

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА ТА ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

RADIO ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 621.391

Бондарев Б. Н.¹, Кабак В. С.²¹Канд. тех. наук, доцент, профессор кафедры радиотехники и телекоммуникаций, Запорожский национальный технический университет, Украина²Канд. тех. наук, доцент кафедры радиотехники и телекоммуникаций, Запорожский национальный технический университет, Украина

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛОВ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С OFDM

Проводится уточнение имеющихся в литературе статистических характеристик (законов распределения, числовых характеристик, пик-фактора) групповых сигналов многоканальных систем передачи информации с использованием частотного уплотнения с ортогональными поднесущими (OFDM). Отмечается не совсем корректное использование при вычислении пик-фактора многоканального сигнала закона распределения Релея для его огибающей. Получены новые результаты для значений пикфактора. Показана допустимость превышения групповым сигналом порогового уровня на одном или нескольких тактовых интервалах, что проявляется как импульсная помеха на этих интервалах во всех каналах. При большом числе каналов это явление практически не будет влиять на помехоустойчивость.

Полученные результаты позволяют снизить на 2–4 Дб требования к динамическому диапазону и линейности амплитудных характеристик аппаратуры многоканальных систем с OFDM.

Ключевые слова: уплотнение, средняя мощность, максимальная мощность, пик-фактор, закон распределения вероятностей, групповой сигнал.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы все большее применение в многоканальных системах находит частотный метод уплотнения с ортогональными поднесущими (OFDM) и многопозиционными сигналами с квадратурной модуляцией (QAM). К таким системам относятся перспективные системы мобильной связи стандарта LTE, системы цифрового телевидения DVB – стандартов, системы широкополосного доступа WiMax. Число поднесущих частот (частотных каналов) в технологии LTE составляет около 200, в цифровом телевидении – около 2000 или 8000.

Наиболее полное изложение принципов OFDM, достаточно полный перечень первоисточников и краткие исторические сведения приведены в [1]. Впервые этот метод уплотнения был использован в американской системе коротковолновой радиосвязи «Кинеплекс» (1958 г.) [2, 3]. Американский патент на этот метод был выдан в 1970 г. [4]. В 1971 г. [5] было предложено исполь-

зование быстрого преобразования Фурье для операций модуляции и детектирования. Следует отметить также более поздние издания [6...10].

В [11] R. van Nee и A. de Wild впервые ввели понятие пикфактора многоканального OFDM-сигнала (но не совсем корректно). В [12] также рассматривалась задача определения пикфактора. Однако, приводимые результаты вызывают сомнения.

Отметим, что определение пикфактора является лишь одной из задач при решении более общей проблемы – определение требований к линейности амплитудных характеристик аппаратуры и уровня межканальных помех.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью настоящей работы являются уточнение и корректировка методики и результатов статистических расчетов пикфактора сигналов в многоканальных системах с OFDM, приводимых в [1, 8, 12].

2 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Канальные (индивидуальные) сигналы при использовании OFDM и QAM представляют собой отрезки синусоид с различными амплитудами и фазами. При этом несущие частоты соседних каналов различаются на величину ортогонального разнота $F=1/T_s$, где T_s – длительность многопозиционного символа. Величина $1/T_s$ определяет и так называемую символьную (бодовую) скорость R_s .

При ортогональном разноте частот между каналами временные функции сигналов (гармонических колебаний) в соседних каналах отличаются на один период колебания. Полное число периодов для радиосигналов измеряется сотнями, тысячами.

Многоканальный сигнал на одном символьном интервале T_s можно записать в виде

$$S_{\Sigma}(t) = \sum_{k=1}^N a_{kl} \cos\left(k \frac{2\pi}{T_s} t + \varphi_{kl}\right), \quad \frac{1}{T_s} = F, \quad (1)$$

а в случае радиосигналов (после модуляции радионесущей)

$$S_{\Sigma}(t) = \sum_{k=1}^N a_{kl} \cos\left[\left(f_0 + \frac{k}{T_s}\right) 2\pi t + \varphi_{kl}\right], \quad (2)$$

где N – число каналов, F – частота поднесущей в первом канале, a_{kl} и φ_{kl} – амплитуды и фазы канальных сигналов.

Следовательно, системы с использованием OFDM относятся к системам с параллельным способом передачи канальных сигналов. Поэтому такие системы имеют те же недостатки, что и системы с обычным частотным уплотнением: большие значения пикфактора группового сигнала и повышенные требования к линейности амплитудных характеристик аппаратуры.

Для любого из сигналов можно определить действующее U_d и максимальное U_{\max} значения и вычислить значения средней мощности P_{cp} и максимальной мощности P_{\max} . Отношение $P_{\max}/P_{\text{cp}} = P^2$ называют пик-фактором сигнала. В [1, 8, 12] для пикфактора P^2 используется обозначение PAP, PAPR (peak-to-average-power ratio). Там же вводится понятие (термин) «крест-фактор» (Crest factor, CF), определяемый как $CF = \sqrt{PAP} = P$.

Для отрезка синусоиды с постоянной амплитудой и любыми начальными фазами полагают $P_{\max}/P_{\text{cp}} = P^2 = 2$.

Для группового (многоканального) сигнала (1) можно применить теорему теории вероятностей о повторении опытов. При этом число опытов нужно полагать равным числу каналов N , а число возможных событий – числу возможных символов M , которые можно считать равновероятными с вероятностями, равными $1/M$. Вероятности появления на одном временном (символьном) интервале в многоканальных системах определенного сочетания канальных символов будут определяться полиномиальным (многомерным биномиальным) законом распределения вероятностей. При этом вероятностные расчеты будут трудно выполнимыми и практически бесполезными.

Как известно из теории вероятностей, сумма большого числа случайных слагаемых имеет закон распределения, приближающийся к нормальному, с дисперсией (средней мощностью), равной сумме дисперсий (средних мощностей) слагаемых. Следовательно, средняя мощность группового сигнала будет пропорциональна числу частотных каналов N . Этот же коэффициент будет определять так называемую цену уплотнения (по средней мощности). Определение максимальной мощности группового сигнала в соответствии с выражением (3) представляет собой неразрешимую задачу. Для ее решения необходимо использовать вероятностные (статистические) методы, полагая групповой сигнал случайным процессом с нормальным законом распределения вероятностей.

Для нормального закона распределения известно так называемое правило «3-х сигма», согласно которому значения нормального случайного процесса с вероятностью, равной 0,003, будут находиться за пределами интервала, равного 6-и сигма. Поэтому для нормального случайного процесса часто полагают, что его пикфактор $P^2 = 3^2 = 9$ (около 10 дБ). Для уменьшения указанной вероятности в теории и технике многоканальной связи (для систем с частотным уплотнением) при передаче речевых (телефонных) сообщений полагают $P^2 = 16 \dots 25$ (12...14 дБ). Отметим, что приведенные цифры отражают тот факт, что для случайных процессов (сигналов) понятие пикфактора имеет вероятностный характер.

Пользуясь соответствующими таблицами для нормального закона распределения, можно определить, что вероятность нахождения случайной величины за пределами интервала шириной 8 сигма (пикфактор равен 16 дБ) равна 0,000063. Следовательно, для многоканальных систем параллельного типа можно ограничиться значением пикфактора группового сигнала $P^2 = 16$.

Для приведенных выше расчетов можно воспользоваться приближенным выражением для интегральной функции распределения нормального закона распределения

$$F(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left(1/x - 1/x^3 + \dots\right). \quad (3)$$

Для вероятности превышения случайной величиной некоторого порога x_0 (с учетом отрицательных значений x) можно записать

$$P(|x| > x_0) \approx 0,8 \frac{\sigma}{x_0} e^{-x_0^2/2\sigma^2} = \frac{0,8}{z} e^{-z^2/2}, \quad (4)$$

где $z^2 = x_0^2/\sigma^2 = P^2$ – пикфактор для нормального закона распределения, $\sigma^2 = P_{\text{cp}}$ – дисперсия (средняя мощность).

На рис. 1 кривая 1 показывает зависимость вероятности от выбранного значения пик-фактора P^2 для нормального случайного процесса с нулевым средним значением в соответствии с выражением (4). Это выражение и кривую 1 далее будем считать «эталонными», истинными при сравнении результатов для нормальных случайных процессов, получаемых с использованием разных методов.

Приведенные выше формулы можно применить и к многоканальным системам OFDM с большим числом каналов. Однако, в [1, 11] предложены оригинальные, но не совсем корректные определение понятия «пикфактор» многоканального OFDM-сигнала и способ (методика) его вычисления.

Суть предложенной в [1, 11] методики заключается в следующем. Сначала утверждается, что многоканальный сигнал (1) имеет нормальный закон распределения, нулевое среднее значение и дисперсию (среднюю мощность), равную $\sigma^2 = P_{cp}$. Затем предполагается, что он является узкополосным процессом (2) с релейским законом распределения его огибающей. Далее для релейского закона распределения огибающей

$$\omega(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\rho^2 / 2\sigma^2} \quad (5)$$

рассчитывается вероятностная кривая

$$P(\rho \geq \rho_{max}) = e^{-\rho_{max}^2 / 2\sigma^2} = e^{-z^2}, \quad (6)$$

где величина $z^2 = \rho_{max}^2 / 2\sigma^2 = \Pi^2$ ошибочно (в 2 раза меньше) полагается равной пик-фактору сигнала (фактически пикфактору огибающей). Параметр σ^2 является параметром (дисперсией) «порождающего» нормального закона. Параметр $2\sigma^2 = m_2$ для закона Релея является вторым начальным моментом, т. е. полной мощностью случайного процесса, что не совсем соответствует содержанию термина PAPR.

Выражению (6) соответствует кривая 2 на рис. 1. Эта зависимость значительно отличается от «эталонной» зависимости (4) для нормального закона распределения (кривая 1 на рис. 1). Разница в значениях пикфактора составляет около 2-х децибелл.

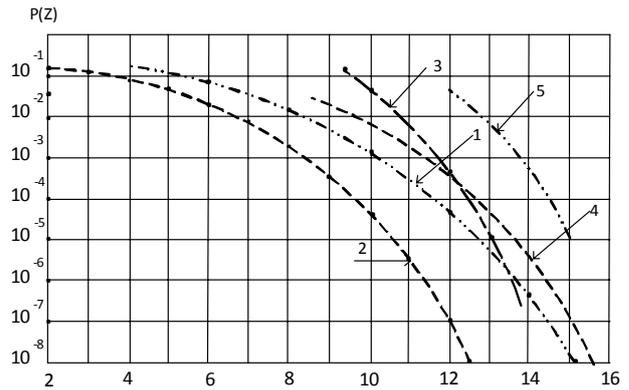
Отметим теперь вторую неточность при выводе выражения (6). Физический смысл понятие «огибающей» имеет для узкополосного процесса, который является двухполярным (рис. 2). Поэтому необходимо учитывать огибающие как для положительных, так и отрицательных частей случайного процесса. Вероятность превышения огибающей заданного уровня в выражении (6) необходимо удвоить, как это было сделано в выражении (4):

$$P(\rho \geq \rho_{max}) = 1 - P(\rho \leq \rho_{max}) = 2e^{-\rho_{max}^2 / 2\sigma^2} = 2e^{-z^2}. \quad (7)$$

В соответствии с этим кривые 2 и 3 рис. 1 должны быть приподняты вверх с увеличением вероятностей в 2 раза.

При корректном определении пик-фактора вместо выражений (7) и (6) необходимо записать

$$P(\rho \geq \rho_{max}) = 2 \cdot e^{-\rho_{max}^2 / 2\sigma^2} = 2e^{-z^2 / 2}. \quad (8)$$



1 – для нормального закона, 2 – для закона Релея при $\sigma_{\rho}^2 = 2\sigma^2$, 3 – по методике [1], 4 – по закону Релея при $M_2 = \sigma^2$, 5 – полученные результаты
Рисунок 1 – Зависимости значений вероятности от выбранного значения пик-фактора сигнала

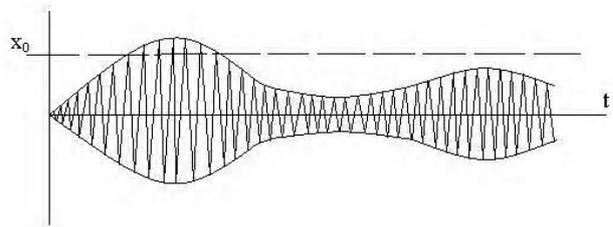


Рисунок 2 – Узкополосный случайный процесс

Зависимость (8) отображается кривой 4 на рис. 1 (без учета коэффициента 2). Отличие кривых 2 и 4 на рис. 1 при использовании закона Релея составляет ровно 3 дБ (в 2 раза), что и следовало ожидать. Отличие эталонной кривой 1 (нормальный закон распределения) и уточненной кривой 4 для релейского закона составляет около одного децибелла.

Заметим, что результат в выражении (6) можно не удваивать, если рассматривать сигналы в радиочастотном тракте при его работе с отсечкой в режиме В.

Далее в [1], сохраняя смысл термина пик-фактор, производится пересчет вероятностной шкалы с учетом следующего условия. Оно заключается в требовании, чтобы многоканальный сигнал не превышал уровень значения пикфактора на всех «N» временных (тактовых) интервалах в пределах символического интервала Ts:

$$P_N(\rho \leq \rho_{max}) = (1 - e^{-\rho_{max}^2 / 2\sigma^2})^N, \quad (9)$$

$$P_N(\rho \geq \rho_{max}) = 1 - (1 - e^{-\rho_{max}^2 / 2\sigma^2})^N. \quad (10)$$

Полученные при этом результаты расчета оказываются отличающимися от результатов, полученных при моделировании. Для корректировки расчетных результатов в выражения (9) и (10) вводится корректирующий коэффициент $\alpha = 2,8$ [1]

$$P_N(\rho \geq \rho_{\max}) = 1 - (1 - e^{-\frac{\rho_{\max}^2}{2\sigma^2}})^{\alpha N} \approx 2,8Ne^{-\frac{\rho_{\max}^2}{2\sigma^2}} = 2,8Ne^{-Z^2}. \quad (11)$$

Кривая зависимости (11) при $N = 1024$ показана на рис. 1 (кривая 3). Она совпадает с зависимостью, приводимой в [1] и [8]. Заметим, что в других источниках приводятся кривые в соответствии с (9), что менее наглядно.

Заметим, что в [12] приводится выражение, аналогичное (11), но с коэффициентом 0,64.

Кривая 5 на рис. 1 при $N = 1024$ аналогична кривой 3, но при вычислениях в соответствии с (10) использовано выражение (4) для нормального закона вместо выражения (6) для закона распределения Релея.

Отметим, что точное и приближенное равенства в (11) имеют разный физический смысл. Точное равенство определяет вероятность нахождения сигнала ниже порога на всех тактовых интервалах. Приближенное равенство в (11) определяет вероятность превышения порога на каком-либо одном из N тактовых интервалов (при малых значениях экспоненты). Эта вероятность отображается кривой 5 на рис. 1.

Заметим теперь, что превышение заданного уровня только на одном из тактовых интервалов можно рассматривать как появление на этом интервале во всех каналах импульсной помехи малой длительности. Однако это почти не повлияет на помехоустойчивость приема. Вероятность одновременного появления такой помехи на нескольких тактовых интервалах можно вычислить с использованием биномиального закона распределения

$$P_N(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}. \quad (12)$$

В соответствии с (12) имеем

$$P_N(1) = N \cdot p(1-p)^{N-1}, \quad P_N(2) = \frac{N(N-1)}{2} p^2(1-p)^{N-2}, \quad (13)$$

что, например, при $p = 10^{-5}$ и $N = 1000$ дает $P_{1000}(2) \approx 5 \cdot 10^{-5}$.

Следовательно, условия (10) и (9) при малых значениях по (7) не являются необходимыми. Сравнивая (13) и

(4) (кривые 1 и 4 на рис. 1), при $\frac{x}{\sigma} = 4$ (12 дБ) получим

$$\text{соотношение } \frac{P(\rho \geq \rho_{\max})}{P(|x| > x_0)} = \frac{2 \cdot x}{0,86} \Rightarrow \frac{8}{0,8} = 10.$$

Достаточным оказывается условие (6) в виде

$$e^{-Z^2} \ll 1/N. \quad (14)$$

ВЫВОДЫ

Показана некорректность имеющихся в литературе результатов для значений пик-фактора групповых сигналов многоканальных систем с OFDM. Получены новые результаты для значений пик-фактора (кривые 1 и 5 на рис. 1). При $p = 10^{-5}$ для кривой 1 рис. 1 получено значение пикфактора около 13 дБ. Полученные результаты

позволяют уточнить (снизить на 2–4 дБ) требования к динамическому диапазону и линейности амплитудных характеристик аппаратуры многоканальных систем при допущении нескольких превышений уровня на интервале времени, равном длительности символа T_s , что эквивалентно появлению на этих интервалах не очень опасной импульсной помехи. Показано, что условия (9) и (10) не являются необходимыми.

Предполагается в следующей статье проверить полученные результаты с использованием иного математического аппарата.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках выполнения научно-исследовательской темы Запорожского национального технического университета «Разработка и обоснование рекомендаций по построению систем пространственно-временной обработки сигналов в условиях воздействия комбинированных помех» (№ гос. регистрации 0114U002636).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Van Nee R. OFDM for wireless Multimedia Communication / R. van Nee, R. Prasad. – Boston : Artech House, London, 2000. – 257 p.
2. Doelz M. L. Binary Data Transmission Techniques for linear System / M. L. Doelz, E. T. Heald, D. L. Martin // Proc. JRE. – 1957. – Vol. 45, May. – P. 656–661.
3. Mosier R. R. Kineplex, a bandwidth efficient binary Transmission System / R. R. Mosier, R. G. Clabaugh // IEEE Trans. – 1958. – Vol. 76, Jan. – P. 723–728.
4. Patent No. 3, U. S. 488,4555, filed November 14, Orthogonal Frequency Division Multiplexing, 1966, issued Jan. 6, 1970.
5. Weinstein S. B. Data Transmission by Frequency Division Multiplexing using the Discrete Fourier Transform / S. B. Weinstein, P. M. Ebert // IEEE Trans Comm. – 1971. – vol. Com 19. – Oct. – P. 628–637.
6. Schulze H. Theory and Application of OFDM and CDMA wideband wireless communication / H. Schulze, Christian Luders. – John Wiley and Sons, 2005. – 420 p.
7. Вишневецкий В. М. Широкополосные беспроводные сети передачи информации / [В. М. Вишневецкий, А. И. Ляхов, С. Л. Портной, И. В. Шахнович]. – М. : Техносфера, 2005. – 592 с.
8. Andrews J. G. Fundamentals of WiMAX: understanding broadband wireless networking / J. G. Andrews, A. Ghosh, R. Muhamed. – Pearson Education, 2007. – 439 p.
9. Holma H. LTE for UMTS: OFDMA and SC-FDMA Based Radio Access / H. Holma, A. Toskala. – John Wiley and Sons, 2009. – 433 p.
10. Вишневецкий В. М. Энциклопедия WIMAX. Путь к 4G / В. М. Вишневецкий, С. Л. Портной, И. В. Шахнович. – М. : Техносфера, 2009. – 472 с.
11. Van Nee R. Reducing the peak-to-average power ratio of OFDM / R. Van Nee, A. de Wild // Proc. IEEE Vehicular Technology Conf. (VTC'98). – 1998. – May. – P. 2072–2076.
12. Hideki O. On the Distribution of the Peak to Average Power Ratio in OFDM Signals / O. Hideki, J. Hideki // IEEE Trans on Commun. – 2001. – Vol. 49, № 2. – February. – P. 282–289.

Статья поступила в редакцию 18.06.2014.
После доработки 12.09.2014.

Бондарев Б. М.¹, Кабак В. С.²

¹Канд. техн. наук, доцент, професор кафедри радіотехніки та телекомунікацій, Запорізький національний технічний університет, Україна

²Канд. техн. наук, доцент професор кафедри радіотехніки та телекомунікацій, Запорізький національний технічний університет, Україна

СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛІВ БАГАТОКАНАЛЬНИХ СИСТЕМ З OFDM

Проводиться уточнення відомих з літератури статистичних характеристик групових сигналів (законів розподілу ймовірностей, чисельних характеристик, пікфактора) багатоканальних систем передачі з використанням частотного ущільнення з ортогональними піднесучими (OFDM). Відзначаються не зовсім коректне використання під час оцінки пікфактора багатоканального сигналу закону Релея для його обвідної.

Отримані нові результати для значень пік-фактора. Показана припустимість перевищення сигналом порогового рівня на одному або декількох тактових інтервалах, що проявляється як імпульсна завада на цих інтервалах в усіх каналах. Здобуті результати дозволяють знизити вимоги на 2–4 дБ до динамічного діапазону і лінійності амплітудної характеристики апаратури багатоканальних систем з OFDM.

Ключові слова: ущільнення, середня потужність, максимальна потужність, пік-фактор, поріг, закон розподілу ймовірностей, груповий сигнал.

Bondarev B. M.¹, Kabak V. S.²

¹Ph.D., Associate Professor, Professor the Department of Radio Engineering and Telecommunications, Zaporizhzhia National Technical University, Ukraine

²Ph.D., Associate Professor the Department of Radio Engineering and Telecommunications, Zaporizhzhia National Technical University, Ukraine

SIGNALS STATISTICAL CHARACTERISTICS OF THE MULTICHANNEL SYSTEMS WITH OFDM

The accurate definition of the found in literature baseband signals statistical characteristics (distribution, numerical results, peak-to-average ratio) in the multichannel systems with orthogonal frequency-division multiplexing (OFDM) is studied. Not strictly correct variable normalization and discrepancies in peak-to-average ratio estimation with using of Rayleigh distribution for envelope are noted.

New results for peak-to-average ratio meanings are obtained. The acceptability of exceeding by threshold value signal on one or several clock intervals is shown, this appears as pulse disturbance on these intervals at all channels.

The obtained results allow to reduce the demands on 2–4 dB to dynamic range and linearity of amplitude characteristic of multichannel systems apparatus with OFDM

Keywords: multiplexing, average power, peak power, peak-to-average ratio, threshold, distribution, baseband signal.

REFERENCES

1. Van Nee R., Prasad R. OFDM for wireless Multimedia Communication. Boston, Artech House, London, 2000, 257 p.
2. Doelz M. L., Heald E. T., Martin D. L. Binary Data Transmission Techniques for linear System, *Proc. JRE*, 1957, vol. 45, May, pp. 656–661.
3. Mosier R. R., Clabaugh R. G. Kineplex, a bandwidth efficient binary Transmission System, *IEEE Trans.*, 1958, Vol. 76, Jan., pp. 723–728.
4. Patent No. 3, U. S. 488,4555, filed November 14, Orthogonal Frequency Division Multiplexing, 1966, issued Jan. 6, 1970.
5. Weinstein S. B., Ebert P. M. Data Transmission by Frequency Division Multiplexing using the Discrete Fourier Transform, *IEEE Trans Comm.*, Vol. Com – 19, 1971, Oct., pp. 628–637.
6. Schulze H., Luders Ch. Theory and Application of OFDM and CDMA wideband wireless communication. John Wiley and Sons, 2005, 420 p.
7. Vishnevskij V. M., Lyaxov A. I., Portnoj S. L., Shaxnovich I. V. *Shirokopolosny'e brsprovodny'e seti peredachi informaczii*. Moscow, Texnosfera, 2005, 592 p.
8. Andrews J. G., Ghosh Arunabha, Muhamed R. *Fundamentals of WiMAX: understanding broadband wireless networking*. Pearson Education, 2007, 439 p.
9. Holma H., Toskala A. *LTE for UMTS: OFDMA and SC-FDMA Based Radio Access*. John Wiley and Sons, Ltd, 2009, 433 p.
10. Vishnevskij V. M., Portnoj S. L., Shaxnovich I. V. *E'nciklopediya WIMAX. Put' k 4G*. Moscow, Texnosfera, 2009, 272 p.
11. Van Nee R., A. de Wild Reducing the peak-to-average power ratio of OFDM, *In Proc. IEEE Vehicular Technology Conf. (VTC'98)*, 1998, May, pp. 2072–2076.
12. Hideki O., Hideki J. On the Distribution of the Peak to Average Power Ratio in OFDM Signals, *IEEE Trans on Commun*, 2001, Vol. 49, No. 2, February, pp. 282–289.