p-ISSN 1607-3274. Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2015. № 4
e-ISSN 2313-688X. Radio Electronics, Computer Science, Control. 2015. № 4

РАДІОФІЗИКА

РАДИОФИЗИКА

RADIOPHYSICS

УДК 517.9 : 537.86

Онуфриенко Л. М.[1], Чумаченко В. П.[2], Чумаченко Я. В.[3]

[1]Канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Запорожского национального технического университета, Запорожье, Украина

[2]Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Запорожского национального технического университета, Запорожье, Украина

[3]Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры математических методов в инженерии Ивано-Франковского национального технического университета нефти и газа, Ивано-Франковск, Украина

К ОБОСНОВАНИЮ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛОСКОГО СОЕДИНЕНИЯ ТРЕХ ВОЛНОВОДОВ. ЧАСТЬ II. H-ПЛОСКОСТНАЯ ЗАДАЧА

В работе предложена и обоснована математическая модель H-плоскостного соединения трех волноводов с произвольно треугольной областью связи. Задача рассеяния волноводных мод формулируется в виде краевой задачи для уравнения Гельмгольца с однородными граничными условиями Дирихле на контуре конфигурации, условиями излучения в волноводах и условием на ребре. Модель основывается на представлении искомой компоненты поля внутри треугольной соединительной полости в виде суммы тригонометрических рядов, полученных на основе метода произведения областей. Для улучшения сходимости используемых рядов скорректирован традиционный для этого метода вид разложения по синусам. Изучены характерные особенности бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, возникающей в ходе решения задачи. Показано, что после простой модификации она приводится к эквивалентной системе, которая имеет те же свойства, что и система, которая была исследована в первой части работы при анализе аналогичной E-плоскостной структуры. Этот факт позволил интерпретировать систему преобразованных уравнений, как одно функциональное уравнение с фредгольмовым оператором в пространстве последовательностей $l_1^{(3)} = l_1 \oplus l_1 \oplus l_1$, где l_1 является пространством абсолютно сходящихся рядов, а также доказать, что это уравнение имеет единственное решение, которое может быть найдено методом редукции, сходящимся по норме $l_1^{(3)}$.

Ключевые слова: волноводные неоднородности, метод произведения областей, матрично-операторные уравнения.

НОМЕНКЛАТУРА

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений;

l_1 – пространство последовательностей $\mathbf{s} = \{s_n\}$ таких, что $\sum_{n=0}^{\infty} |s_n| < \infty$;

$\tilde{l}_2$ – пространство последовательностей $\mathbf{s} = \{s_n\}$ таких, что $|s_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2 n < \infty$;

$X \oplus Y$ – прямая сумма линейных пространств X и Y;

$O(x)$ – символ порядка: если $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, то существует постоянная C такая, что $|f(x)| \le C|g(x)|$ при $x \to a$;

i – мнимая единица;

$\operatorname{Re} c, \operatorname{Im} c$ – действительная и мнимая части комплексного числа c;

δ_{mn} – символ Кронекера;

$e^{i\omega t}$ – временная зависимость монохроматического процесса;

ω – круговая частота колебаний;

ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные;

ε, μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости, предполагается $\mu = 1$;

χ – волновое число, $\chi = \omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$;

x, y, z – декартовы координаты.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением работ [1–3], посвященных построению эффективных математических моделей гибких автономных блоков треугольной формы, которые можно ввести в процессе сегментации волноводных узлов при применении метода обобщенных матриц рассеяния. В первой ее части [4] рассматривалась E-плоскостная конфигурация, состоящая из трех волновых каналов, присоединенных к апертурам соединительной полости. Как и в предшествующих работах, в [4] для представления искомого поля внутри области связи были использованы тригонометрические разложения, получен-

DOI 10.15588/1607-3274-2015-4-1

ные на основе метода произведения областей [5]. Ниже предлагается и обосновывается математическая модель аналогичного соединения волноводов в H-плоскости. Полученные результаты основываются на устанавливаемой в работе возможности сведения бесконечной СЛАУ, возникающей при решении задачи рассеяния собственных волн волноводов на их сочленении, к эквивалентной системе, которая в пространстве последовательностей $l_1^{(3)} = l_1 \oplus l_1 \oplus l_1$ являет собой матрично-операторное уравнение с теми же свойствами, что и уравнение, изученное в [4].

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сечение структуры плоскостью z=const имеет такой же вид, как и случае E-плоскостного соединения. Для удобства читателя геометрия задачи восстановлена на рис. 1.

Кроме основной системы координат (x, y) для каждой из сторон треугольника S_j длиной $2a_j$ введена локальная система (x_j, y_j) так, что начало ее отсчета O_j находится в центре S_j, а ось $O_j y_j$ направлена внутрь соединительной полости Ω. Через α_j обозначены внутренние углы, отвечающие вершинам $M_j (j = \overline{1,3})$. Треугольник является невырожденным. Перпендикулярно к его сторонам присоединены полубесконечные волноводы $W_j = \{(x_j, y_j) : -a_j < x_j < a_j, y_j < 0\}$. Как и в [4], будем считать, что разветвление волноводов заполнено однородным диэлектриком с относительной проницаемостью ε.

Со стороны плеча p соединение возбуждается r-й собственной волной единичной амплитуды, имеющей лишь электрическую составляющую вдоль оси z. Задача состоит в отыскании единственной z-компоненты электромагнитного поля $E_z = ue^{i\omega t}$. Введем обозначения: $u_\Omega \equiv u \forall (x, y) \in \Omega$, $u^{(j)} \equiv u \forall (x, y) \in W_j$,

$$ {}^S\varphi_n^{(j)}(x_j) = \sin \frac{n\pi(x_j + a_j)}{2a_j}, \ \gamma_n^{(j)} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{2a_j}\right)^2 - \chi^2} \ . \quad (1) $$

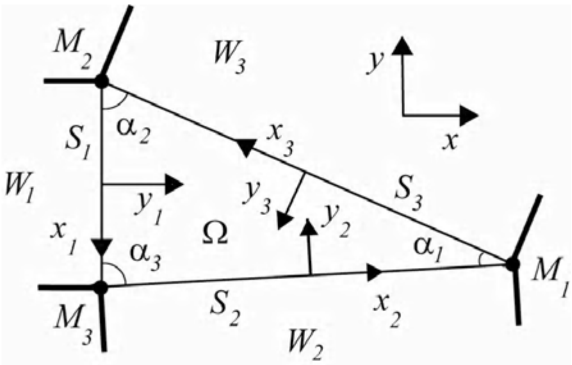

Рисунок 1 – Геометрия задачи

Функция u должна удовлетворять двумерному уравнению Гельмгольца

$$ \Delta u + \chi^2 u = 0 \ , \quad (2) $$

однородным граничным условиям Дирихле на контуре узла, условиям сопряжения полей в апертурах соединительной полости

$$ u_\Omega \big|_{y_s=0+} = u^{(s)} \big|_{y_s=0-}, \quad \frac{\partial u_\Omega}{\partial y_s} \bigg|_{y_s=0+} = \frac{\partial u^{(s)}}{\partial y_s} \bigg|_{y_s=0-}, $$

$$ x_s \in (-a_s, a_s), \ s = \overline{1,3}, \quad (3) $$

$$ u^{(s)} = \delta_{sp} \, {}^S\varphi_r^{(s)}(x_s) e^{-\gamma_r^{(s)} y_s} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(s)} \, {}^S\varphi_n^{(s)}(x_s) e^{\gamma_n^{(s)} y_s}, $$

$$ (x_s, y_s) \in W_s, \ s = \overline{1,3}. \quad (4) $$

При $\operatorname{Im}\varepsilon \le 0$ существует единственное решение этой задачи для всех значений частоты $\omega > 0$, исключая не более чем счетное множество точек [6]. В последующем мы рассматриваем только те значения ω, при которых граничная задача однозначно разрешима.

2 СЛАУ. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Как и в случае блока с двумя присоединенными волноводами [3], будем искать u_Ω в виде

$$ u_\Omega = \sum_{j=1}^{3} (u_\Omega^{(j)} + D_0^{(j)} e^{i\chi y_j}), $$

$$ u_\Omega^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(j)} \, {}^S\varphi_n^{(j)}(x_j) e^{-\gamma_n^{(j)} y_j}. \quad (5) $$

Бесконечные вектор-столбцы коэффициентов разложений $\mathbf{A}^{(s)} = \{A_n^{(s)}\}$ и $\mathbf{D}^{(j)} = \{D_n^{(j)}\}$ подлежат определению. Известно[7], что система функций, используемая в (5) для разложения величины u_Ω, линейно независима за исключением некоторого счетного множества значений ω. Последнее множество также не включается в рассмотрение. Отметим, что в отличие от случая E-плоскостной структуры в сумму, представляющую u_Ω, введены дополнительные слагаемые $D_0^{(j)} e^{i\chi y_j}$. Это сделано с целью улучшения сходимости разложений $u_\Omega^{(j)}$ по синусам. Для нахождения значений $D_0^{(j)}$ добавляются точечные граничные условия в вершинах треугольника

$$ \left(\sum_{j=1}^{3} D_0^{(j)} e^{i\chi y_j} \right) \Bigg|_{M_l} + u_\Omega^{(l)}(M_l) = 0 \ , \ l = \overline{1,3} \ , \quad (6) $$

следующие из однородных условий Дирихле на контуре узла в предположении, что $u_\Omega^{(j)} \Big|_{\substack{x_j = \pm a_j \\ y_j = 0}} = 0$.

Подставив выражения (4), (5) в (3) и (6), а также воспользовавшись ортогональностью системы функций $\left\{ {}^S\varphi_n^{(s)}(x_s) \right\}$ на интервале $(-a_s, a_s)$, мы получим бесконечную СЛАУ относительно коэффициентов разложений:

$$D_m^{(s)} + \sum_{l=1}^{3} q_{m0}^{(sl)} D_0^{(l)} + \sum_{l \neq s} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^{(sl)} D_n^{(l)} = \delta_{sp}\delta_{mr} + A_m^{(s)}, \quad (7)$$

$$-D_m^{(s)} + \sum_{l=1}^{3} \widetilde{p}_{m0}^{(sl)} D_0^{(l)} + \sum_{l \neq s} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{p}_{mn}^{(sl)} D_n^{(l)} = -\delta_{sp}\delta_{mr} + A_m^{(s)}, \quad (8)$$

$$\sum_{\tau=1}^{3} t^{(\nu\tau)} D_0^{(\tau)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(\nu)} D_n^{(\nu)} = 0, \quad \nu = \overline{1,3}, \qquad (9)$$

где $s = \overline{1,3},\ m = \overline{1,\infty}$, а

$$q_{m0}^{(sl)} = \frac{1}{a_s} \int_{-a_s}^{a_s} \left(e^{i\chi y_l} \right)\Big|_{y_s=0} {}^S\varphi_m^{(s)}(x_s)\, dx_s, \qquad (10)$$

$$\widetilde{p}_{m0}^{(sl)} = \frac{1}{a_s \gamma_m^{(s)}} \int_{-a_s}^{a_s} \left(\frac{\partial}{\partial y_s} e^{i\chi y_l} \right)\Bigg|_{y_s=0} {}^S\varphi_m^{(s)}(x_s)\, dx_s, \quad (11)$$

$$q_{mn}^{(sl)} = \frac{1}{a_s} \int_{-a_s}^{a_s} \left[{}^S\varphi_n^{(l)}(x_l) e^{-\gamma_n^{(l)} y_l} \right]\Bigg|_{y_s=0} {}^S\varphi_m^{(s)}(x_s)\, dx_s,$$

$$n \geq 1, \qquad (12)$$

$$\widetilde{p}_{mn}^{(sl)} = \frac{1}{a_s \gamma_m^{(s)}} \int_{-a_s}^{a_s} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_s} \left[{}^S\varphi_n^{(l)}(x_l) e^{-\gamma_n^{(l)} y_l} \right] \right\}\Bigg|_{y_s=0} {}^S\varphi_m^{(s)}(x_s)\, dx_s,$$

$$n \geq 1, \qquad (13)$$

$$b_n^{(\nu)} = \left[{}^S\varphi_n^{(\nu)}(x_\nu) e^{-\gamma_n^{(\nu)} y_\nu} \right]\Big|_{M_\nu}, \qquad (14)$$

$$t^{(\nu\tau)} = \left(e^{i\chi y_\tau} \right)\Big|_{M_\nu}. \qquad (15)$$

Как и в случае E-плоскостного узла, наложим требование $\mathbf{A}^{(s)}, \mathbf{D}^{(s)} \in l_1 \subset \widetilde{l}_2$, которое является достаточным для выполнения условия конечности энергии в ограниченной области. Существование соответствующих последовательностей $\mathbf{A}^{(s)}, \mathbf{D}^{(s)}$ следует из разрешимости СЛАУ, устанавливаемой в следующем разделе.

Соображения аналогичные изложенным в [4] приводят нас к утверждению, что если бесконечная СЛАУ (7)–(9) имеет решение $\mathbf{A}^{(s)}, \mathbf{D}^{(s)} \in l_1, (s = \overline{1,3})$, то после его подстановки в (4), (5) мы получим величину, удовлетворяющую как уравнению Гельмгольца, так и всем требуемым условиям на границе. Это означает, что эта система может иметь в l_1 не более одного решения, так как противоположное предположение противоречит теореме единственности решения рассматриваемой краевой задачи. Отметим в этой связи, что равномерная сходимость рядов $u_\Omega^{(s)}\Big|_{S_s} = \sum_{m=1}^{\infty} D_m^{(s)}\, {}^S\varphi_m^{(s)}(x_s)$, следующая из $\mathbf{D}^{(s)} \in l_1$, и непрерывность функций ${}^S\varphi_m^{(s)}(x_s)$ (равных нулю на концах интервала $[-a_s, a_s]$) означает, что $u_\Omega^{(s)}\Big|_{S_s}$ будет непрерывной функцией, обращающейся в нуль в этих же точках, а значит, граничное условие $u_\Omega(M_l) = 0$ действительно должно иметь вид (6).

Далее вместо системы (7)–(9) мы будем изучать эквивалентную систему, состоящую из уравнения (9) и разности уравнений (7) и (8), деленной на 2,

$$\sum_{\tau=1}^{3} t^{(\nu\tau)} D_0^{(\tau)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(\nu)} D_n^{(\nu)} = 0, \qquad \nu = \overline{1,3}, \qquad (16)$$

$$D_m^{(s)} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3} [q_{m0}^{(sl)} - \widetilde{p}_{m0}^{(sl)}] D_0^{(l)} + \frac{1}{2} \sum_{l \neq s} \sum_{n=1}^{\infty} [q_{mn}^{(sl)} - \widetilde{p}_{mn}^{(sl)}] D_n^{(l)} = \delta_{sp}\delta_{mr},$$
$$s = \overline{1,3},\ m = \overline{1,\infty}, \qquad (17)$$

а также пересчетной формулы

$$A_m^{(s)} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3} [q_{m0}^{(sl)} + \widetilde{p}_{m0}^{(sl)}] D_0^{(l)} + \frac{1}{2} \sum_{l \neq s} \sum_{n=1}^{\infty} [q_{mn}^{(sl)} + \widetilde{p}_{mn}^{(sl)}] D_n^{(l)}, \quad (18)$$

полученной после сложения этих уравнений и позволяющей определить последовательности коэффициентов $\mathbf{A}^{(s)}$ по известным $\mathbf{D}^{(l)}$.

3 АНАЛИЗ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ. РЕШЕНИЕ СЛАУ

Введем обозначения аналогичные принятым в [4]:

$$\Gamma_n = \gamma_n^{(2)} \sin\alpha_3, \ {}^0\Gamma_n = \frac{n\pi}{2a_2} \sin\alpha_3, \ \Pi_n = \frac{n\pi}{2a_2} \cos\alpha_3, \quad (19)$$

$$\Lambda_n = 2\Pi_n a_1, \ \Phi_{mn}^{\pm} = \Gamma_n^2 + \left(\frac{m\pi}{2a_1} \pm \Pi_n \right)^2,$$

$$\Psi_{mn}^{\pm} = \frac{1}{\Phi_{mn}^{+}} \pm \frac{1}{\Phi_{mn}^{-}}, \qquad (20)$$

$${}^0\Phi_{mn}^{\pm} = \begin{cases} \left(\dfrac{m\pi}{2a_1} \right)^2 + \left(\dfrac{n\pi}{2a_2} \right)^2 \pm \dfrac{mn\pi^2}{2a_1a_2} \cos\alpha_3, & \forall mn > 0; \\ \infty, & \forall mn = 0, \end{cases}$$

$${}^0\Psi_{mn}^{\pm} = \frac{1}{{}^0\Phi_{mn}^{+}} \pm \frac{1}{{}^0\Phi_{mn}^{-}}. \qquad (21)$$

С целью анализа выпишем явные выражения для значений интегралов $q_{mn}^{(12)}$ и $\widetilde{p}_{mn}^{(12)}$ при $n \geq 1$:

$$q_{mn}^{(12)} = \frac{1}{2a_1}\left\{\left[(-1)^m \Gamma_n - (\Gamma_n \cos\Lambda_n -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \Pi_n \sin\Lambda_n) e^{-2\Gamma_n a_1}\right] \Psi_{mn}^- + \frac{m\pi}{2a_1} \sin\Lambda_n e^{-2\Gamma_n a_1} \Psi_{mn}^+ \right\}, \quad (22)$$

$$\tilde{p}_{mn}^{(12)} = \frac{1}{2\gamma_m^{(1)} a_1}\left\{(-1)^{m+1}\left[\chi^2 \sin\alpha_3 \cos\alpha_3 \Psi_{mn}^- + {}^0\Gamma_n \frac{m\pi}{2a_1}\Psi_{mn}^+\right] + \right.$$
$$+\left[{}^0\Gamma_n (\Gamma_n \sin\Lambda_n + \Pi_n \cos\Lambda_n) - \right.$$
$$\left. - \gamma_n^{(2)} \cos\alpha_3 (\Gamma_n \cos\Lambda_n - \Pi_n \sin\Lambda_n)\right] e^{-2\Gamma_n a_1} \Psi_{mn}^- +$$
$$\left. + \frac{m\pi}{2a_1}\left[\gamma_n^{(2)} \cos\alpha_3 \sin\Lambda_n + {}^0\Gamma_n \cos\Lambda_n\right] e^{-2\Gamma_n a_1} \Psi_{mn}^+ \right\}. \quad (23)$$

Величины $q_{mn}^{(21)}$ и $\tilde{p}_{mn}^{(21)}$ могут быть найдены из (19)–(23) путем перестановок $a_1 \leftrightarrow a_2$, $\gamma_k^{(1)} \leftrightarrow \gamma_k^{(2)}$ и умножения полученных выражений на $(-1)^{m+n}$. Если l номер стороны треугольника, следующей за s-й стороной против часовой стрелки, то значения $q_{mn}^{(sl)}$ и $\tilde{p}_{mn}^{(sl)}$ могут быть получены из формул (19)–(23), заменяя в правых их частях индексы 1 на s, 2 на l, а угол α_3 на угол между сторонами s и l. Если l-я сторона предшествует s-й стороне, то значения $q_{mn}^{(sl)}$ и $\tilde{p}_{mn}^{(sl)}$ получаются за таким же принципом из формул для $q_{mn}^{(21)}$ и $\tilde{p}_{mn}^{(21)}$.

Изучение полученных формул показывает, что величины $q_{mn}^{(sl)}$ при больших m имеют порядок $O\left(\frac{1}{m}\right)$, причем при $n \ge 1$ это обусловлено тем, что в каждом из выражений для $q_{mn}^{(sl)}$ присутствует однотипное слагаемое, имеющее для $q_{mn}^{(12)}$ вид $\frac{m\pi}{4a_1^2}\sin\Lambda_n e^{-2\Gamma_n a_1}\Psi_{mn}^+ = O\left(\frac{1}{m}\right)$. Это значит, что матрицы, связанные с выписанной СЛАУ, нельзя рассматривать в качестве ограниченных операторов $l_1 \to l_1$. Покажем, однако, что после простых преобразований анализ может быть переведен в это пространство.

После вычисления интегралов $q_{m0}^{(sl)}$, устанавливаем, что их значения можно записать в виде

$$q_{m0}^{(sl)} = \frac{m\pi\left\{[e^{i\chi y_l}]_{M_s^-} - (-1)^m [e^{i\chi y_l}]_{M_s^+}\right\}}{2a_s^2\left[\left(\frac{m\pi}{2a_s}\right)^2 - \chi^2 \sin^2\beta_{sl}\right]}, \quad (24)$$

где M_s^- и M_s^+ – начальная и конечная точки s-й стороны (например, $M_1^- = M_2$, $M_1^+ = M_3$), а β_{sl} – угол между сторонами s и l (например, $\beta_{ss} = 0, \beta_{12} = \beta_{21} = \alpha_3$). Запишем граничные условия (16) в точках M_s^- и M_s^+. Умножим затем второе из полученных уравнений на $(-1)^{m+1}$, сложим его с первым и результат разделим на $\frac{m\pi}{2}$. Мы получим

$$\sum_{l=1}^{3} d_{m0}^{(sl)} D_0^{(l)} + \sum_{l \ne s}\sum_{n=1}^{\infty} d_{mn}^{(sl)} D_n^{(l)} = 0, \quad (25)$$

где

$$d_{m0}^{(sl)} = \frac{2\left\{[e^{i\chi y_l}]_{M_s^-} - (-1)^m [e^{i\chi y_l}]_{M_s^+}\right\}}{m\pi},$$

$$d_{mn}^{(12)} = \frac{2}{m\pi}\sin\Lambda_n e^{-2a_1\Gamma_n}, \quad (26)$$

а для других s и l при $m, n \ge 1$ значения $d_{mn}^{(sl)}$ связаны со значениями $d_{mn}^{(12)}$ теми же правилами, что и $q_{mn}^{(sl)}$ с $q_{mn}^{(12)}$. Учитывая формулы (24), (26), несложно убедиться, что

$$\tilde{q}_{m0}^{(sl)} = q_{m0}^{(sl)} - d_{m0}^{(sl)} = \begin{cases} O\left(\frac{1}{m^3}\right), & l \ne s, \\ 0, & l = s, \end{cases}$$

$$\tilde{q}_{mn}^{(sl)} = q_{mn}^{(sl)} - d_{mn}^{(sl)} = O\left(\frac{1}{m^2}\right), \quad \begin{matrix} l \ne s, \\ n \ge 1. \end{matrix} \quad (27)$$

Вычтем равенства (25), деленные на 2, из уравнений (17) для всех возможных значений s и m. К полученным уравнениям добавим под номерами $s = \overline{1,3}$, $m = 0$ уравнения (16), записанные для точек M_s^+. В результате, вместо СЛАУ (16), (17) мы будем иметь систему

$$D_m^{(s)} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}\sum_{n=0}^{\infty}[\tilde{q}_{mn}^{(sl)} - \tilde{p}_{mn}^{(sl)}] D_n^{(l)} = \tilde{h}_m^{(s)},$$
$$s = \overline{1,3}, \; m = \overline{0,\infty}, \quad (28)$$

которую уже можно рассматривать как функциональное уравнение в пространстве $l_1^{(3)} = l_1 \oplus l_1 \oplus l_1$. Здесь $\tilde{h}_m^{(s)} = \delta_{sp}\delta_{mr}$, $\tilde{q}_{0n}^{(ss)} = \tilde{p}_{0n}^{(sl)} = 0$ при $n \ge 0$, $\tilde{q}_{mn}^{(ss)} = \tilde{p}_{mn}^{(ss)} = 0$ при $mn \ge 1$ и

$$\tilde{q}_{0n}^{(ss^-)} = \begin{cases} 2t^{(s^-s^-)}, n = 0 \\ 2b_n^{(s^-)}, n \ge 1 \end{cases}, \quad \tilde{q}_{0n}^{(s,s^+)} = \begin{cases} 2, n = 0; \\ 0, n \ge 1, \end{cases} \quad (29)$$

где $s^- = \begin{cases} s-1, s > 1; \\ 3, s = 1, \end{cases}$ и $s^+ = \begin{cases} s+1, s < 3; \\ 1, s = 3. \end{cases}$

Пусть $\tilde{f}_{mn}^{(sl)} = \frac{1}{2}[\tilde{q}_{mn}^{(sl)} - \tilde{p}_{mn}^{(sl)}]$. Будем рассматривать матрицы $\tilde{Q}^{(sl)} = (\tilde{q}_{mn}^{(sl)})$, $\tilde{P}^{(sl)} = (\tilde{p}_{mn}^{(sl)})$ и $\tilde{F}^{(sl)} = \frac{1}{2}(\tilde{f}_{mn}^{(sl)})$

в качестве операторов в пространстве последовательностей l_1. Очевидно, что операторы $\widetilde{F}^{(ss)}$ являются ω-непрерывными. Положим

$$ {}^0\widetilde{q}_{mn}^{(12)} = \frac{(-1)^m}{2a_1} {}^0\Gamma_n {}^0\Psi_{mn}^-, \quad {}^0\widetilde{p}_{mn}^{(12)} = -\frac{(-1)^m}{2a_1} {}^0\Gamma_n {}^0\Psi_{mn}^+, $$

$$ {}^0\widetilde{f}_{mn}^{(12)} = \frac{(-1)^m}{2a_1 {}^0\Phi_{mn}^+} {}^0\Gamma_n \qquad (30) $$

и определим ${}^0\widetilde{q}_{mn}^{(sl)}$, ${}^0\widetilde{p}_{mn}^{(sl)}$ для других значений s и l по тем же правилам, что и $q_{mn}^{(sl)}$, $\widetilde{p}_{mn}^{(sl)}$.

Разности $\widetilde{F}^{(sl)} - {}^0\widetilde{F}^{(sl)}$ при $s \neq l$ также являются ω-непрерывными. Сравнив формулы (30) с формулами (18) из [4], мы видим, что ${}^0\widetilde{Q}^{(sl)} = -{}^0\hat{P}^{(sl)}$, ${}^0\widetilde{P}^{(sl)} = -{}^0\hat{Q}^{(sl)}$ и ${}^0\widetilde{F}^{(sl)} = {}^0\hat{F}^{(sl)}$. Система (28) имеет тот же тип, что и СЛАУ (10) в работе [4]. Далее, проделав выкладки подобные выполненным в [4] в случае E-плоскостной задачи, устанавливаем, что система (28) имеет в $l_1^{(3)}$ единственное решение, которое может быть найдено методом редукции, сходящимся по норме этого пространства.

ВЫВОДЫ

Рассмотрена задача рассеяния волн в однородно заполненном H-плоскостном соединении трех волноводов с областью связи, ограниченной произвольным треугольником. Исследованы свойства матрицы бесконечной системы линейных уравнений, появляющейся при применении для анализа такой структуры метода произведения областей. Продемонстрировано, что после простых преобразований СЛАУ приводится к эквивалентной системе, которая имеет те же свойства, что и СЛАУ, возникающая в случае решения задачи рассеяния для аналогичной E-плоскостной конфигурации. Это дает возможность интерпретировать преобразованную систему в качестве операторного уравнения фредгольмового типа в пространстве последовательностей $l_1^{(3)}$, а также подобно [4] показать, что для почти всех значений частотного параметра $\omega > 0$ рассматриваемая СЛАУ разрешима единственным образом и ее решение может быть найдено методом редукции, сходящимся по норме названного пространства.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках госбюджетной научно-исследовательской темы Запорожского национального технического университета «Математические модели в прикладных проблемах механики и электродинамики» (номер гос. регистрации 0112U005342).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ващенко В. В. О выборе представления поля для базовой треугольной области в задачах моделирования H-плоскостных волноводных узлов / В. В. Ващенко, В. П. Чумаченко // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2010. – № 1. – С. 5–9.
2. Chumachenko V. P. A GSM analysis of E-pane waveguide junctions filled with piecewise homogeneous dielectric / V. P. Chumachenko, V. V. Vashchenko // International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. – 2012. – Vol. 25, No. 2. – P. 163–174.
3. Chumachenko V.P. Properties of some matrix operators appearing in the theory of planar waveguide junctions / V. P. Chumachenko // Telecommunications and Radio Engineering. – 2013. – Vol. 72, No. 6. – P. 469–484.
4. Онуфриенко Л. М. К обоснованию одной математической модели плоского соединения трех волноводов. Часть I. E-плоскостная задача / Л. М. Онуфриенко, В. П. Чумаченко, Я. В. Чумаченко // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2015. – №3(34). – С. 7–14.
5. Chumachenko V. P. Efficient field representation for polygonal region / V. P. Chumachenko // Electronics Letters. – 2001. – Vol. 37, No. 19. – P. 1164–1165.
6. Шестопалов В. П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур / В. П. Шестопалов. – Киев : Наукова думка, 1987. – 288 с.
7. Chumachenko V. P. On linear independence of some function systems appearing in the theory of plane wave fields / V. P. Chumachenko // Telecommunications and Radio Engineering. – 2015. – Vol. 74, No. 4. – P. 281–296.

Статья поступила в редакцию 20.05.2015.
После доработки 18.06.2015.

Онуфрієнко Л. М.[1], Чумаченко В. П.[2], Чумаченко Я. В.[3]

[1]Канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Запорізького національного технічного університету, Запоріжжя, Україна

[2]Д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Запорізького національного технічного університету, Запоріжжя, Україна

[3]Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри математичних методів в інженерії Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна

ДО ОБҐРУНТУВАННЯ ОДНІЄЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПЛОСКОГО З'ЄДНАННЯ ТРЬОХ ХВИЛЕВОДІВ. ЧАСТИНА II. H-ПЛОЩИННА ЗАДАЧА

В роботі запропонована і обґрунтована математична модель H-площинного з'єднання трьох хвилеводів з областю зв'язку довільно трикутної форми. Задача розсіювання хвилеводних мод формулюється у вигляді крайової задачі для рівняння Гельмгольца з однорідними межовими умовами Дирихле на контурі конфігурації, умовами випромінювання в хвилеводах та умовою на ребрі. Модель ґрунтується на зображенні шуканої компоненти поля всередині трикутної з'єднувальної порожнини в вигляді суми тригонометричних рядів, отриманих на основі методу добутку областей. Для покращення збіжності рядів, що використовуються, скорегований традиційний для цього методу вид розвинення по синусах. Вивчені характерні особливості нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка виникає в ході розв'язування задачі. Показано, що після простої модифікації система приводиться до еквівалентної системи, яка має ті ж властивості, що і система, яка була досліджена в першій частині роботи при аналізі аналогічної E-площинної структури. Цей факт дозволив інтерпретувати систему перетворених рівнянь, як одне функціональне рівняння з фредгольмовим оператором в просторі послідовностей $l_1^{(3)} = l_1 \oplus l_1 \oplus l_1$, де l_1 є простором абсолютно збіжних рядів, а також довести, що таке рівняння має єдиний розв'язок, який може бути знайдено методом редукції, збіжним за нормою $l_1^{(3)}$.

Ключові слова: хвилеводні неоднорідності, метод добутку областей, матрично-операторні рівняння.

Onufriyenko L. M.[1], Chumachenko V. P.[2], Chumachenko Ya. V.[3]

[1]Ph.D., Associate professor, Associate professor of department of higher mathematics, Zaporizhzhya National Technical University, Zaporizhzhya, Ukraine

[2]Dr.Sc., Professor, Head of department of higher mathematics, Zaporizhzhya National Technical University, Zaporizhzhya, Ukraine

[3]Ph.D., Associate professor, Associate professor of department of mathematical methods in engineering, Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ivano-Frankivsk, Ukraine

ON JUSTIFICATION OF A MATHEMATICAL MODEL FOR A PLANAR JUNCTION OF THREE WAVEGUIDES. PART II. H-PLANE PROBLEM

In the paper, a mathematical model of an *H*-plane three-port waveguide junction with an arbitrary-triangular coupling cavity has been presented and justified. The problem of scattering of waveguide modes is formulated as a boundary-value problem for the Helmholtz equation with the homogeneous Dirichlet boundary conditions on the periphery of the unit, radiation conductions in the waveguides and with the edge condition. The model is based on a trigonometric-series representation of the sought-for field in the triangular connecting region, which is constructed using the domain-product technique. The conventional expansion is revised to improve convergence properties of the used sine series. Properties of the infinite set of linear algebraic equations, which arises in the course of solving the problem, are studied. After simple modification, the system of equations is turned into an equivalent system, which is of the same kind as the system examined in the first part of the paper in analyzing the similar E-plane structure. In the space $l_1^{(3)} = l_1 \oplus l_1 \oplus l_1$ ($l_1$is the sequence space of absolutely convergent series), this fact allows to interpret the set of transformed equations as a single functional equation with the Fredholm operator and to prove that the derived equation has a unique solution, which can be found by means of the truncation method convergent in the norm of $l_1^{(3)}$.

Keywords: waveguide discontinuities, domain-product technique, matrix-operator equations.

REFERENCES

1. Vashchenko V. V., Chumachenko V. P. O vy'bore predstavleniya polya dlya bazovoj treugol'noj oblasti v zadachax modelirovaniya *H*-ploskostny'x volnovodny'x uzlov, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2010, No.1, pp. 5–9.
2. Chumachenko V. P., Vashchenko V. V. A GSM analysis of E-pane waveguide junctions filled with piecewise homogeneous dielectric, *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 2012, Vol. 25, No. 2, pp. 163–174.
3. Chumachenko V.P. Properties of some matrix operators appearing in the theory of planar waveguide junctions, *Telecommunications and Radio Engineering*, 2013, Vol. 72, No. 6, pp. 469–484.
4. Onufriyenko L. M. Chumachenko V. P., Chumachenko Ya.V. K obosnovaniyu odnoj matematicheskoj modeli ploskogo soedineniya trex volnovodov. Chast' I. *E*-ploskostnaya zadacha, *Radio Electronics, Computer Science, Control,* 2015, No. 3 (34), pp.7–14
5. Chumachenko V. P. Efficient field representation for polygonal region, *Electronics Letters,* 2001, Vol. 37, No. 19, pp. 1164–1165.
6. Shestopalov V. P. Spektral'naya teoriya i vozbuzhdenie otkry'ty'x struktur. Kyiv, Naukova dumka, 1987, 288 p.
7. Chumachenko V. P. On linear independence of some function systems appearing in the theory of plane wave fields, *Telecommunications and Radio Engineering,* 2015, Vol. 74, No. 4, pp. 281–296.