РАДІОФІЗИКА

РАДИОФИЗИКА

RADIOPHYSICS

УДК 517.9 : 537.86

Онуфриенко Л. М.[1], $\boxed{\text{Чумаченко В. П.}}$[2], Чумаченко Я. В.[3]

[1]Канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Запорожского национального технического университета, Запорожье, Украина

[2]Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Запорожского национального технического университета, Запорожье, Украина

[3]Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры математических методов в инженерии Ивано-Франковского национального технического университета нефти и газа, Ивано-Франковск, Украина

К ОБОСНОВАНИЮ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛОСКОГО СОЕДИНЕНИЯ ТРЕХ ВОЛНОВОДОВ. ЧАСТЬ I. E-ПЛОСКОСТНАЯ ЗАДАЧА

В статье предложена и обоснована математическая модель сочленения трех волноводов в E-плоскости. Контур соединительной полости рассматриваемого волноводного трансформатора имеет форму произвольного треугольника. Задача рассеяния волноводных мод формулируется в виде краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничными условиями Неймана на стенках узла, условиями излучения в волноводах и условием на ребре. Модель основывается на специальном представлении искомой компоненты поля внутри треугольной области в виде суммы тригонометрических рядов, полученных с помощью метода произведения областей. Предлагается рассматривать блоки матрицы бесконечной системы линейных уравнений, которая возникает в ходе решения задачи, в качестве операторов в пространстве абсолютно сходящихся рядов l_1. Продемонстрировано, что каждый такой оператор, описывающий взаимодействие сторон треугольника, может быть записан в виде суммы вполне непрерывного оператора и оператора сжатия. Показано, что в пространстве последовательностей $l_1^{(3)} = l_1 \oplus l_1 \oplus l_1$ исследуемая система может интерпретироваться в качестве функционального уравнения с фредгольмовым оператором и что для почти всех значений частотного параметра такое уравнение единственным образом разрешимо в $l_1^{(3)}$ методом усечения, сходящимся по норме этого пространства.

Ключевые слова: волноводные неоднородности, метод произведения областей, матрично-операторные уравнения.

НОМЕНКЛАТУРА

МОМР – метод обобщенных матриц рассеяния;

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений;

l_1 – пространство последовательностей $\mathbf{s} = \{s_n\}$ таких, что $\sum_{n=0}^{\infty} |s_n| < \infty$;

$\widetilde{l}_2$ – пространство последовательностей $\mathbf{s} = \{s_n\}$ таких, что $|s_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2 n < \infty$;

$X \oplus Y$ – прямая сумма линейных пространств X и Y;

$O(x)$ – символ порядка: если $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, то существует постоянная C такая, что $|f(x)| \le C|g(x)|$ при $x \to a$;

i – мнимая единица;

$\operatorname{Re} c, \operatorname{Im} c$ – действительная и мнимая части комплексного числа c;

δ_{mn} – символ Кронекера;

$e^{i\omega t}$ – временная зависимость монохроматического процесса;

ω – круговая частота колебаний;

ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные;

ε, μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости, предполагается $\mu = 1$;

χ – волновое число, $\chi = \omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$;

x, y, z – декартовы координаты.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании волноводных структур широко используется их расчленение на отдельные элементы с последующим использованием метода сшивания, МОМР и других подходов [1, 2]. Прием успешно работает, если характеристики рассеяния элементарных блоков, возникающих после сегментации, могут быть рассчитаны с помощью высокоточных численно-аналитических методов. Примером может служить решение методом полуобращения обширного класса задач, геометрия которых допускает разбиение на регулярные участки волноводов и прямоугольные треугольники [3, 4].

© Онуфриенко Л. М., Чумаченко В. П., Чумаченко Я. В. 2015
DOI 10.15588/1607-3274-2015-3-1

В работах [5, 6] (см. также их библиографию) нами изучались возможности математического моделирования весьма гибких автономных блоков, образованных путем вычленения элементарных областей, ограниченных произвольными треугольниками. Отличительной особенностью рассмотренных моделей являлось представление искомой компоненты поля внутри треугольной области в виде тригонометрических рядов, полученных на основе метода произведения областей [7]. Как правило, достоверность получаемых результатов контролировалась с помощью различных тестов, однако все детали их формального обоснования не обсуждались. В [8], где дано строгое обоснование алгоритмов, предложенных для случая, когда треугольная область связи соединена с двумя волноводами, этот пробел был частично заполнен. В настоящей работе такое обоснование приводится для аналогичной конфигурации с тремя волновыми каналами. Узел является ключевым, так как путем последовательного присоединения к апертурам полости закороченных волноводов нулевой длины он позволяет получать в рамках МОМР матрицы рассеяния треугольной области как с двумя, так и с одним волноводными плечами. Подобно [8], СЛАУ, которая возникает при решении задачи рассеяния собственных волн волноводов на их соединении, рассматривается в качестве операторного уравнения в пространстве последовательностей $l_1^{(3)} = l_1 \oplus l_1 \oplus l_1$. В первой части работы обсуждается модель Е-плоскостной конфигурации.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сечение структуры плоскостью z=const показано на рис. 1. Будем считать, что она представляет собой разветвление бесконечных вдоль оси z плоскопараллельных волноводов и заполнена однородным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε. (Переход к случаю прямоугольных волноводов хорошо известен [9]). Треугольник является невырожденным, т. е. $\delta < \min_j \alpha_j^*, \max_j \alpha_j^* < 1-\delta$, где $\delta > 0$, $\alpha_j^* = \dfrac{\alpha_j}{\pi}$, а α_j – внутренний угол, отвечающий вершине M_j. В дополнение к основной системе координат (x, y) для каждой стороны треугольника $S_j (j=\overline{1,3})$ длиной $2a_j$ введена локальная система (x_j, y_j) так, что начало ее отсчета O_j находится в центре S_j, а ось $O_j y_j$ направлена внутрь соединительной полости Ω. Перпендикулярно к сторонам S_j присоединены полубесконечные волноводы $W_j = \{(x_j, y_j): -a_j < x_j < a_j, y_j < 0\}$.

Со стороны плеча p соединение возбуждается r-й собственной волной единичной амплитуды, имеющей лишь магнитную составляющую вдоль оси z. Задача состоит в отыскании единственной ненулевой z-компоненты электромагнитного поля $H_z = ue^{i\omega t}$. Введем обозначения: $u_\Omega \equiv u \forall (x,y) \in \Omega$, $u^{(j)} \equiv u \forall (x,y) \in W_j$,

$$ {}^C\varphi_n^{(j)}(x_j) = \cos\frac{n\pi(x_j + a_j)}{2a_j}, \ \gamma_n^{(j)} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{2a_j}\right)^2 - \chi^2} \ . \quad (1)$$

Функция u должна удовлетворять двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + \chi^2 u = 0, \qquad (2)$$

однородным граничным условиям Неймана на контуре узла, условиям сопряжения полей в апертурах соединительной полости

$$u_\Omega\Big|_{y_s=0+} = u^{(s)}\Big|_{y_s=0-}, \quad \frac{\partial u_\Omega}{\partial y_s}\Bigg|_{y_s=0+} = \frac{\partial u^{(s)}}{\partial y_s}\Bigg|_{y_s=0-},$$

$$x_s \in (-a_s, a_s), \ s = \overline{1,3}, \qquad (3)$$

условию конечности энергии поля, запасенной в любой ограниченной подобласти (условию на ребре) и условиям излучения в волноводах

$$u^{(s)} = \delta_{sp}\, {}^C\varphi_r^{(s)}(x_s) e^{-\gamma_r^{(s)} y_s} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(s)}\, {}^C\varphi_n^{(s)}(x_s) e^{\gamma_n^{(s)} y_s},$$

$$(x_s, y_s) \in W_s, \ s = \overline{1,3}. \qquad (4)$$

При $\operatorname{Im}\varepsilon \le 0$ существует единственное решение этой задачи для всех значений частоты $\omega > 0$, исключая некоторое счетное множество точек [10]. В последующем мы рассматриваем только те значения ω, при которых граничная задача однозначно разрешима.

2 СЛАУ. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Следуя методу произведения областей [7], u_Ω запишем в виде

$$u_\Omega = \sum_{j=1}^{3} u_\Omega^{(j)}, \quad u_\Omega^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(j)}\, {}^C\varphi_n^{(j)}(x_j) e^{-\gamma_n^{(j)} y_j}. \quad (5)$$

Бесконечные вектор-столбцы коэффициентов разложений $\mathbf{A}^{(s)} = \left\{A_n^{(s)}\right\}$ и $\mathbf{D}^{(j)} = \left\{D_n^{(j)}\right\}$ подлежат определению. Система функций $\left\{{}^C\varphi_n^{(j)}(x_j) e^{-\gamma_n^{(j)} y_j}\right\}_{j=1,n=0}^{j=3,n=\infty}$, по которым в (5) производится разложение, линейно независима за

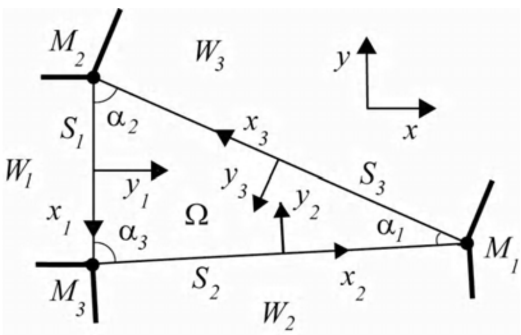

Рисунок 1 – Геометрия задачи

исключением некоторого счетного множества значений ω [11]. Это множество также исключается из рассмотрения.

Подставив выражения (4), (5) в (3) и воспользовавшись ортогональностью системы функций $\left\{{}^C\varphi_n^{(s)}(x_s)\right\}$ на интервале $(-a_s, a_s)$, мы получим бесконечную СЛАУ относительно коэффициентов разложений:

$$D_m^{(s)} + \sum_{l\neq s}\sum_{n=0}^{\infty}\hat{q}_{mn}^{(sl)}D_n^{(l)} = \delta_{sp}\delta_{mr} + A_m^{(s)}, \qquad (6)$$

$$-D_m^{(s)} + \sum_{l\neq s}\sum_{n=0}^{\infty}\hat{p}_{mn}^{(sl)}D_n^{(l)} = -\delta_{sp}\delta_{mr} + A_m^{(s)}, \qquad (7)$$

где

$$\hat{q}_{mn}^{(sl)} = \frac{1}{e_m a_s}\int_{-a_s}^{a_s}\left[{}^C\varphi_n^{(l)}(x_l)e^{-\gamma_n^{(l)}y_l}\right]\Bigg|_{y_s=0} {}^C\varphi_m^{(s)}(x_s)dx_s, \qquad (8)$$

$$\hat{p}_{mn}^{(sl)} = \frac{1}{e_m a_s\gamma_m^{(s)}}\int_{-a_s}^{a_s}\left\{\frac{\partial}{\partial y_s}\left[{}^C\varphi_n^{(l)}(x_l)e^{-\gamma_n^{(l)}y_l}\right]\right\}\Bigg|_{y_s=0} {}^C\varphi_m^{(s)}(x_s)dx_s, \qquad (9)$$

$$e_m = 1+\delta_{0m},\ m=\overline{0,\infty}\ \text{ и } s=\overline{1,3}.$$

Вне соединительной полости условие конечности энергии в ограниченной области будет выполняться, если вектор-столбец $\mathbf{A}^{(s)} = \left\{A_n^{(s)}\right\}$ удовлетворяет условию $\mathbf{A}^{(s)} \in \tilde{l}_2$ [3]. В соединительной полости мы усилим это требование, наложив его на каждую из функций $u_\Omega^{(s)}$ в отдельности, что приводит к $\mathbf{D}^{(s)} \in \tilde{l}_2$. Более того, мы предположим, что $\mathbf{A}^{(s)}, \mathbf{D}^{(s)} \in l_1 \subset \tilde{l}_2$. Существование соответствующих последовательностей $\mathbf{A}^{(s)}, \mathbf{D}^{(s)}$ следует из устанавливаемой ниже разрешимости СЛАУ, порождаемой граничными условиями.

Матричные уравнения (6) и (7) образованы путем приравнивания коэффициентов разложений величин, входящих в левые и правые части равенств (3), по функциям системы $\left\{{}^C\varphi_m^{(s)}(x_s)\right\}$. Если $\mathbf{A}^{(s)}, \mathbf{D}^{(s)} \in l_1$, то разложения $u^{(s)}\Big|_{S_s} = \sum_{m=0}^{\infty}A_m^{(s)}\,{}^C\varphi_m^{(s)}(x_s)$ и $u_\Omega^{(s)}\Big|_{S_s} = \sum_{m=0}^{\infty}D_m^{(s)}\,{}^C\varphi_m^{(s)}(x_s)$ равномерно сходятся к своим суммам, являясь их рядами Фурье. Аналогичный факт имеет место и для разложения по тем же функциям величины $\hat{u}_\Omega^{(s)} \equiv u_\Omega - u_\Omega^{(s)} = \sum_{l\neq s}u_\Omega^{(l)}$ в силу ее абсолютной непрерывности на S_s. (При $\mathbf{D}^{(l)} \in l_1$ условие интегрируемости на S_s модуля производной $\frac{\partial u_\Omega^{(l)}}{\partial x_s}$ (а также $\frac{\partial u_\Omega^{(l)}}{\partial y_s}$) легко проверяется). Отсюда вытекает [12], что равенство Фурье-коэффициентов величин, входящих в первое граничное условие в (3), означает равенство самих этих величин всюду на S_s.

Отметим, что углы при ребрах конфигурации меньше 2π. Поэтому, исходя из известного [1] поведения компоненты поля H_z в их окрестностях, можно заключить, что нормальные производные, входящие в (3), на интервале $(-a_s, a_s)$ являются квадратично интегрируемыми. Из интегрируемости на S_s производных $\left|\frac{\partial u_\Omega}{\partial y_s}\right|$ и $\left|\frac{\partial u_\Omega^{(l)}}{\partial y_s}\right|$ $(l\neq s)$ следует, что и величина $\left|\frac{\partial u_\Omega^{(s)}}{\partial y_s}\right|$ должна быть интегрируемой.

Таким образом, если бесконечная СЛАУ (6),(7) имеет решение $\mathbf{A}^{(s)}, \mathbf{D}^{(s)} \in l_1$ $(s=\overline{1,3})$, то после его подстановки в (4), (5) первое из условий (3) будет выполняться в каждой точке апертур S_1, S_2 и S_3. Из (7) и полноты системы $\left\{{}^C\varphi_m^{(s)}(x_s)\right\}$ в пространстве суммируемых функций $L(-a_s, a_s)$ вытекает, что почти всюду на S_s будет выполняться также и условие, накладываемое на нормальную производную функции u. Тем самым формулами (4),(5) задается величина, удовлетворяющая как уравнению Гельмгольца, так и всем требуемым условиям на границе. Это означает, что СЛАУ может иметь в l_1 не более одного решения, так как противоположное предположение противоречит теореме единственности решения рассматриваемой краевой задачи.

Далее вместо системы (6), (7) мы будем изучать эквивалентную систему, состоящую из матричного уравнения

$$\begin{gathered} D_m^{(s)} + \frac{1}{2}\sum_{l\neq s}\sum_{n=0}^{\infty}[\hat{q}_{mn}^{(sl)} - \hat{p}_{mn}^{(sl)}]D_n^{(l)} = \hat{h}_m^{(s)}, \\ \hat{h}_m^{(s)} = \delta_{sp}\delta_{mr}, \quad s=\overline{1,3}, \quad m=\overline{0,\infty}, \end{gathered} \qquad (10)$$

появляющегося после вычитания (7) из (6), и пересчетной формулы

$$A_m^{(s)} = \frac{1}{2}\sum_{l\neq s}\sum_{n=0}^{\infty}[\hat{q}_{mn}^{(sl)} + \hat{p}_{mn}^{(sl)}]D_n^{(l)}, \qquad (11)$$

полученной после сложения этих уравнений и позволяющей определять последовательности коэффициентов $\mathbf{A}^{(s)}$ по известным $\mathbf{D}^{(l)}$.

3 АНАЛИЗ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ. РАЗРЕШИМОСТЬ СЛАУ

Будем рассматривать бесконечные матрицы $\hat{Q}^{(sl)} = (\hat{q}_{mn}^{(sl)})$, $\hat{P}^{(sl)} = (\hat{p}_{mn}^{(sl)})$ и $\hat{F}^{(sl)} = \frac{1}{2}(\hat{Q}^{(sl)} - \hat{P}^{(sl)})$ $(s\neq l)$ в качестве операторов в пространстве последовательностей l_1. Ниже $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{l_1}$, а норма некоторого матричного оператора $A=(a_{mn}): l_1 \to l_1$ определяется формулой $\|A\| = \sup_{0\le n<\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|a_{mn}|$ (см. [13]). Известно [14], что для того, чтобы ограниченный матричный оператор был ω-непрерывным (частный случай полной непрерывности), необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{k\le n<\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}|a_{mn}|=0$. Введем проекторы $P_n = diag(\underbrace{1,\ldots,1}_{n+1},0,0\ldots)$ и $R_n = I - P_n$, где I – бесконечная единичная матрица, и изучим более детально $\hat{Q}^{(12)}$, $\hat{P}^{(12)}$ и $\hat{F}^{(12)}$. Пусть

$$\Gamma_n = \gamma_n^{(2)}\sin\alpha_3,\ {}^0\Gamma_n = \frac{n\pi}{2a_2}\sin\alpha_3,\ \Pi_n = \frac{n\pi}{2a_2}\cos\alpha_3, \tag{12}$$

$$\Lambda_n = 2\Pi_n a_1,\ \Phi_{mn}^{\pm} = \Gamma_n^2 + \left(\frac{m\pi}{2a_1} \pm \Pi_n\right)^2,$$

$$\Psi_{mn}^{\pm} = \frac{1}{\Phi_{mn}^{+}} \pm \frac{1}{\Phi_{mn}^{-}}, \tag{13}$$

$${}^0\Phi_{mn}^{\pm} = \begin{cases} \left(\dfrac{m\pi}{2a_1}\right)^2 + \left(\dfrac{n\pi}{2a_2}\right)^2 \pm \dfrac{mn\pi^2}{2a_1a_2}\cos\alpha_3 & \forall mn > 0, \\ \infty & \forall mn = 0, \end{cases}$$

$${}^0\Psi_{mn}^{\pm} = \frac{1}{{}^0\Phi_{mn}^{+}} \pm \frac{1}{{}^0\Phi_{mn}^{-}}. \tag{14}$$

Учитывая, что

$$x_2 = (a_1 - x_1)\cos\alpha_3 + y_1\sin\alpha_3 - a_2,$$

$$y_2 = (a_1 - x_1)\sin\alpha_3 - y_1\cos\alpha_3, \tag{15}$$

а также известные [15] формулы интегрирования, мы получим

$$\hat{q}_{mn}^{(12)} = \frac{1}{2e_m a_1}\left\{\left[(-1)^m\Gamma_n - (\Gamma_n\cos\Lambda_n - \Pi_n\sin\Lambda_n)e^{-2\Gamma_n a_1}\right]\times \right.$$

$$\left. \times\Psi_{mn}^{+} + \frac{m\pi}{2a_1}\sin\Lambda_n e^{-2\Gamma_n a_1}\Psi_{mn}^{-}\right\}, \tag{16}$$

$$\hat{p}_{mn}^{(12)} = \frac{1}{2e_m\gamma_m^{(1)}a_1}\left\{(-1)^{m+1}\left[\chi^2\sin\alpha_3\cos\alpha_3\Psi_{mn}^{+} + {}^0\Gamma_n\frac{m\pi}{2a_1}\Psi_{mn}^{-}\right] + \right.$$

$$+\left[{}^0\Gamma_n(\Gamma_n\sin\Lambda_n + \Pi_n\cos\Lambda_n) - \gamma_n^{(2)}\cos\alpha_3(\Gamma_n\cos\Lambda_n - \Pi_n\sin\Lambda_n)\right]\times$$

$$\left.\times e^{-2\Gamma_n a_1}\Psi_{mn}^{+} + \frac{m\pi}{2a_1}\left[\gamma_n^{(2)}\cos\alpha_3\sin\Lambda_n + {}^0\Gamma_n\cos\Lambda_n\right]e^{-2\Gamma_n a_1}\Psi_{mn}^{-}\right\}. \tag{17}$$

Введем обозначения ${}^0\hat{Q}^{(12)} = ({}^0\hat{q}_{mn}^{(12)})$, ${}^0\hat{P}^{(12)} = ({}^0\hat{p}_{mn}^{(12)})$ и ${}^0\hat{F}^{(12)} = \frac{1}{2}({}^0\hat{Q}^{(12)} - {}^0\hat{P}^{(12)})$, где

$${}^0\hat{q}_{mn}^{(12)} = \frac{(-1)^m}{2a_1}{}^0\Gamma_n\,{}^0\Psi_{mn}^{+},\ {}^0\hat{p}_{mn}^{(12)} = -\frac{(-1)^m}{2a_1}{}^0\Gamma_n\,{}^0\Psi_{mn}^{-},$$

$${}^0\hat{f}_{mn}^{(12)} = \frac{(-1)^m}{2a_1\,{}^0\Phi_{mn}^{+}}{}^0\Gamma_n, \tag{18}$$

и представим операторы $\hat{Q}^{(12)}$, $\hat{P}^{(12)}$, $\hat{F}^{(12)}$ суммами $\hat{Q}^{(12)} = {}^C\hat{Q}^{(12)} + {}^0\hat{Q}^{(12)}$, $\hat{P}^{(12)} = {}^C\hat{P}^{(12)} + {}^0\hat{P}^{(12)}$ и $\hat{F}^{(12)} = {}^C\hat{F}^{(12)} + {}^0\hat{F}^{(12)}$, где ${}^C\hat{F}^{(12)} = \frac{1}{2}({}^C\hat{Q}^{(12)} - {}^C\hat{P}^{(12)})$. Запишем элементы матрицы ${}^C\hat{Q}^{(12)} = \hat{Q}^{(12)} - {}^0\hat{Q}^{(12)}$ в виде

$${}^C\hat{q}_{mn}^{(12)} = \frac{1}{2e_m a_1}\left\{(-1)^m(\Gamma_n\Psi_{mn}^{+} - {}^0\Gamma_n\,{}^0\Psi_{mn}^{+}) - (\Gamma_n\cos\Lambda_n - \Pi_n\sin\Lambda_n)e^{-2\Gamma_n a_1}\times\right.$$

$$\left.\times\left[{}^0\Psi_{mn}^{+} + (\Psi_{mn}^{+} - {}^0\Psi_{mn}^{+})\right] + \frac{m\pi}{2a_1}\sin\Lambda_n e^{-2\Gamma_n a_1}\left[{}^0\Psi_{mn}^{-} + (\Psi_{mn}^{-} - {}^0\Psi_{mn}^{-})\right]\right\}. \tag{19}$$

Будем рассматривать матрицу ${}^C\hat{Q}^{(12)}$ как сумму матриц, элементы которых определяются отдельными слагаемыми в правой части (19). С учетом формулы (A1), полученной в приложении, ясно, что верхняя грань

$$\sup_{k\le n<\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{(\Gamma_n\cos\Lambda_n - \Pi_n\sin\Lambda_n)e^{-2\Gamma_n a_1}\,{}^0\Psi_{mn}^{+}}{2e_m a_1}\right| =$$

$$= \sup_{k\le n<\infty}\left[\frac{|\Gamma_n\cos\Lambda_n - \Pi_n\sin\Lambda_n|\left|e^{-2\Gamma_n a_1}\right|}{2a_1}\sum_{m=1}^{\infty}{}^0\Psi_{mn}^{+}\right]$$

достигается при конечных значениях n и стремится к нулю, когда $k\to\infty$. Это значит, что соответствующее слагаемое в (19) задает ω-непрерывный матричный оператор. С помощью формулы (A5) устанавливаем также ω-непрерывность оператора, определяемого слагаемым $\dfrac{m\pi\sin\Lambda_n e^{-2\Gamma_n a_1}\,{}^0\Psi_{mn}^{-}}{4a_1^2 e_m}$. Несложно показать, что таковыми будут и операторы, чьи матричные элементы включают разности $\Gamma_n\Psi_{mn}^{+} - {}^0\Gamma_n\,{}^0\Psi_{mn}^{+}$, $\Psi_{mn}^{+} - {}^0\Psi_{mn}^{+}$ и $\Psi_{mn}^{-} - {}^0\Psi_{mn}^{-}$. Таким образом оператор ${}^C\hat{Q}^{(12)}$ является ω-непрерывным. Из формул (18) и (A1) также следует ограниченность оператора ${}^0\hat{Q}^{(12)}$. В такой же способ устанавливаем ω-непрерывность оператора ${}^C\hat{P}^{(12)}$, а стало быть и ${}^C\hat{F}^{(12)}$, и ограниченность оператора ${}^0\hat{P}^{(12)}$, а значит и ${}^0\hat{F}^{(12)}$.

Найдем далее предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|{}^0\hat{f}_{mn}^{(12)}| = \lim_{n\to\infty}\frac{{}^0\Gamma_n}{2a_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{{}^0\Phi_{mn}^{+}} =$$

$$=\frac{a_1\sin\alpha_3}{a_2\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)^2+2\frac{ma_1}{na_2}\cos\alpha_3+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2}. \quad (20)$$

Последнее выражение может быть заменено некоторым интегралом, значение которого известно [16], а именно,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|{}^0\hat{f}_{mn}^{(12)}| = \frac{a_1\sin\alpha_3}{a_2\pi}\int_0^{\infty}\frac{dv}{v^2+2v\frac{a_1}{a_2}\cos\alpha_3+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2}=\alpha_3^*. \quad (21)$$

Заметим, что монотонность подынтегральной функции, являющаяся одним из условий перехода от предела к интегралу, существенна лишь для больших значений переменной интегрирования (см. [17], решение задачи 30 из второго отдела). Значит, для любого $\tilde{\varepsilon}>0$ существует конечное число N_{12} такое, что $\sum_{m=0}^{\infty}|{}^0\hat{f}_{mn}^{(12)}| < \alpha_3^*+\tilde{\varepsilon}\,\forall n\ge N_{12}$ и $\|{}^0\hat{F}^{(12)}R_{N_{12}}\| < \alpha_3^*+\tilde{\varepsilon}$.

Вычисление значений $\hat{q}_{mn}^{(21)}$ и $\hat{p}_{mn}^{(21)}$ показывает, что они могут быть найдены из (16) и (17) путем перестановок $a_1\leftrightarrow a_2$, $\gamma_k^{(1)}\leftrightarrow\gamma_k^{(2)}$ и умножения полученных выражений на $(-1)^{m+n}$. Предел $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|{}^0\hat{f}_{mn}^{(21)}|$ совпадает с (21). Отсюда следует, что для всякого $\tilde{\varepsilon}>0$ найдется число N_{21} такое, что $\sum_{m=0}^{\infty}|{}^0\hat{f}_{mn}^{(21)}| < \alpha_3^*+\tilde{\varepsilon}\;\forall n\ge N_{21}$ и $\|{}^0\hat{F}^{(21)}R_{N_{21}}\| < \alpha_3^*+\tilde{\varepsilon}$. Если l номер стороны треугольника, следующей за s-й стороной против часовой стрелки, то значения $\hat{q}_{mn}^{(sl)}$ и $\hat{p}_{mn}^{(sl)}$ могут быть получены из формул (12)–(17), заменяя в правых их частях индексы 1 на s, 2 на l, а угол α_3 на угол между сторонами s и l. Если l-я сторона предшествует s-й стороне, то значения $\hat{q}_{mn}^{(sl)}$ и $\hat{p}_{mn}^{(sl)}$ получаются за таким же принципом из формул для $\hat{q}_{mn}^{(21)}$ и $\hat{p}_{mn}^{(21)}$.

Обобщая полученные результаты, можно утверждать, что $\forall\ \tilde{\varepsilon}>0$ существуют числа $N_l=\max_{s\ne l}(N_{sl})$ такие, что имеют место представления

$$\hat{F}^{(sl)}={}^F\hat{F}^{(sl)}+{}^B\hat{F}^{(sl)},\ \|{}^B\hat{F}^{(sl)}\| < \alpha_k^*+\tilde{\varepsilon},\ k\ne s,l. \quad (22)$$

Здесь ${}^B\hat{F}^{(sl)}={}^0\hat{F}^{(sl)}R_{N_l}$, а оператор ${}^F\hat{F}^{(sl)}={}^C\hat{F}^{(sl)}+{}^0\hat{F}^{(sl)}P_{N_l}$ является ω-непрерывным в силу ω-непрерывности первого слагаемого и конечности N_l.

Введем прямую сумму $l_1^{(3)}=l_1\oplus l_1\oplus l_1$, а также тождественный оператор $\mathbf{I}^{(3)}=diag(I,I,I):l_1^{(3)}\to l_1^{(3)}$. Пусть $\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\mathbf{x}^{(3)}\in l_1$ и $\mathbf{x}=(\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\mathbf{x}^{(3)})^T\in l_1^{(3)}$, где T – транспонирование. Снабдим $l_1^{(3)}$ нормой $\|\mathbf{x}\|_3=\sum_{k=1}^{3}\|\mathbf{x}^{(k)}\|$. Тогда для нормы некоторой операторной матрицы $\mathbf{A}=(A^{(sl)}):l_1^{(3)}\to l_1^{(3)}$ справедлива оценка $\|\mathbf{A}\|_{33}\le\max_{1\le l\le 3}\sum_{s=1}^{3}\|A^{(sl)}\|$.

Будем рассматривать систему (10) как одно функциональное уравнение в $l_1^{(3)}$:

$$\mathbf{KD}\equiv(\mathbf{I}^{(3)}+\mathbf{B}+\mathbf{F})\mathbf{D}=\mathbf{H}, \quad (23)$$

где $\mathbf{D}=(\mathbf{D}^{(1)},\mathbf{D}^{(2)},\mathbf{D}^{(3)})^T$, $\mathbf{H}=(\mathbf{h}^{(1)},\mathbf{h}^{(2)},\mathbf{h}^{(3)})^T$, $\mathbf{h}^{(s)}=(\hat{h}_m^{(s)})\ (s=\overline{1,3})$ – векторы-столбцы правых частей, а операторные матрицы $\mathbf{B},\mathbf{F}$ имеют вид

$$\mathbf{B}=[B^{(sl)}]=\begin{bmatrix}0 & {}^B\hat{F}^{(12)} & {}^B\hat{F}^{(13)}\\ {}^B\hat{F}^{(21)} & 0 & {}^B\hat{F}^{(23)}\\ {}^B\hat{F}^{(31)} & {}^B\hat{F}^{(32)} & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}=[F^{(sl)}]=\begin{bmatrix}0 & {}^F\hat{F}^{(12)} & {}^F\hat{F}^{(13)}\\ {}^F\hat{F}^{(21)} & 0 & {}^F\hat{F}^{(23)}\\ {}^F\hat{F}^{(31)} & {}^F\hat{F}^{(32)} & 0\end{bmatrix}. \quad (24)$$

Заметим, что из предположений, сформулированных ранее, вытекает, что если уравнение (23) имеет решение, то оно единственно или, что одно и то же, однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Матрица $\mathbf{F}$ представляет собой вполне непрерывный оператор $l_1^{(3)}\to l_1^{(3)}$, что следует из вполне непрерывности $F^{(sl)}$ в $l_1\forall s,l$. Оценим норму оператора $\mathbf{B}$:

$$\|\mathbf{B}\|_{33}=\max_l\sum_{s\ne l}\left\|{}^B\hat{F}^{(sl)}\right\|\le\max_l\sum_{s\ne l}\alpha_s^*+2\tilde{\varepsilon}=\max_l(1-\alpha_l^*)+2\tilde{\varepsilon}=$$

$$=1-\min_l\alpha_l^*+2\tilde{\varepsilon}<1-\delta+2\tilde{\varepsilon}<1\forall\tilde{\varepsilon}<\delta/2. \quad (25)$$

Таким образом, взяв числа N_l достаточно большими, убеждаемся, что оператор $\mathbf{I}^{(3)}+\mathbf{B}\equiv\mathbf{G}$ непрерывно обратим, а значит оператор $\mathbf{K}=\mathbf{G}+\mathbf{F}$ фредгольмов и, так как $\mathbf{H}\in l_1^{(3)}$, уравнение (23) в силу альтернативы Фредгольма [18] имеет единственное решение.

4 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕДУКЦИИ

Введем проекторы $\mathbf{P}_n^{(3)}=diag(P_{n_1},P_{n_2},P_{n_3})$, $\mathbf{R}_n^{(3)}=\mathbf{I}^{(3)}-\mathbf{P}_n^{(3)}$, где $n_1,n_2,n_3\to\infty$, когда $n\to\infty$. Имеют место свойства $\mathbf{P}_n^{(3)^2} = \mathbf{P}_n^{(3)}$, $\|\mathbf{P}_n^{(3)}\|_{33} = 1$ и $\|\mathbf{R}_n^{(3)}\mathbf{x}\|_3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \forall \mathbf{x} \in l_1^{(3)}$. Пусть, $X_n = \mathbf{P}_n^{(3)} l_1^{(3)}$ – подпространства в $l_1^{(3)}$, $\mathbf{D}_n \in X_n$ и $\mathbf{B}_n = \mathbf{P}_n^{(3)}\mathbf{B}$. Ясно, что $\mathbf{G}X_n \neq X_n$ и $\mathbf{P}_n\mathbf{G}\mathbf{D}_n = (\mathbf{I}^{(3)} + \mathbf{B}_n)\mathbf{D}_n \equiv \mathbf{G}_n\mathbf{D}_n$. Положим $n_j \geq N_j (j = \overline{1,3})$ и рассмотрим наряду с точным уравнением (23) полученные из него усеченные уравнения

$$\mathbf{K}_n\mathbf{D}_n \equiv (\mathbf{G}_n + \mathbf{P}_n\mathbf{F})\mathbf{D}_n = \mathbf{P}_n\mathbf{H}. \qquad (26)$$

Поскольку $\|\mathbf{B}_n\|_{33} \leq \|\mathbf{B}\|_{33} < 1$, то операторы $\mathbf{G}_n : X_n \to X_n$ непрерывно обратимы, а обратные операторы ограничены по норме в совокупности:

$$\|(\mathbf{G}_n)^{-1}\|_{33} \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{B}_n\|_{33}} \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{B}\|_{33}}. \qquad (27)$$

Полагая $X = Y = l_1^{(3)}$ в условиях известной теоремы ([19], теорема 6.2) и принимая во внимание свойства операторов $\mathbf{K}, \mathbf{G}, \mathbf{F}, \mathbf{P}_n$ и $\mathbf{G}_n$, мы приходим к заключению, что для достаточно больших значений n системы (26) однозначно разрешимы и имеет место сходимость последовательности приближенных решений $\mathbf{D}_n^* = \mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbf{H}$ к точному решению $\mathbf{D}^* = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{H}$:

$$\|\mathbf{D}^* - \mathbf{D}_n^*\|_3 = O\left(\inf_{\mathbf{D}_n \in X_n} \|\mathbf{D}^* - \mathbf{D}_n\|_3\right) = O\left(\|\mathbf{R}_n\mathbf{D}^*\|_3\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad (28)$$

По известным $\mathbf{D}_n^*$ приближенные значения амплитуд рассеянных волноводных мод могут быть найдены с помощью пересчетных формул

$$A_m^{*(s)} = \frac{1}{2}\sum_{l \neq s}\sum_{k=0}^{n_l} [\hat{q}_{mk}^{(sl)} + \hat{p}_{mk}^{(sl)}] D_k^{*(l)}, s = \overline{1,3},\ m = \overline{0, n_s}, \quad (29)$$

следующих из (11).

ВЫВОДЫ

Рассмотрена задача рассеяния волн в однородно заполненном E-плоскостном соединении трех волноводов с областью связи, ограниченной произвольным треугольником. Исследованы свойства матрицы бесконечной системы линейных уравнений, появляющейся при применении для анализа такой структуры метода произведения областей. Показано, что каждый блок матрицы, описывающий взаимодействие сторон треугольника, являет собой ограниченный матричный оператор $l_1 \to l_1$. Этот оператор может быть представлен в виде суммы вполне непрерывного оператора и оператора сжатия, причем норма последнего не превышает некоторой величины, которая известным образом зависит от угла между сторонами. Бесконечную СЛАУ задачи предложено рассматривать в качестве операторного уравнения в пространстве последовательностей $l_1^{(3)} = l_1 \oplus l_1 \oplus l_1$. Показано, что для почти всех значений частотного параметра $\omega > 0$ это уравнение может иметь не более одного решения. Обоснована фредгольмовость рассматриваемого матричного уравнения и его разрешимость. Доказано, что решение системы может быть найдено методом редукции, сходящимся по норме пространства $l_1^{(3)}$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках госбюджетной научно-исследовательской темы Запорожского национального технического университета «Математические модели в прикладных проблемах механики и электродинамики» (номер гос. регистрации 0112U005342).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Воспользовавшись формулой 5.1.25(3) из [16], оценим суммы рассмотренных ниже рядов. Предполагается, что $0 < \alpha_3 < \pi$ и $n \geq 1$.

$$\sum_{m=1}^{\infty} {}^0\Psi_{mn}^+ = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{{}^0\Phi_{mn}^+} + \frac{1}{{}^0\Phi_{mn}^-}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{2a_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2a_2}\right)^2 + \frac{mn\pi^2}{2a_1a_2}\cos\alpha_3} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{2a_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2a_2}\right)^2 - \frac{mn\pi^2}{2a_1a_2}\cos\alpha_3} = \left(\frac{2a_1}{\pi}\right)^2 \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{m^2 + \left(n\frac{a_1}{a_2}\right)^2 + 2mn\frac{a_1}{a_2}\cos\alpha_3} -$$

$$-\left(\frac{2a_2}{n\pi}\right)^2 = \left(\frac{2a_1}{\pi}\right)^2 \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\left(m + n\frac{a_1}{a_2}\cos\alpha_3\right)^2 + \left(n\frac{a_1}{a_2}\sin\alpha_3\right)^2} - \left(\frac{2a_2}{n\pi}\right)^2 =$$

$$= \frac{4a_1a_2}{\pi n \sin\alpha_3} \cdot \frac{sh(2\pi n\frac{a_1}{a_2}\sin\alpha_3)}{ch(2\pi n\frac{a_1}{a_2}\sin\alpha_3) - \cos(2\pi n\frac{a_1}{a_2}\cos\alpha_3)} - \left(\frac{2a_2}{n\pi}\right)^2 \equiv \eta_n = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (A1)$$

Так как $\left|{}^0\Psi_{mn}^-\right| < {}^0\Psi_{mn}^+ \forall m \geq 1$, то нижеследующий ряд сходится и его сумма κ_n удовлетворяет неравенству

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|{}^0\Psi_{mn}^-\right| = \kappa_n < \eta_n = O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (A2)$$

Из определения ${}^0\Phi_{mn}^+$ и ${}^0\Phi_{mn}^-$ следует, что при $mn \geq 1$

$${}^0\Phi_{mn}^+ - {}^0\Phi_{mn}^- = \frac{mn\pi^2}{a_1a_2}\cos\alpha_3, \qquad (A3)$$

$${}^0\Phi_{mn}^+\,{}^0\Phi_{mn}^- = \left[\left(\frac{m\pi}{2a_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2a_2}\right)^2 + \frac{mn\pi^2}{2a_1a_2}|\cos\alpha_3|\right] \times$$
$$\times \left[\left(\frac{m\pi}{2a_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2a_2}\right)^2 - \frac{mn\pi^2}{2a_1a_2}|\cos\alpha_3|\right]. \qquad (A4)$$

Поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\left|{}^0\Psi_{mn}^-\right| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 n\pi^2 |\cos\alpha_3|}{a_1a_2\,{}^0\Phi_{mn}^+\,{}^0\Phi_{mn}^-} \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 n\pi^2 |\cos\alpha_3|}{a_1a_2\left(\frac{m\pi}{2a_1}\right)^2\left[\left(\frac{m\pi}{2a_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2a_2}\right)^2 - \frac{mn\pi^2}{2a_1a_2}|\cos\alpha_3|\right]} <$$

$$< \frac{16na_1^3|\cos\alpha_3|}{\pi^2 a_2} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{m^2 + \left(n\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - 2mn\frac{a_1}{a_2}|\cos\alpha_3|} =$$

$$=\frac{16na_1^3|\cos\alpha_3|}{\pi^2 a_2}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{\left(m-n\frac{a_1}{a_2}|\cos\alpha_3|\right)^2+\left(n\frac{a_1}{a_2}\sin\alpha_3\right)^2}=$$

$$=\frac{16a_1^2|\cos\alpha_3|}{\pi\sin\alpha_3}\frac{sh(2\pi n\frac{a_1}{a_2}\sin\alpha_3)}{ch(2\pi n\frac{a_1}{a_2}\sin\alpha_3)-\cos(2\pi n\frac{a_1}{a_2}|\cos\alpha_3|)}=O(1). \quad (A5)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миттра Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли. – М. : Мир, 1974. – 328 с.
2. Arndt F. Automated design of waveguide components using hybrid mode-matching/numerical EM building-blocks in optimization-oriented CAD frameworks – State-of-the-art and recent advances / F. Arndt, R. Beyer, J. M. Reiter, T. Sieverding and T. Wolf // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1997. – Vol. 45, No. 5. – P. 747–760.
3. Шестопалов В. П. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции / В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов. – Киев : Наукова думка, 1984.– 296 с.
4. Шестопалов В. П. Резонансное рассеяние волн. Т. 2. Волноводные неоднородности / В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, Л. А. Рудь. – Киев : Наукова думка, 1986. – 216 с.
5. Ващенко В. В. О выборе представления поля для базовой треугольной области в задачах моделирования H-плоскостных волноводных узлов / В. В. Ващенко, В. П. Чумаченко // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2010. – № 1. – С. 5–9.
6. Chumachenko V. P. A GSM analysis of E-pane waveguide junctions filled with piecewise homogeneous dielectric / V. P. Chumachenko, V. V. Vashchenko // International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. – 2012. – Vol. 25, No. 2. – P. 163–174.
7. Chumachenko V. P. Efficient field representation for polygonal region / V. P. Chumachenko // Electronics Letters. – 2001. – Vol. 37, No. 19. – P. 1164–1165.
8. Chumachenko V.P. Properties of some matrix operators appearing in the theory of planar waveguide junctions / V. P. Chumachenko / / Telecommunications and Radio Engineering. – 2013. – Vol. 72, No. 6. – P. 469–484.
9. Левин Л. Теория волноводов / Л. Левин. – М. : Радио и связь, 1981. – 312 с.
10. Шестопалов В. П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур / В. П. Шестопалов. – Киев : Наукова думка, 1987. – 288 с.
11. Chumachenko V. P. On linear independence of some function systems appearing in the theory of plane wave fields / V. P. Chumachenko / / Telecommunications and Radio Engineering. – 2015. – Vol. 74, No. 4. – P. 281–296.
12. Бари Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : Физматгиз, 1961. – 936 с.
13. Хатсон В. Приложения функционального анализа и теории операторов / В. Хатсон, Дж. Пим. – М. : Мир, 1983. – 432 с.
14. Грибанов Ю. И. Координатные пространства и бесконечные системы линейных уравнений. III / Ю. И. Грибанов // Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 3(34). – С. 27–39.
15. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.
16. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Физматлит, 2002. – 632 с.
17. Полиа Г. Задачи и теоремы из анализа.Ч. 1 / Г. Полиа, Г. Сеге. – М. : Наука, 1978.– 392 с.
18. Треногин В. А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М. : Наука, 1980. – 496 с.
19. Габдулхаев Б. Г. Теория приближенных методов решения операторных уравнений / Б. Г. Габдулхаев. – Казань : Казанский государственный университет, 2006. – 112 с.

Статья поступила в редакцию 20.05.2015.
После доработки 18.06.2015.

Онуфрієнко Л. М.[1], Чумаченко В. П.[2], Чумаченко Я. В.[3]

[1]Канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Запорізького національного технічного університету, Запоріжжя, Україна

[2]Д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Запорізького національного технічного університету, Запоріжжя, Україна

[3]Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри математичних методів в інженерії Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна

ДО ОБҐРУНТУВАННЯ ОДНІЄЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПЛОСКОГО З'ЄДНАННЯ ТРЬОХ ХВИЛЕВОДІВ. ЧАСТИНА I. E-ПЛОЩИННА ЗАДАЧА

У статті запропонована і обґрунтована математична модель зчленування трьох хвилеводів в E-площині. Контур з'єднувальної порожнини хвилеводного трансформатора, що розглядається, має форму довільного трикутника. Задача розсіювання хвилеводних мод формулюється у вигляді крайової задачі для рівняння Гельмгольца з межовими умовами Неймана на стінках вузла, умовами випромінювання в хвилеводах та умовою на ребрі. Модель ґрунтується на спеціальному зображенні шуканої компоненти поля всередині трикутної області в вигляді суми тригонометричних рядів, отриманих за допомогою методу добутку областей. Пропонується розглядати блоки матриці нескінченної системи лінійних рівнянь, яка виникає в ході розв'язування задачі, в якості операторів в просторі абсолютно збіжних рядів l_1. Продемонстровано, що кожний такий оператор, який описує взаємодію сторін трикутника, може бути записано в вигляді суми цілком неперервного оператора та оператора стиснення. Показано, що в просторі послідовностей $l_1^{(3)}=l_1\oplus l_1\oplus l_1$ досліджувана система може бути інтерпретована в якості одного функціонального рівняння з фредгольмовим оператором і що майже для всіх значень частотного параметра отримане рівняння єдиним чином розв'язне в $l_1^{(3)}$ методом зрізання збіжним за нормою цього простору.

Ключові слова: хвилеводні неоднорідності, метод добутку областей, матрично-операторні рівняння.

Onufriyenko L. M.[1], Chumachenko V. P.[2], Chumachenko Ya. V.[3]
[1]Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of Department of Higher Mathematics, Zaporizhzhya National Technical University, Zaporizhzhya, Ukraine
[2]Dr.Sc., Professor, Head of Department of Higher Mathematics, Zaporizhzhya National Technical University, Zaporizhzhya, Ukraine
[3]Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of Department of Mathematical Methods in Engineering, Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ivano-Frankivsk, Ukraine

ON JUSTIFICATION OF A MATHEMATICAL MODEL FOR A PLANAR JUNCTION OF THREE WAVEGUIDES. PART I. *E*-PLANE PROBLEM

In the paper, a mathematical model of an *E*-plane junction of three waveguides has been presented and justified. The coupling cavity of the waveguide transformer in question has an arbitrary triangular shape. The problem of scattering of waveguide modes is formulated in the form of a boundary-value problem for the Helmholtz equation with Neumann boundary conditions on the periphery of the unit, radiation conductions in the waveguides and with the edge condition. The model is based on the specific trigonometric-series expansions of the field in the triangular connecting region, which are constructed using the domain-product technique. It is suggested to consider the blocks of the matrix of the infinite system of linear equations, which arises in the course of solving the problem, in the capacity of operators in the sequence space of absolutely convergent series l_1. It has been demonstrated that each such operator, describing the interaction of sides of the triangle, can be represented as a sum of a completely continuous operator and the contraction operator. It has been shown that in the space of sequences $l_1^{(3)} = l_1 \oplus l_1 \oplus l_1$ the investigated system presents a functional equation with the Fredholm operator and that for almost all values of the frequency parameter the resulting equation is uniquely solvable in $l_1^{(3)}$ by means of the truncation method convergent in the norm of this space.

Keywords: waveguide discontinuities, domain-product technique, matrix-operator equations.

REFERENCES

1. Mittra R., Lee S. W. Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. New York, Macmillan, 1971, 302 p.
2. Arndt F., Beyer R., Reiter J. M., Sieverding T. and Wolf T. Automated design of waveguide components using hybrid mode-matching/numerical EM building-blocks in optimization-oriented CAD frameworks – State-of-the-art and recent advances, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques,* 1997, Vol. 45, No. 5, pp. 747–760.
3. Shestopalov V. P. Matrichny'e uravneniya tipa svertki v teorii difrakcii / V. P. Shestopalov, A. A. Kirilenko, S. A. Masalov. Kyiv, Naukova dumka, 1984, 296 p.
4. Shestopalov V. P., Kirilenko A. A., Rud' L. A. Rezonansnoe rasseyanie voln. Vol. 2. Volnovodny'e neodnorodnosti. Kyiv, Naukova Dumka, 1986, 216 p.
5. Vashchenko V. V., Chumachenko V. P. O vy'bore predstavleniya polya dlya bazovoj treugol'noj oblasti v zadachax modelirovaniya H-ploskostny'x volnovodny'x uzlov, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2010, No. 1, pp. 5 – 9.
6. Chumachenko V. P., Vashchenko V. V. A GSM analysis of E-pane waveguide junctions filled with piecewise homogeneous dielectric, *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields,* 2012, Vol. 25, No. 2, pp. 163–174.
7. Chumachenko V. P. Efficient field representation for polygonal region, *Electronics Letters*, 2001,Vol. 37, No. 19, pp. 1164–1165.
8. Chumachenko V. P. Properties of some matrix operators appearing in the theory of planar waveguide junctions, *Telecommunications and Radio Engineering*, 2013, Vol. 72, No. 6, pp. 469–484.
9. Levin L. Teoriya volnovodov. Moscow, Radio i svyaz', 1981, 312 p.
10. Shestopalov V. P. Spektral'naya teoriya i vozbuzhdenie otkry'ty'x struktur. Kyiv, Naukova dumka, 1987, 288 p.
11. Chumachenko V. P. On linear independence of some function systems appearing in the theory of plane wave fields, *Telecommunications and Radio Engineering,* 2015, Vol. 74, No. 4, pp. 281–296.
12. Bari N. K. Trigonometricheskie ryady'. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 936 p.
13. Xatson V., Pim Dzh. Prilozheniya funkcional'nogo analiza i teorii operatorov. Moscow, Mir, 1983, 432 p.
14. Gribanov Yu. I. Koordinatny'e prostranstva i beskonechny'e sistemy' linejny'x uravnenij. III, *Izv. vuzov. Matematika*, 1963, No.3(34), P. 27–39.
15. Gradshtejn I. S., Ry'zhik I. M. Tablicy' integralov, sum, ryadov i proizvedenij. Moscow, Nauka, 1971, 1108 p.
16. Prudnikov A. P., Bry'chkov Yu. A., Marichev O. I. Integraly' i ryady'. Vol.1. Elementarny'e funkcii. Moscow, Fizmatlit, 2002, 632 p.
17. Polia G., Sege G. Zadachi i teoremy' iz analiza. Vol.1. Moscow, Nauka, 1978, 392 p.
18. Trenogin V. A. Funkcional'ny'j analiz. Moscow, Nauka, 1980, 496 p.
19. Gabdulxaev B. G. Teoriya priblizhenny'x metodov resheniya operatorny'x uravnenij. Kazan', *Kazanskij gosudarstvenny'j universitet,* 2006, 112 p.