушкоджених БО А в момент часу t на ДЗ П₂ на першому етапі бою;

$y_2(t, K_1)$ – середня чисельність неушкоджених БО В в момент часу t на ДЗ П₂ на першому етапі бою;

$\hat{x}_1(t, K_1, K_2)$ – середня чисельність неушкоджених БО А в момент часу t на ДЗ П₁ на другому етапі бою;

$\hat{x}_2(t, K_1, K_2)$ – середня чисельність неушкоджених БО В в момент часу t на ДЗ П₁ на другому етапі бою;

$\hat{y}_1(t, K_1, K_2)$ – середня чисельність неушкоджених БО А в момент часу t на ДЗ П₂ на другому етапі бою;

$\hat{y}_2(t, K_1, K_2)$ – середня чисельність неушкоджених БО В в момент часу t на ДЗ П₂ на другому етапі бою;

$\tilde{x}_1(t, K_1, K_2, K_3)$ – середня чисельність неушкоджених БО А в момент часу t на ДЗ П₁ на третьому етапі бою;

$\tilde{x}_2(t, K_1, K_2, K_3)$ – середня чисельність неушкоджених БО В в момент часу t на ДЗ П₁ на третьому етапі бою;

$\tilde{y}_1(t, K_1, K_2, K_3)$ – середня чисельність неушкоджених БО А в момент часу t на ДЗ П₂ на третьому етапі бою;

$\tilde{y}_2(t, K_1, K_2, K_3)$ – середня чисельність неушкоджених БО В в момент часу t на ДЗ П₂ на третьому етапі бою;

$w_3(K_1, K_2, K_3)$ – втрати В за третій етап бою;

$W_3(K_1, K_2)$ – найбільші втрати В за третій етап бою;

$w_2(K_1, K_2)$ – сумарні втрати В за другий і третій етапи бою;

$W_2(K_1)$ – найбільші втрати В за другий і третій етапи бою;

$w_1(K_1)$ – втрати В за весь бій;

W – найбільші втрати В за весь бій;

K_{1opt} – оптимальне значення параметру K_1 ;

K_{2opt} – оптимальне значення параметру K_2 ;

K_{3opt} – оптимальне значення параметру K_3 ;

b_1 – проміжна змінна;

c_1 – проміжна змінна;

b_2 – проміжна змінна;

c_2 – проміжна змінна;

b_3 – проміжна змінна;

c_3 – проміжна змінна.

ВСТУП

Одним з важливих факторів, які впливають на результат бойових дій, є обґрунтованість прийняття управлінських рішень. Зокрема, рішень командирів про оптимальний розподіл бойових ресурсів між різними ділянками зіткнення з метою нанесення супротивнику максимальних втрат. Математичне моделювання динаміки бойових дій дає можливість загалом прогнозувати їх результат і тим самим може бути одним з інструментів в руках командирів на різних рівнях. Розробка математичних моделей динаміки бойових дій на кількох ділянках зіткнення, в яких враховується їх мета і перерозподіл ресурсів для досягнення її, є актуальною на сьогоднішній день проблемою.

Об'єкт дослідження: динаміки бою двох сторін.

Предмет дослідження: математичні і комп'ютерні моделі динаміки бойових дій на двох ділянках зіткнення з можливістю перерозподілу бойових ресурсів і введенні резерву.

Мета роботи: розробити математичну і комп'ютерну моделі динаміки бою на двох ділянках зіткнення, яка передбачає перерозподіл бойових оди-

ниць на певному етапі і введенні в бій резерву з метою максимізації втрат противника.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Відомі імітаційні моделі ланчестерівського типу, в яких не враховується мета бойових дій і перерозподіл ресурсів для її досягнення. В розроблених авторами оптимізаційних моделях [1, 2] не враховується можливість введення на ділянки зіткнення резервів. Своєчасне введення резервів є важливим фактором, що часто визначає результат бою. Тому важливо розробити математичну і комп'ютерну модель, яка б враховувала цю можливість. Опишемо спочатку процес бойових дій, який підлягає моделюванню.

1. Розглядається бій між двома угрупованнями. Задано K, L, M . Сторони воюють на двох ДЗ Π_1 і Π_2 . Вони мають однорідні БО, не обов'язково однорідні між собою.

2. В момент часу $t_0 = 0$ розподіляється K_1 (відома α_1) і L_1 (відома α_2). На другу ділянку розподіляється, відповідно, $K - K_1$ БО А (зберігається α_1) і $L - L_1$ БО В (відома α_3). Ефективною скорострільністю бойової одиниці називають кількість її успішних (влучних) пострілів за одиницю часу.

3. В момент часу $t_1 > t_0$ розподіляється K_2 . Після перерозподілу БО А з першої ДЗ на другу відбувається зміна середньої ефективної скорострільності БО А, середня ефективна скорострільність БО В залишається незмінною.

4. В момент часу $t_2 > t_1$ А розподіляє свій резерв по ДЗ: на першу ДЗ – K_3 БО, а на другу ДЗ $M - K_3$ БО. Відбувається зміна середньої ефективної скорострільності БО А на обох ДЗ, середня ефективна скорострільність БО В залишається незмінною.

5. Бій триває до моменту часу $t_3 > t_2$.

6. Для моделювання динаміки бою використовуються системи ДР Ланчестера. Вважається, що між моментами часу t_0 і t_1 (1-ий етап бою), t_1 і t_2 (2-ий етап бою), t_2 і t_3 (3-ій етап бою) бій відбувається за умов «поганоорганізованого бою».

Потрібно знайти оптимальні значення параметрів K_1, K_2 і K_3 , тобто такі, щоб В на момент часу t_3 мала найбільші втрати, і знайти ці втрати.

2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

В основу математичної моделі покладено метод динамічного програмування в комбінації з розв'язанням задач Коші для систем ДР Ланчестера, за допомогою розв'язків яких підраховуються кількості неушкоджених БО обох сторін в будь-який допустимий момент часу і виявленням допустимості пара-

метрів задачі. Для комп'ютерного моделювання побудовано алгоритм та створено програму на мові програмування Python [3].

Метод динамічного програмування широко застосовувався перш за все в задачах розподілу ресурсів [4–6], але не бойових. Стосовно бойових ресурсів він вперше був запропонований авторами для розв'язання більш простої задачі [1, 2]. Моделі Ланчестера, які виникли на початку 20-го сторіччя [7], досліджуються і по цей час, наприклад, в роботах [8–17]. В цих роботах проводяться свої дослідження, але не з точки зору максимізації втрат супротивника в залежності від розподілу бойових ресурсів, в тому числі і резерву, в певні моменти часу, що пропонують автори даної роботи. Зауважимо, що в даній роботі між моментами перерозподілу ресурсів і резерву розглянуто одну з найпростіших моделей бойових дій (модель Ланчестера «поганоорганізованого бою» [18]). Бій називається «поганоорганізованим боєм» завдяки умові: інформація про враження цілі доходить до кожної сторони не миттєво, тобто обстрілюються і вже вражені БО.

3 МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

Оскільки на трьох етапах бою відбувається перерозподіл бойових ресурсів, то для моделювання застосовуємо метод динамічного програмування. На кожному етапі (починаючи з останнього згідно методу динамічного програмування) потрібно виписати функцію цілі, що є сумою втрат В на двох ДЗ в моменті часу t_1, t_2, t_3 відповідно і максимізувати функцію цілі по відповідному параметру. При цьому кількість неушкоджених БО обох сторін як функції часу знаходяться за допомогою відповідних розв'язків систем ДР Ланчестера з заданими початковими умовами, що залежать від параметрів K_1, K_2 і K_3 .

Розглянемо детальніше постановку і розв'язання задачі. Спочатку розглянемо 1-ий етап бою.

Згідно умов «поганоорганізованого бою» [18] система ДР Ланчестера відносно середньої чисельності неушкоджених БО угруповань, враховуючи початкові умови, має вигляд:

$$\begin{array}{l} \text{на ДЗ } \Pi_1 : \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1' = -\frac{\alpha_2}{K_1} x_1 x_2; \\ x_2' = -\frac{\alpha_1}{L_1} x_1 x_2; \end{array} \right. \\ x_1(0) = K_1; \\ x_2(0) = L_1; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{на ДЗ } \Pi_2 : \\ \left\{ \begin{array}{l} y_1' = -\frac{\alpha_3}{K - K_1} y_1 y_2; \\ y_2' = -\frac{\alpha_1}{L - L_1} y_1 y_2; \end{array} \right. \\ y_1(0) = K - K_1; \\ y_2(0) = L - L_1. \end{array}$$

Тут параметр K_1 задовольняє нерівність

$$2 \leq K_1 \leq K - 1,$$

тобто на першу ділянку має бути розподілено принаймні дві БО А (щоб принаймні одну БО можна було перекинути на другу ДЗ і принаймні одна одиниця лишилась на першій ДЗ) і на другу ДЗ має бути розподілена принаймні одна БО.

Позначимо

$$b_1 = \frac{L_1}{K_1} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}, \quad c_1 = \frac{L - L_1}{K - K_1} \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_1}}.$$

В останніх формулах $b_1 = b_1(K_1)$, $c_1 = c_1(K_1)$, але залежність від параметру K_1 нижче будемо опускати, щоб не ускладнювати формули.

Розв'язавши вказані задачі Коші, отримаємо, що в момент часу t_1 залишилась неушкодженими наступна кількість БО А, В:

на ДЗ Π_1 :

$$x_1(t_1, K_1) = \begin{cases} K_1 \frac{b_1^2 - 1}{b_1^2 e^{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} (b_1 - b_1^{-1}) t_1} - 1}, & b_1 \neq 1 \\ K_1 \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} t_1 + 1}, & b_1 = 1 \end{cases}, \quad (1)$$

$$x_2(t_1, K_1) = \begin{cases} L_1 \frac{1 - b_1^2}{e^{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} (b_1^{-1} - b_1) t_1} - b_1^2}, & b_1 \neq 1 \\ L_1 \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} t_1 + 1}, & b_1 = 1 \end{cases}, \quad (2)$$

на ДЗ Π_2 :

$$y_1(t_1, K_1) = (K - K_1) \times \begin{cases} \frac{c_1^2 - 1}{c_1^2 e^{\sqrt{\alpha_1 \alpha_3} (c_1 - c_1^{-1}) t_1} - 1}, & c_1 \neq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_3} t_1 + 1}, & c_1 = 1 \end{cases}, \quad (3)$$

$$y_2(t_1, K_1) = (L - L_1) \times \begin{cases} \frac{1 - c_1^2}{e^{\sqrt{\alpha_1 \alpha_3} (c_1^{-1} - c_1) t_1} - c_1^2}, & c_1 \neq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_3} t_1 + 1}, & c_1 = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Але не всі натуральні $K_1 \in [2; K - 1]$ будуть допустимими, тобто

$$K_1 \in [K_{11}; K_{12}] \subset [2; K - 1],$$

виходячи з умов

$$x_1(t_1, K_1) \geq 2 \quad \text{і} \quad y_1(t_1, K_1) \geq 1,$$

які потрібні як необхідна умова, щоб продовжувати бій далі для А на обох ділянках, і умов

$$x_2(t_1, K_1) \geq 0,1 \quad \text{і} \quad y_2(t_1, K_1) \geq 0,1$$

(оскільки, якщо у противника – В у момент часу t_1 БО менше вже 0,1 (наприклад), то потрібно вже далі не вести бій з В на цьому етапі). Зауважимо, що розв'язки розглянутих в роботі систем диференціальних рівнянь є спадними функціями по змінній t і при $t \rightarrow +\infty$ можуть прямувати до нуля. Тому вести бій до тих пір, поки значення цих функцій, що виражають кількість неушкоджених БО В, буде менше ніж, наприклад, 10^{-10} не оптимально і недоцільно. Звідки розглядаються для супротивника умови атаки з боку А, а саме

$$x_2(t_1, K_1) \geq 0,1 \quad \text{і} \quad y_2(t_1, K_1) \geq 0,1.$$

Далі в момент часу t_1 з першої ДЗ на другу перекидається $K_2 : K_2 \in [0; x_1(t_1, K_1) - 1]$ неушкоджених БО А (щоб принаймні одна БО залишилась на першій ДЗ в момент часу t_1). Середня ефективна скорострільність БО А на ДЗ Π_1 зменшиться (це може відбутися, наприклад, за рахунок відведення БО на передові позиції), а на ДЗ Π_2 зросте (за рахунок, наприклад, виведення БО на більш передові позиції). При чому, зміна середньої ефективної скорострільності БО буде прямо пропорційна кількості перекинутих одиниць K_2 і обернено пропорційна кількості одиниць $x_1(t_1, K_1)$ А, що залишились неушкодженими на ДЗ Π_1 . А саме, нехай

$$\alpha_{11} = \alpha_1 \left(1 - \frac{K_2}{x_1(t_1, K_1)} \right); \quad \alpha_{12} = \alpha_1 \left(1 + \frac{K_2}{x_1(t_1, K_1)} \right). \quad (5)$$

В формулах (5) $\alpha_{11} = \alpha_{11}(K_1, K_2)$, $\alpha_{12} = \alpha_{12}(K_1, K_2)$, але залежність від параметрів K_1, K_2 нижче будемо опускати, щоб не ускладнювати формули.

Далі розглянемо бій на другому етапі. Система ДР Ланчестера відносно середньої чисельності неушкоджених БО угруповань, враховуючи початкові умови, має вигляд:

на ДЗ П₁ :

$$\begin{cases} \hat{x}_1' = -\frac{\alpha_2}{x_1(t_1, K_1) - K_2} \hat{x}_1 \hat{x}_2; \\ \hat{x}_2' = -\frac{\alpha_{11}}{x_2(t_1, K_1)} \hat{x}_1 \hat{x}_2; \\ \hat{x}_1(t_1) = x_1(t_1, K_1) - K_2; \\ \hat{x}_2(t_1) = x_2(t_1, K_1); \end{cases}$$

на ДЗ П₂ :

$$\begin{cases} \hat{y}_1' = -\frac{\alpha_3}{y_1(t_1, K_1) + K_2} \hat{y}_1 \hat{y}_2; \\ \hat{y}_2' = -\frac{\alpha_{12}}{y_2(t_1, K_1)} \hat{y}_1 \hat{y}_2; \\ \hat{y}_1(t_1) = y_1(t_1, K_1) + K_2; \\ \hat{y}_2(t_1) = y_2(t_1, K_1). \end{cases}$$

Позначимо

$$b_2 = \frac{x_2(t_1, K_1)}{x_1(t_1, K_1) - K_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_{11}}}, \quad c_2 = \frac{y_2(t_1, K_1)}{y_1(t_1, K_1) + K_2} \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_{12}}}.$$

В останніх формулах $b_2 = b_2(K_1, K_2)$, $c_2 = c_2(K_1, K_2)$.

Розв'язавши вказані задачі Коші, отримаємо, що в момент часу t_2 залишилась неушкодженими наступна кількість БО А і В:

на ДЗ П₁ :

$$\hat{x}_1(t_2, K_1, K_2) = (x_1(t_1, K_1) - K_2) \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{b_2^2 - 1}{b_2^2 e^{\sqrt{\alpha_{11}\alpha_2}(b_2 - b_2^{-1})(t_2 - t_1)} - 1}, & b_2 \neq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha_{11}\alpha_2}(t_2 - t_1) + 1}, & b_2 = 1 \end{cases}, \quad (6)$$

$$\hat{x}_2(t_2, K_1, K_2) = x_2(t_1, K_1) \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{1 - b_2^2}{e^{\sqrt{\alpha_{11}\alpha_2}(b_2^{-1} - b_2)(t_2 - t_1)} - b_2^2}, & b_2 \neq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha_{11}\alpha_2}(t_2 - t_1) + 1}, & b_2 = 1 \end{cases}, \quad (7)$$

на ДЗ П₂ :

$$\hat{y}_1(t_2, K_1, K_2) = (y_1(t_1, K_1) + K_2) \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{c_2^2 - 1}{c_2^2 e^{\sqrt{\alpha_{12}\alpha_3}(c_2 - c_2^{-1})(t_2 - t_1)} - 1}, & c_2 \neq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha_{12}\alpha_3}(t_2 - t_1) + 1}, & c_2 = 1 \end{cases}, \quad (8)$$

$$\hat{y}_2(t_2, K_1, K_2) = y_2(t_1, K_1) \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{1 - c_2^2}{e^{\sqrt{\alpha_{12}\alpha_3}(c_2^{-1} - c_2)(t_2 - t_1)} - c_2^2}, & c_2 \neq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha_{12}\alpha_3}(t_2 - t_1) + 1}, & c_2 = 1 \end{cases}. \quad (9)$$

Не всі невід'ємні цілі $K_2 \in [0; x_1(t_1, K_1) - 1]$ будуть допустимими, тобто

$$K_2 \in [K_{21}; K_{22}] \subset [0; x_1(t_1, K_1) - 1],$$

виходячи з умов:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(t_2, K_1, K_2) &\geq 1, \quad \hat{y}_1(t_2, K_1, K_2) \geq 1, \\ \hat{x}_2(t_2, K_1, K_2) &\geq 0, 1, \quad \hat{y}_2(t_2, K_1, K_2) \geq 0, 1. \end{aligned}$$

Пояснення щодо необхідності чотирьох останніх нерівностей такі самі, як і при поясненні аналогічних нерівностей при з'ясуванні допустимості параметру K_1 .

Тепер розглянемо бій на 3-му етапі. Для досягнення успіху А в момент часу t_2 розподіляє свої резерви по ДЗ: на першу ДЗ – K_3 бойових одиниць, тоді на другу ДЗ – $M - K_3$ БО. Вважаємо, що середня ефективна скорострільність БО А на обох ділянках зростає (зростає на величину, прямо пропорційну кількості розподілених на відповідну ДЗ одиниць із числа резерву і обернено пропорційну кількості всього резерву з урахуванням тієї кількості БО А, що залишились неушкодженими на відповідній ДЗ). Нехай,

$$\begin{aligned} \alpha_{13} &= \alpha_{11} \left(1 + \frac{K_3}{M + \hat{x}_1(t_2, K_1, K_2)} \right), \\ \alpha_{14} &= \alpha_{12} \left(1 + \frac{M - K_3}{M + \hat{y}_1(t_2, K_1, K_2)} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

В формулах (10) $\alpha_{13} = \alpha_{13}(K_1, K_2, K_3)$, $\alpha_{14} = \alpha_{14}(K_1, K_2, K_3)$.

Система ДР Ланчестера відносно середнього числа неушкоджених БО угруповань, враховуючи початкові умови, має вигляд:

на ДЗ П₁ :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1' = -\frac{\alpha_2}{\hat{x}_1(t_2, K_1, K_2) + K_3} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2; \\ \tilde{x}_2' = -\frac{\alpha_{13}}{\hat{x}_2(t_2, K_1, K_2)} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2; \\ \tilde{x}_1(t_2) = \hat{x}_1(t_2, K_1, K_2) + K_3; \\ \tilde{x}_2(t_2) = \hat{x}_2(t_2, K_1, K_2); \end{cases}$$

на ДЗ П₂ :

$$\begin{cases} \tilde{y}_1' = -\frac{\alpha_3}{\hat{y}_1(t_2, K_1, K_2) + M - K_3} \tilde{y}_1 \tilde{y}_2; \\ \tilde{y}_2' = -\frac{\alpha_{14}}{\hat{y}_2(t_2, K_1, K_2)} \tilde{y}_1 \tilde{y}_2; \\ \tilde{y}_1(t_2) = \hat{y}_1(t_2, K_1, K_2) + M - K_3; \\ \tilde{y}_2(t_2) = \hat{y}_2(t_2, K_1, K_2). \end{cases}$$

Позначимо

$$b_3 = \frac{\hat{x}_2(t_2, K_1, K_2)}{\hat{x}_1(t_2, K_1, K_2) + K_3} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_{13}}},$$

$$c_3 = \frac{\hat{y}_2(t_2, K_1, K_2)}{\hat{y}_1(t_2, K_1, K_2) + M - K_3} \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_{14}}}.$$

В останніх формулах $b_3 = b_3(K_1, K_2, K_3)$,
 $c_3 = c_3(K_1, K_2, K_3)$.

Розв'язавши вказані задачі Коші, отримаємо, що в момент часу t_3 залишилась неушкодженими наступна кількість одиниць А,В:

на ДЗ П₁ :

$$\tilde{x}_1(t_3, K_1, K_2, K_3) = (\hat{x}_1(t_2, K_1, K_2) + K_3) \times$$

$$\begin{cases} \frac{b_3^2 - 1}{b_3^2 e^{\sqrt{\alpha_{13}\alpha_2}(b_3 - b_3^{-1})(t_3 - t_2)} - 1}, & b_3 \neq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha_{13}\alpha_2}(t_3 - t_2) + 1}, & b_3 = 1 \end{cases}, \quad (11)$$

$$\tilde{x}_2(t_3, K_1, K_2, K_3) = \hat{x}_2(t_2, K_1, K_2) \times$$

$$\begin{cases} \frac{1 - b_3^2}{e^{\sqrt{\alpha_{13}\alpha_2}(b_3^{-1} - b_3)(t_3 - t_2)} - b_3^2}, & b_3 \neq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha_{13}\alpha_2}(t_3 - t_2) + 1}, & b_3 = 1 \end{cases}, \quad (12)$$

на ДЗ П₂ :

$$\tilde{y}_1(t_3, K_1, K_2, K_3) = (\hat{y}_1(t_2, K_1, K_2) + M - K_3) \times$$

$$\begin{cases} \frac{c_3^2 - 1}{c_3^2 e^{\sqrt{\alpha_{14}\alpha_3}(c_3 - c_3^{-1})(t_3 - t_2)} - 1}, & c_3 \neq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha_{14}\alpha_3}(t_3 - t_2) + 1}, & c_3 = 1 \end{cases}, \quad (13)$$

$$\tilde{y}_2(t_3, K_1, K_2, K_3) = \hat{y}_2(t_2, K_1, K_2) \times$$

$$\begin{cases} \frac{1 - c_3^2}{e^{\sqrt{\alpha_{14}\alpha_3}(c_3^{-1} - c_3)(t_3 - t_2)} - c_3^2}, & c_3 \neq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha_{14}\alpha_3}(t_3 - t_2) + 1}, & c_3 = 1 \end{cases}. \quad (14)$$

Параметр K_3 : $K_3 \in [K_{31}; K_{32}] \subset [0; M]$, виходячи з умов

$$\tilde{x}_1(t_3, K_1, K_2, K_3) \geq 1, \quad \tilde{y}_1(t_3, K_1, K_2, K_3) \geq 1,$$

$$\tilde{x}_2(t_3, K_1, K_2, K_3) \geq 0, 1, \quad \tilde{y}_2(t_3, K_1, K_2, K_3) \geq 0, 1.$$

Для розв'язання задачі потрібно знайти такі значення параметрів K_1 , K_2 і K_3 , щоб втрати В до моменту часу t_3 були найбільшими. Почнемо з третього етапу бою. Маємо

$$w_3(K_1, K_2, K_3) = \hat{x}_2(t_2, K_1, K_2) - \tilde{x}_2(t_3, K_1, K_2, K_3) + \hat{y}_2(t_2, K_1, K_2) - \tilde{y}_2(t_3, K_1, K_2, K_3)$$

Відповідно, цільова функція

$$W_3(K_1, K_2) = \max_{K_3 \in [K_{31}; K_{32}] \subset [0; M]} w_3(K_1, K_2, K_3). \quad (15)$$

Втрати В на другому етапі бою становлять величину $x_2(t_1, K_1) - \hat{x}_2(t_2, K_1, K_2) + y_2(t_1, K_1) - \hat{y}_2(t_2, K_1, K_2)$. Тоді враховуючи, що на третьому етапі бою вже знайдено максимальні втрати $W_3(K_1, K_2)$ В, то сумарні втрати за другий і третій етапи становлять величину

$$w_2(K_1, K_2) = x_2(t_1, K_1) - \hat{x}_2(t_2, K_1, K_2) + y_2(t_1, K_1) - \hat{y}_2(t_2, K_1, K_2) + W_3(K_1, K_2).$$

Відповідно, цільова функція має наступний вигляд

$$W_2(K_1) = \max_{K_2 \in [K_{21}; K_{22}] \subset [0; x_1(t_1, K_1) - 1]} w_2(K_1, K_2). \quad (16)$$

Втрати В на першому етапі бою дорівнюють

$$L - x_2(t_1, K_1) - y_2(t_1, K_1).$$

Додаючи максимальні втрати за другий і третій етап бою, отримаємо величину

$$w_1(K_1) = L - x_2(t_1, K_1) - y_2(t_1, K_1) + W_2(K_1).$$

Отже, кінцева цільова функція по підрахунку сумарних максимальних втрат сторони 2 за весь бій має вигляд:

$$W_1 = \max_{K_1 \in [K_{11}; K_{12}] \subset [2; K-1]} w_1(K_1). \quad (17)$$

Зауважимо, що при $t \geq 0$ всі розв'язки задач Коші для систем ДР, що розглядаються в роботі, є додатними. Тому вирази в (1)–(4), (6)–(9), (11)–(14) є додатними.

4 ЕКСПЕРИМЕНТИ

Комп'ютерна модель поставленої задачі полягає в наступному алгоритмі, який наведемо у вигляді блок-схеми на рис. 1–3. Даний алгоритм є новим з точки зору демонстрації реалізації методу динамічного програмування в комбінації з підрахованими кількостями неушкоджених бойових одиниць кожної сторони в кінці трьох етапів бою за допомогою систем ДР Ланчестера з певними початковими умовами. Крім того, вказаний алгоритм відображає перевірку допустимості параметрів задачі на кожному етапі бою. Більше

того, запропонований алгоритм в разі відсутності допустимих параметрів задачі дає відповідь: 1) або для певного допустимого першого параметру немає допустимого або другого або третього параметрів; 2) або для певних допустимих перших двох параметрів задачі немає третього допустимого параметру; 3) або, взагалі, немає жодної трійки допустимих параметрів, тобто задача розв'язання не має.

На рис. 1 наведено частину блок-схеми, пов'язаної з першим параметром K_1 . На початку вводяться дані задачі. Особливістю алгоритму є «індикатор» $K_{1opt} = -1$, який контролює: чи будуть знайдено далі трійки допустимих параметрів K_1, K_2, K_3 , якщо ні, то виводиться, що «задача розв'язання не має», в протилежному разі виводяться K_{1opt} та W_1 . Крім цього, в цій частині блок-схеми в циклі по K_1 знаходяться кількості неушкоджених бойових одиниць обох сторін в кінці першого етапу бою $x_1(t_1, K_1), x_2(t_1, K_1), y_1(t_1, K_1), y_2(t_1, K_1)$ і знаходяться допустимі значення параметру K_1 . Якщо K_1 є допустимим, то переходимо до наступної частини блок-схеми рис. 2.

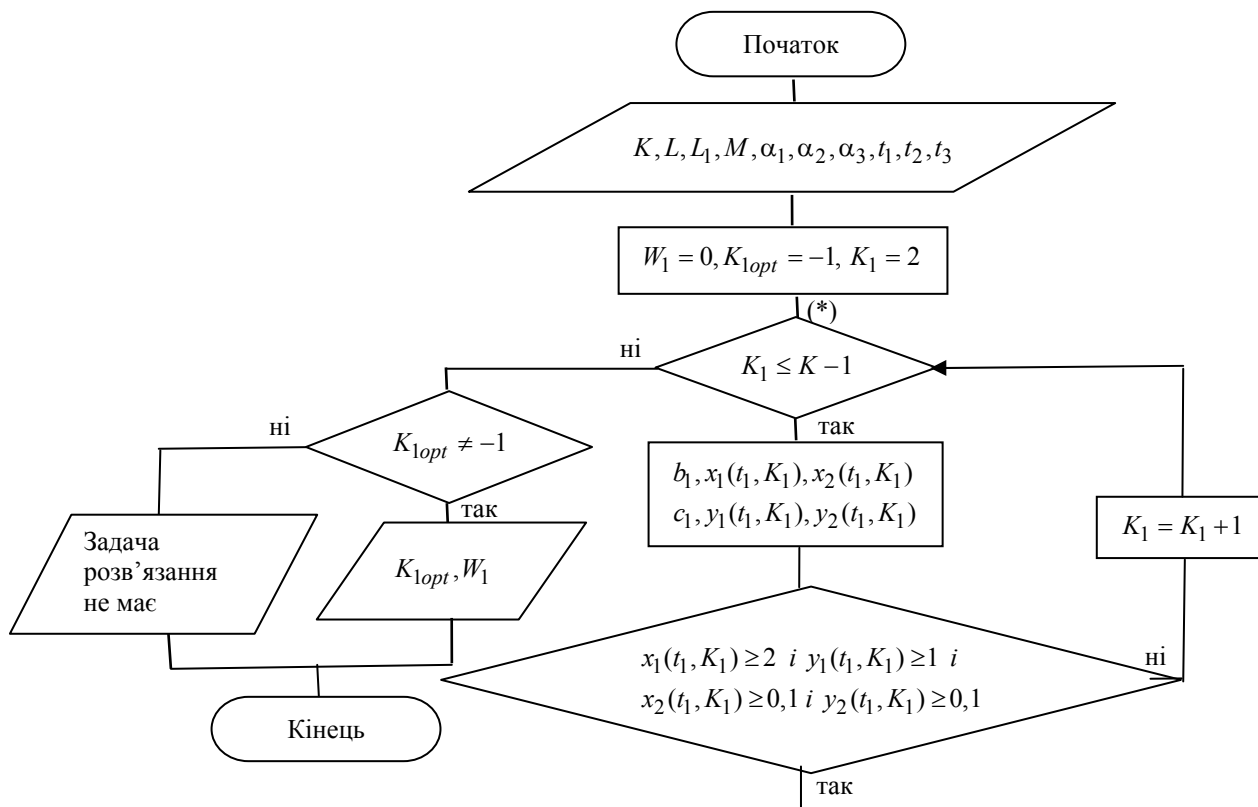


Рисунок 1 – Перша частина блок-схеми алгоритму реалізації методу динамічного програмування

На рис. 2 наведено частину блок-схеми, пов'язаної з дослідженням по другому параметру K_2 при фіксованому K_1 . Особливістю цієї частини алгоритму є «індикатор» $K_{2opt} = -1$, який контролює: чи буде знайдено при фіксованому допустимому K_1 допустимий параметр K_2 і K_3 , якщо ні, то виводиться, що при цьому K_1 «допустимих значень параметру K_2 або K_3 не має», в протилежному разі виводяться K_{2opt} та $W_2(K_1)$. Далі в частині алгоритму (рис. 2) підраховуються втрати B за другий і третій етапи бою $w_1(K_1)$ і найбільші втрати B за два етапи бою W_1 . Крім цього, в цій частині блок-схеми в циклі по K_2 знаходяться кількості неушкоджених бойових одиниць обох сторін в кінці другого етапу бою $x_1(t_2, K_1, K_2)$, $x_2(t_2, K_1, K_2)$, $y_1(t_2, K_1, K_2)$, $y_2(t_2, K_1, K_2)$ і знаходяться допустимі значення па-

раметру K_2 . Якщо K_2 є допустимим, то переходимо до наступної частини блок-схеми рис. 3.

Нарешті, наведемо закінчення блок-схеми (рис. 3), тобто дослідження по третьому параметру K_3 при фіксованих значеннях параметрів K_1 , K_2 . Особливістю третьої частини алгоритму є «індикатор» $K_{3opt} = -1$, який контролює: чи буде знайдено при фіксованих допустимих K_1 , K_2 допустимий параметр K_3 , якщо ні, то виводиться, що при цих K_1 , K_2 «допустимих значень параметру K_3 не має», в протилежному разі виводяться K_{3opt} та $W_3(K_1, K_2)$. Далі в частині алгоритму (рис. 3) підраховуються втрати B за другий і третій етапи бою $w_2(K_1, K_2)$ і найбільші втрати B за два етапи бою $W_2(K_1)$. Крім цього, в цій частині блок-схеми в циклі по K_3 знаходяться кількості неушкоджених бойових одиниць обох сторін в

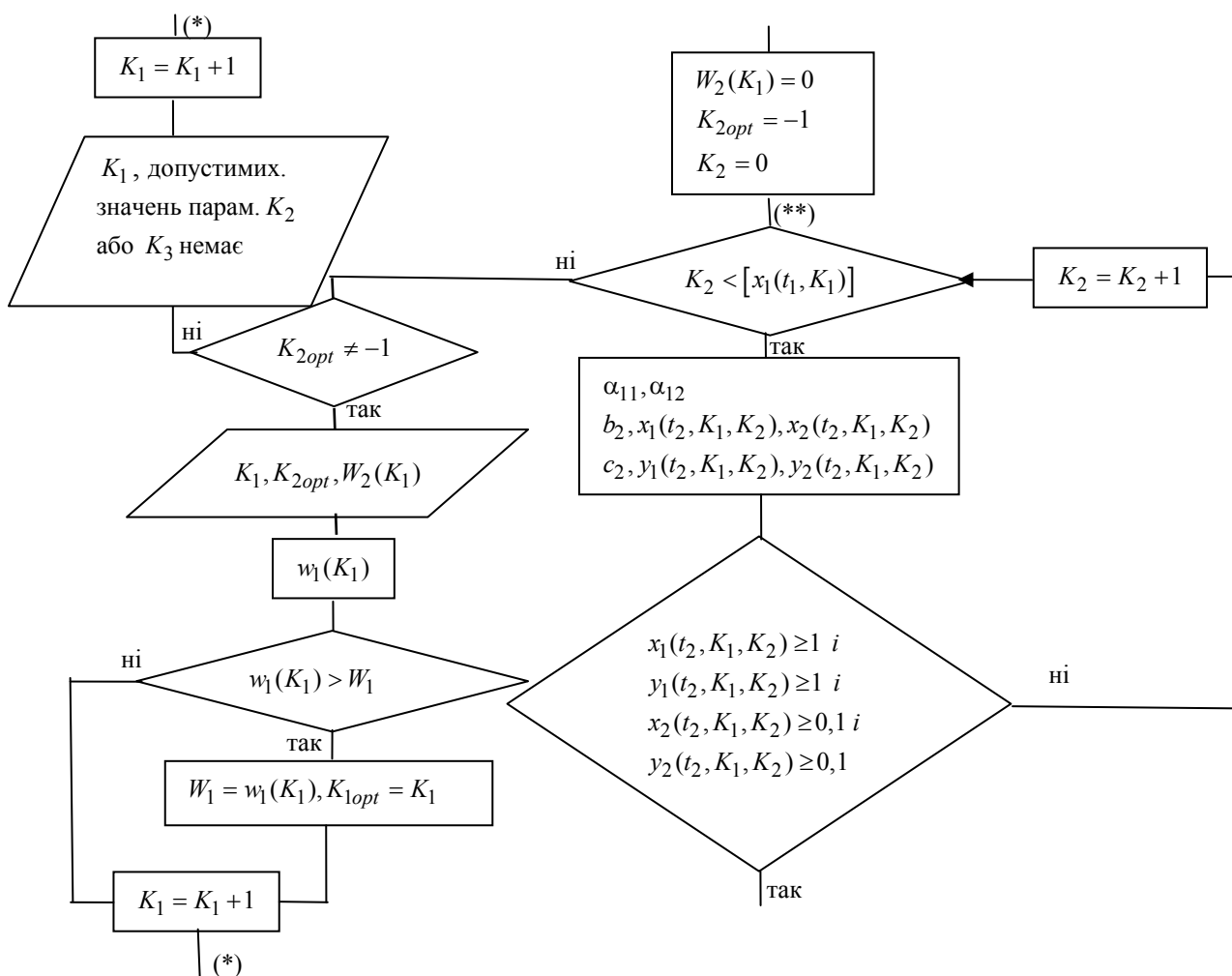


Рисунок 2 – Продовження блок-схеми алгоритму реалізації методу динамічного програмування

кінці третього етапу бою $x_1(t_3, K_1, K_2, K_3)$, $x_2(t_3, K_1, K_2, K_3)$, $y_1(t_3, K_1, K_2, K_3)$, $y_2(t_3, K_1, K_2, K_3)$ і знаходяться допустимі значення параметру K_3 ; виводиться допустима трійка параме-

трів K_1, K_2, K_3 і кількості неушкоджених бойових одиниць обох сторін за три етапи бою; підраховуються втрати $w_3(K_1, K_2, K_3)$ і найбільші втрати W за третій етап бою $W_3(K_1, K_2)$.

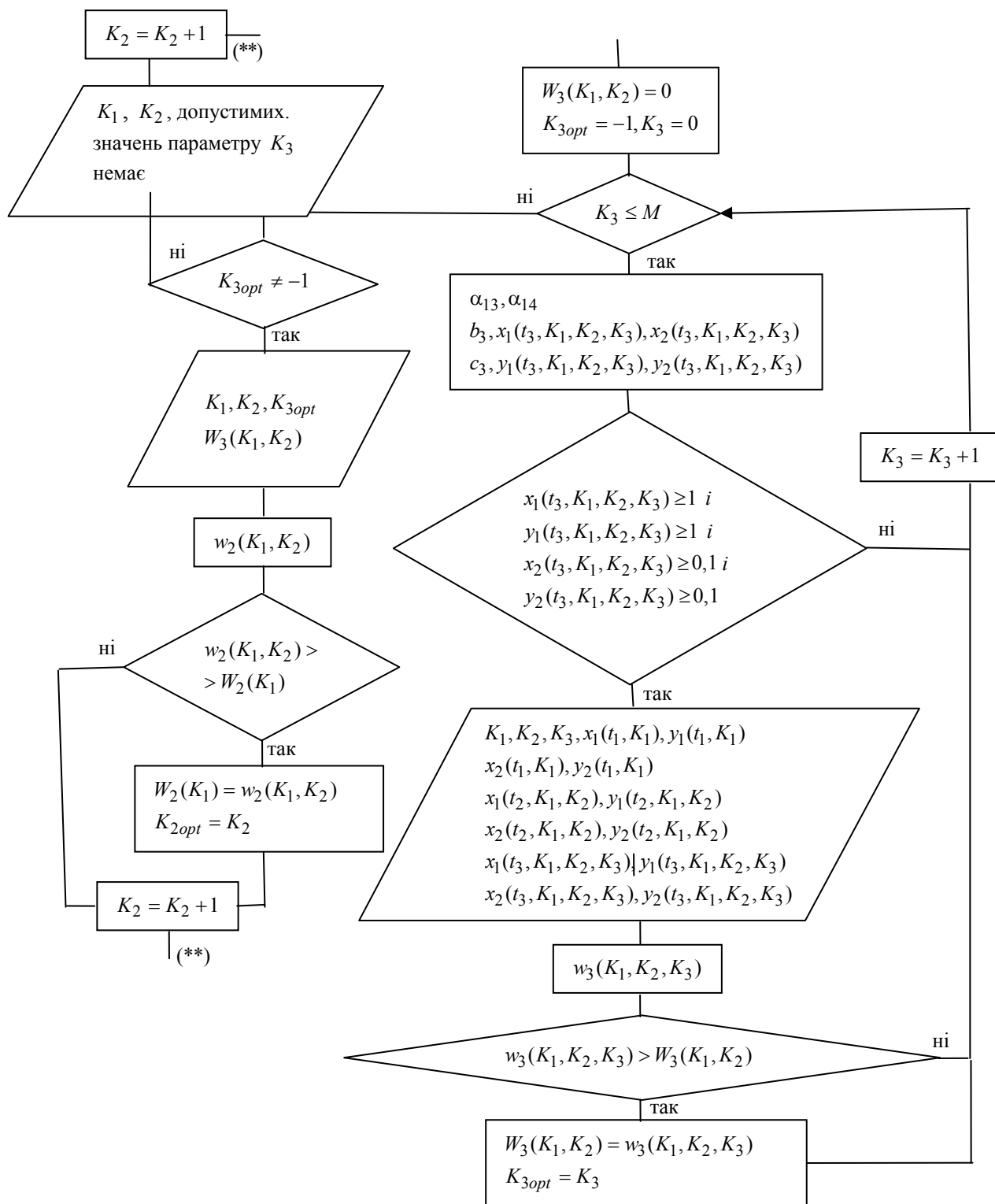


Рисунок 3 – Закінчення блок-схеми алгоритму реалізації методу динамічного програмування

Наведемо результати чисельних експериментів для різних значень початкових даних у вигляді табл. 1. Найбільші втрати B в цій таблиці округлено до цілого числа.

Обчислення зроблено для довільних даних, але їх можна зробити і використовуючи, при можливості публікації у відкритих засобах інформації, реальні характеристики певних видів зброї.

Таблиця 1 – Чисельні обчислення програми для різних значень початкових даних

№	K	L	L_1	M	α_1	α_2	α_3	t_1	t_2	t_3	K_{1opt}	K_{2opt}	K_{3opt}	W_1
1.	20	25	15	10	2,5	2	2	0,1	0,2	0,3	9	0	10	13
2.	25	20	8	10	2,5	2	2	0,1	0,2	0,3	22	13	0	16
3.	15	30	10	5	2,5	2	2	0,3	0,4	0,6	8	2	2	10
4.	40	20	12	8	2	1,8	1,6	0,1	0,2	0,3	22	0	8	18
5.	40	30	15	10	1,8	2,5	2,2	0,2	0,4	0,5	35	19	0	23
6.	60	50	20	15	3	2,8	3,5	0,1	0,3	0,4	54	30	0	43
7.	50	60	30	10	2,5	4	3	0,2	0,3	0,5	41	21	6	34
8.	50	30	15	5	2	4	2,5	0,1	0,2	0,3	44	21	2	21
9.	50	30	15	5	2	5	3	0,2	0,4	0,5	44	26	0	27
10.	40	40	20	10	2	3	4	0,2	0,3	0,4	32	20	2	23
11.	40	20	12	8	2	1,8	1,6	0,1	0,3	0,5	35	10	5	20

Прокоментуємо, наприклад, сьомий приклад з табл. 1. Отже, отримали: якщо на початку бою A має 50 БО (середня ефективна скорострільність БО 2,5 постріли за годину), B має 60 БО і розподіляє на першу ДЗ 30 одиниць (середня ефективна скорострільність БО 4 постріли за годину), а на другу ДЗ теж 30 одиниць (середня ефективна скорострільність БО 3 постріли за годину), то для досягнення успіху A потрібно в початковий момент часу на першу ділянку розподілити 41 БО, а на другу тоді – 9 БО, потім в момент часу 0,2 години з першої ДЗ на другу перекинути 21 БО з тих БО, що залишились неушкодженими, а далі в момент часу 0,3 години розподілити 6 БО із числа резерву на першу ДЗ і 4 БО із числа резерву на другу ДЗ. В результаті в момент часу 0,5 години найбільші втрати B становлять 34 БО.

Наведемо приклад, коли задача не має розв'язання. Нехай $K = 15$, $L = 30$, $L_1 = 10$, $M = 5$, $\alpha_1 = 2,5$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$, $t_1 = 0,2$, $t_2 = 0,4$, $t_3 = 0,6$. Тоді допустимих значень параметрів K_1, K_2, K_3 не має і задача не має розв'язання, тобто бій на одній з ділянок закінчиться для A раніше часу 0,6 години. Якщо час перерозподілу ресурсів або резерву або час закінчення третього етапу бою зменшити, то тоді задача може мати розв'язання. Тобто, при даних кількостях БО обох сторін K, L, L_1 , резерву M і даних середніх ефективних скорострільностях БО $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ можна, змінюючи дані моменти часу t_1, t_2, t_3 , прогнозувати результат бою.

5 РЕЗУЛЬТАТИ

В даній роботі отримано наступне:

1. Розроблена математична модель динаміки бою на двох ділянках зіткнення як задачі динамічного програмування з функцією цілі як функцією втрат супротивника. В результаті розв'язання відповідних задач

Коші для систем ДР Ланчестера отримано кількості неушкоджених БО кожної сторони в кінці кожного з трьох етапів бою, а саме формули (1)–(4), (6)–(9), (11)–(14).

2. Виписано цільові функції (15)–(17), що підраховують відповідно найбільші втрати B на третьому етапі бою, сумарні найбільші втрати за третій і другий етапи бою і сумарні найбільші втрати за весь бій. З'ясовано допустимість параметрів задачі.

3. Для комп'ютерного моделювання розроблено алгоритм у вигляді блок-схеми (рис. 1–3), що реалізує метод динамічного програмування. Цей алгоритм дає змогу 1) виявляти допустимі значення параметрів задачі або давати відповідь, що задача розв'язання немає, тобто на одному або декількох етапах бою потрібно зменшити час закінчення відповідного етапу; 2) якщо існує хоча б одна допустима трійка параметрів, давати результат оптимального розподілу ресурсів і резерву A по ділянкам зіткнення для досягнення її успіху та надавати найбільші втрати противника в заданий момент часу; 3) прогнозувати бій для даних кількостей БО обох сторін, резерву A і відповідних ефективних скорострільностей, змінюючи часи закінчення трьох етапів бою.

4. На основі чисельних обчислень програми (табл. 1) зроблено висновок, що результати можуть бути непередбачуваними, тобто потрібно прорахувати за допомогою програми.

6 ОБГОВОРЕННЯ

Зауважимо, що між моментами перерозподілу бойових ресурсів і резерву можна розглянути будь-яку модель бою (це можливо дослідження наступних робіт), але головним є застосування до такого роду задач алгоритму, що реалізує метод динамічного програмування. Такі задачі потребують комп'ютерного моделювання, а саме внаслідок: 1) складності знаходження максимуму цільових функцій, причому мак-

симум знаходиться по одному параметру при відповідно фіксованих інших; 2) урахування допустимості параметрів задачі і знаходження оптимальної кількості бойових ресурсів, які має А розподіляти по ДЗ (в тому числі і резерв, що характерно для даної задачі); 3) складності самого метода динамічного програмування, враховуючи, що етапів бою може бути і більше трьох і параметрів перерозподілу разом з параметрами резерву може бути більше трьох.

ВИСНОВКИ

Наукова новизна. Розроблено математичну і комп'ютерну моделі динаміки бою двох ворогуючих сторін на двох ділянках зіткнення, в якій одна із сторін з метою нанесення противнику максимальних втрат може перерозподіляти бойові ресурси по ділянкам зіткнення і розподіляти з цією метою наявний в неї резерв. Для проведення чисельного експерименту розроблено відповідний алгоритм реалізації методу динамічного програмування.

Практична цінність. При використанні реальних характеристик бойових ресурсів розроблена модель може використовуватися для прогнозування результату бойових дій на двох ділянках зіткнення.

Перспективи подальших досліджень. В подальшому слід доопрацювати модель на випадок більше 2-х ділянок зіткнення, а також врахувати можливість збільшення моментів перерозподілу ресурсів і розподілу резерву. Крім того, доцільно також розглянути модель з ДР Ланчестера «високорганізованого», «мішаного» бою.

ПОДЯКИ

Дякуємо керівництво Харківського національного університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба за можливість проводити наукові дослідження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Фурсенко О. К. Математичне моделювання бойових дій на двох ділянках зіткнення з можливістю перерозподілу бойових ресурсів / О. К. Фурсенко, Н. М. Черновол, Г. М. Антоненко // Системи обробки інформації. – 2022. – Випуск 4(171). – С. 76–81. DOI: <https://doi.org/10.30748/soi.2022.171.08>
2. Фурсенко О. К. Математичне моделювання бойових дій на двох ділянках зіткнення з використанням динамічного програмування і пакета символічної математики Wolfram Mathematica / О. К. Фурсенко, Н. М. Черновол, Г. М. Антоненко // Військово-

технічний збірник. – 2023. – Випуск 29. – С. 71–81. DOI: <https://doi.org/10.33577/2312-4458.29.2023.71-81>

3. Lubanovic B. Introducing Python: Modern Computing in Simple Packages / B. Lubanovic. – United States of America: O'Reilly Media, 2015. – 454 p.
4. Bellman R. Dynamic Programming. / R. Bellman. – United States of America : Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1972. – 342 p.
5. Dasgupta S. Algorithms / S. Dasgupta, C. H. Papadimitriou, U. Vazirani. – McGraw-Hill Science/Engineering/Math., 2006. – 336 p.
6. Bertele U. Nonserial dynamic programming / U. Bertele, F. Brioshi. – Y. : Academic Press, 1972. – 235 p.
7. Lanchester F. Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm / F. Lanchester. – London : Constable and Co, 1916. – 243 p.
8. Feng B. S. Study of air combat efficiency of carrier-borne fighter based on stochastic Lanchester battle theory / B. S. Feng, X. G. Zhou, Y. J. Lin // Computer Technology and Development. – 2013. – Vol. 23(5). – P. 199–201.
9. Mackay N. J. When Lanchester met Richardson, the outcome was Stalemate: a parable for mathematical models of insurgency / N. J. Mackay // J. of Operational Res. Soc. – 2015. – Vol. 66. – № 2. – P. 191–201. DOI: <https://doi.org/10.1057/jors.2013.178>
10. Vesa K. A Combat Equation Derived from Stochastic Modeling of Attrition Data. / K. Vesa // Military Operations Research. – 2015. – Vol. 20, Issue 3. – P. 49–69.
11. Lanchester model for three-way combat/ [M. Kress, J. P. Caulkins, G. Feichtinger et al.] // European Journal of Operational Research. – 2018. – Vol. 264, Issue 1. – P. 46–54. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.07.026>
12. Optimising structure in a networked Lanchester model for fires and manoeuvre in warfare / [A. C. Kalloniatis, K. Hoek, M. Zuparic et al.] // Journal of the Operational Research Society. – 2021. – Vol. 72(8). – P. 1863–1878. DOI: <https://doi.org/10.1080/01605682.2020.1745701>
13. Atkinson M. P. Targeting, deployment, and loss-tolerance in lanchester engagements / M. P. Atkinson, M. Kress., N. J. MacKay // Operations Research. – 2021. – Vol. 69(1). – P. 71–81. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.2020.2022>
14. Lanchester equation for cognitive domain using hesitant fuzzy linguistic terms sets / [Q. Han., W. M. Li, Q. L. Xu et al.] // Journal of Systems Engineering and Electronics. – 2022. – Vol. 33(3). – P. 674–682. DOI: <https://doi.org/10.23919/JSEE.2022.000062>
15. A swarm confrontation method based on Lanchester law and Nash equilibrium / [X. Ji, W. P. Zhang, F. T. Xiang et al.] // Electronics. – 2022. – Vol. 11(6). – P. 896–911. DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics11060896>
16. Cangiotti N. A generalization of unaimed fire Lanchester's model in multi-battle warfare / N. Cangiotti, M. Capolli, S. Mattia // Operational Research. – 2023. – Vol. 23(2). – P. 38–57. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12351-023-00776-8>
17. Kostić Mladen S. Modeling of combat operations / S. Mladen Kostić, D. AcaJovanović, V. Mitar Kovač // Vojnotehnicki glasnik/Military Technical Courier. – 2023. – Vol. 71, Issue. 3. – P. 529–558. DOI: <https://doi.org/10.5937/vojtehg71-43509>
18. Вентцель Е. С. Введение в исследование операций: монография / Е. С. Вентцель. – М. : Советское радио, 1964. – 388 с.

Стаття надійшла до редакції 22.10.2024.

Після доробки 16.02.2025.

UDC 519.8

MATHEMATICAL MODELLING OF COMBAT OPERATIONS WITH THE POSSIBILITY OF REDISTRIBUTING COMBAT RESOURCES BETWEEN THE AREAS OF CONTACT AND DISTRIBUTING RESERVES

Fursenko O. K. – PhD, Associate Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, Ukraine.

Chernovol N. M. – Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics, Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, Ukraine.

ABSTRACT

Context. Mathematical and computer models of the dynamics of combat operations are an important tool for predicting their outcome. The known Lanchester-type models were simulation models and did not take into account the ultimate goal and

© Фурсенко О. К., Черновол Н. М., 2025

DOI 10.15588/1607-3274-2025-1-6



redistribution of resources during combat operations. This paper proposes an optimisation model of the dynamics of combat operations between parties A and B in two areas of collision, based on the method of dynamic programming with maximisation of the objective function as a function of enemy losses. The article develops a mathematical and computer model of a typical situation in modern warfare of combat operations between parties A and B in two areas of collision with the aim of inflicting maximum losses of combat resources on the enemy. This goal is achieved by redistributing resources between the areas of collision and introducing appropriate reserves to these areas.

Objective. To build a mathematical and computer model of the dynamics of combat operations between parties A and B in two areas of collision, in which the goal of party A is to maximise the losses of party B by using three resources (the first is the number of combat units that party A can distribute across the areas of collision at the initial moment of time; the second is the number of combat units that party A must transfer from one area to another at some subsequent moment of time; the third is the number of combat units that party A must distribute using the reserve) and by modelling the

Method. The mathematical model is based on the method of dynamic programming with the objective function as a function of enemy losses, and the parameters are units of combat resources in different areas of the clash. Their number is changed by redistributing them between these areas and introducing reserve combat units. The enemy's losses are determined using Lanchester's systems of differential equations. Given the complexity of the objective function, the Python programming language is used to find its maximum.

Results. A mathematical model of the problem has been constructed and implemented, based on a combination of the dynamic programming method with the solution of Lanchester's systems of differential equations of battle dynamics with certain initial conditions at each of the three stages of the battle. With the help of a numerical experiment, the admissibility of the parameters of the optimisation problem (the number of combat units of side A, which are appropriately distributed, transferred from area to area or from the reserve at each stage of the battle) is analysed. The developed Python program allows, for any initial data, to give an answer to the optimal allocation of resources of party A, including from the reserve, at three stages of the battle and to calculate the corresponding largest enemy losses at a given time or to give an answer that there are no valid values of the problem parameters, i.e. the problem has no solution for certain initial data.

Conclusions. The scientific novelty lies in the development of mathematical and computer models of the dynamics of combat in two areas of collision, which takes into account the redistribution of combat resources and reserves in order to inflict maximum losses on the enemy. Numerical modelling made it possible to analyse the admissibility of redistribution and reserve parameters. Based on the examples considered, it is concluded that if the problem is unsolvable with certain data, it means that it is necessary to reduce the time of redeployment of combat units at one or more stages of the battle, i.e. to reduce the duration of the battle at a certain stage, thus allowing to predict the time of redeployment of combat resources.

KEYWORDS: objective function as a function of losses, differential equations of the dynamics of "poorly organised" combat, clash areas, redeployment of combat units, distribution of reserve combat units, effective rate of fire, maximisation of losses, admissibility of redeployment and reserve parameters.

REFERENCES

1. Fursenko O. K., Chernovol N. M., Antonenko H. M. Matematychnye modeljvannja bojovyh dij na dvoch diljankah zitkennja z mozlyvistju pererozpodilu bojovyh resursiv, *Systemy obrobky informacii*, 2022, Vypusk 4(171), pp. 76–81. DOI: <https://doi.org/10.30748/soi.2022.171.08>
2. Fursenko O. K., Chernovol N. M., Antonenko H. M. Matematychnye modeljvannja bojovyh dij na dvoch diljankah zitkennja z vykorystannjam dynamichnogo prohramuvannja ta paketa symvol'noyi matematyky Wolfram Mathematica, *Vijs'kovotekhnichnyj zbirnyk*, 2023, Vypusk 29, pp. 71–81. DOI: <https://doi.org/10.33577/2312-4458.29.2023.71-81>
3. Lubanovic B. Introducing Python: Modern Computing in Simple Packages. United States of America, O'Reilly Media, 2015, 454 p.
4. Bellman R. Dynamic Programming. United States of America, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1972, 342 p.
5. Dasgupta S., Paradimitriou C. H., Vazirani U. Algorithms. McGraw-Hill Science/Engineering/Math., 2006, 336 p.
6. Bertele U., Brioshi F. Nonserial dynamic, Y., Academic Press, 1972, 235 p.
7. Lanchester F. Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm. London, Constable and Co, 1916, 243 p.
8. Feng B. S., Zhou X. G., Lin Y. J. Study of air combat efficiency of carrier-borne fighter based on stochastic Lanchester battle theory, *Computer Technology and Development*, 2013, Vol. 23(5), pp. 199–201.
9. Mackay N. J. When Lanchester met Richardson, the outcome was Stalemate: a parable for mathematical models of insurgency, *J. of Operational Res. Soc.*, 2015, Vol. 66, № 2, pp. 191–201. DOI: <https://doi.org/10.1057/jors.2013.178>
10. Vesa K. A Combat Equation Derived from Stochastic Modeling of Attrition Data, *Military Operations Research*, 2015, Vol. 20, Issue 3, pp. 49–69.
11. Kress M., Caulkins J.P., Feichtinger G., Grass D., Seidl A. Lanchester mode for three-way combat, *European Journal of Operational Research*, 2018, Vol. 264, Issue 1, pp. 46–54. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.07.026>
12. Kalloniatis A. C., Hoek K., Zuparic M., Brede M. Optimising structure in a networked Lanchester model for fires and manoeuvre in warfare, *Journal of the Operational Research Society*, 2021, Vol. 72(8), pp. 1863–1878. DOI: <https://doi.org/10.1080/01605682.2020.1745701>
13. Atkinson M. P., Kress M., MacKay N. J. Targeting, deployment, and loss-tolerance in lanchester engagements, *Operations Research*, 2021, Vol. 69(1), pp. 71–81. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.2020.2022>
14. Han Q., Li W.M., Xu Q.L. et al. Lanchester equation for cognitive domain using hesitant fuzzy linguistic terms sets, *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2022, Vol. 33(3), pp. 674–682. DOI: <https://doi.org/10.23919/JSEE.2022.000062>
15. Ji X., Zhang W. P., Xiang F. T., Yuan V., Chen Z. A swarm confrontation method based on Lanchester law and Nash equilibrium, *Electronics*, 2022, Vol. 11(6), pp. 896–911. DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics11060896>
16. Cangioti N., Capolli M., Mattia S. A generalization of unaimed fire Lanchester's model in multi-battle warfare, *Operational Research*, 2023, Vol. 23(2), pp. 38–57. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12351-023-00776-8>
17. Kostić Mladen S., AcaJovanović D., Mitar Kováč V. Modeling of combat operations, *Vojnotehnicki glasnik/Military Technical Courier*, 2023, Vol. 71, Issue. 3, pp. 529–558. DOI: <https://doi.org/10.5937/vojtehg71-43509>
18. Ventcel' E. S. Vvedenie v issledovanie operacij: monog-rafija. Moskow, Sovetskoe radio, 1964, 388 p.