УПРАВЛІННЯ У ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

CONTROL IN TECHNICAL SYSTEMS

УДК 681.5.013

Дорофеев Ю. И.

Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры системного анализа и управления Национального технического университета «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина

ДЕСКРИПТОРНЫЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ ОГРАНИЧЕННОГО РОБАСТНОГО ГАРАНТИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАМЕТРИЗОВАННОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Решена задача синтеза робастного гарантирующего управления запасами для сетей поставок с параметрической структурной неопределенностью в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и наличия несимметричных ограничений на значения состояний и управлений. Закон управления строится в виде линейной динамической обратной связи по сигналу невязки между наличными и страховыми уровнями запаса ресурсов. Для подавления влияния внешних возмущений, моделирующих изменения спроса, одновременно с обеспечением робастной устойчивости замкнутой системы применен метод инвариантных эллипсоидов, который был усовершенствован посредством использования дескрипторного описания системы и построения параметризованной функции Ляпунова, что позволяет уменьшить степень влияния неопределенности значений транспортных запаздываний на результат синтеза управления. С помощью математического аппарата линейных матричных неравенств задача синтеза управления представлена в виде последовательности задач полуопределенного программирования, для решения которых применяются свободно распространяемые специализированные программные пакеты. В рамках предложенной методики возможен выбор оптимальных значений страховых запасов ресурсов, поскольку рассмотренное решение задает, фактически, алгоритмическую зависимость между уровнем страховых запасов и оптимальным значением критерия качества. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: управление запасами, робастное управление, метод инвариантных эллипсоидов, дескрипторный подход, параметризованная функция Ляпунова, линейное матричное неравенство.

НОМЕНКЛАТУРА

«+» – псевдообращение Мура-Пенроуза;

$0_{n\times n}$ – нулевая матрица соответствующей размерности;

A – матрица динамики расширенной модели сети поставок;

B – матрица влияния управлений расширенной модели сети поставок;

B_t – матрицы влияния управлений исходной модели сети поставок;

C – матрица выходов расширенной модели сети поставок;

D – множество допустимых значений внешних возмущений;

E – матрица влияния возмущений исходной модели сети поставок;

G – матрица влияния возмущений расширенной модели сети поставок;

I_n – единичная матрица соответствующей размерности;

$K(k)$ – нестационарная матрица коэффициентов обратной связи;

U – множество допустимых значений управляющих воздействий;

W_ξ – положительно определенная диагональная весовая матрица критерия качества;

W_u – положительно определенная диагональная весовая матрица критерия качества;

X – множество допустимых значений состояний;

$d^{\max}$ – вектор верхних граничных значений внешнего спроса;

$d^{\min}$ – вектор нижних граничных значений внешнего спроса;

$d(k)$ – вектор внешних возмущающих воздействий;

k – номер дискретного интервала времени;

m – размерность вектора управляющих воздействий;

n – количество узлов сети поставок;

DOI 10.15588/1607-3274-2015-4-13

$u^{\max}$ – вектор граничных значений управляющих воздействий;

$u(k)$ – вектор управляющих воздействий;

q – размерность вектора внешних возмущений;

r – количество узлов сети, интервалы запаздывания которых варьируются;

$x^{\max}$ – вектор граничных значений состояний;

$x(k)$ – вектор состояний исходной модели сети поставок;

ε – малая положительная константа;

$\xi(k)$ – вектор состояний расширенной модели сети поставок;

Λ – максимальное значение интервалов запаздывания материальных потоков в сети;

ЛМН – линейное матричное неравенство;

ПФЛ – параметризованная функция Ляпунова.

ВВЕДЕНИЕ

Задача управления запасами возникает в системах производства-хранения-распределения ресурсов, когда с целью удовлетворения потребительского спроса создаются запасы материальных ресурсов. Примерами могут служить производственные, транспортные системы, системы распределения ресурсов (воды, электроэнергии) и т.п., в состав которых входят поставщики сырья, производственные узлы, хранилища ресурсов и продавцы конечной продукции, тогда как потребители, формирующие заказы на поставку ресурсов, рассматриваются в качестве источников внешних возмущений. Существуют различные типы топологии подобных систем, которые определяются взаимным размещением производствен-ных звеньев, промежуточных складов и потребителей. Если некоторые виды сырья или полуфабрикатов используются в нескольких процессах, проходящих одновременно, система приобретает эшелонированную структуру, вследствие чего рассматриваемые системы называют сетями поставок.

Предполагается, что каждый узел сети поставок в реальном времени принимает заказы от узлов, являющихся потребителями его продукции, а также от внешних потребителей, и формирует заказы узлам, которые являются для него поставщиками ресурсов. Управление запасами заключается в определении моментов времени и размеров заказов на их восполнение. Выбор стратегии управления запасами определяется характером внешнего спроса. На практике зачастую нет оснований для того, чтобы рассматривать спрос в качестве случайных, либо гармонических, либо убывающих с течением времени внешних возмущений – какая-либо дополнительная информация, кроме той, что внешний спрос является ограниченным, отсутствует.

Спецификой задачи управления запасами является наличие запаздываний по управлению, обусловленных задержками в пополнении запасов относительно моментов формирования заказов. В процессе функционирования сети поставок величины запаздываний могут отличаться от своих номинальных значений. В результате возникает необходимость обеспечения робастности системы управления запасами относительно возможных вариаций значений внешнего спроса и величин запаздывания.

Другой особенностью рассматриваемой задачи является необходимость учета структурных ограничений на объемы хранилищ и размеры заказов. В теории управления традиционно рассматривают ограничения, заданные в какой-либо норме. Однако, для задач управления запасами характерно требование неотрицательности значений переменных, что приводит к необходимости учета несимметричных ограничений на значения управляющих воздействий и состояний.

Одним из наиболее распространенных подходов к синтезу ограниченного стабилизи-рующего управления является построение квадратичной функции Ляпунова и использование математического аппарата ЛМН. Основным недостатком такого подхода является консерватизм полученных результатов [1], который проявляется в том, что с практической точки зрения получаемые границы робастности оказываются неоправданно заниженными. Причиной является использование единой функции Ляпунова для всех возможных вариантов реализации неопределенности модели системы и внешних воздействий.

Для уменьшения степени консерватизма используют параметризованную функцию Ляпунова. Однако, при этом полученные ЛМН содержат произведение нестационарной матрицы динамики системы на матрицу, которая участвует в построении функции Ляпунова. Для преодоления указанного недостатка применяется дескрипторный подход, который позволяет добиться разделения матрицы динамики системы и матрицы Ляпунова, что ведет к существенному уменьшению степени консерватизма результатов синтеза управления.

Целью работы является синтез робастной стратегии управления запасами гарантированной стоимости, которая строится на основе дескрипторного подхода и может использоваться для определения в каждый момент времени размеров заказа ресурсов с учетом несимметричных ограничений на их значения в виде функции от уровней запаса ресурсов в узлах системы, которые позволяют удерживать состояния в ограниченном компактном множестве при любых допустимых возмущениях.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для математического описания управляемой сети поставок используется дискретная модель в пространстве состояний, уравнения которой описывают изменение уровня запасов каждого вида ресурсов с течением времени. В качестве переменных состояний рассматрива-ются наличные уровни запаса ресурсов. Управляющими воздействиями являются размеры заказов на поставку ресурсов, формируемые узлами в текущем периоде. Размеры спроса на ресурсы, поступающие из внешней среды, выступают в качестве внешних возмущений.

Для описания запаздываний используется модель дискретной задержки, поскольку предполагается, что номинальные значения длительности транспортировки и переработки ресурсов известны и кратны некоторому периоду дискретизации. Также предполагается, что структура сети известна, а состояния доступны непосредственному измерению. Тогда математическая модель сети поставок задается разностным уравнением с запаздыванием:

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda} B_t u(k-t) + Ed(k). \qquad (1)$$

Предполагается, что для каждого узла сети заданы максимально допустимые уровни запаса ресурсов и максимальные размеры заказов. Тогда в процессе функционирования системы должны выполняться ограничения:

$$x(k) \in X = \left\{x \in \mathrm{R}^n : 0 \le x \le x^{\max}\right\},$$
$$u(k) \in U = \left\{u \in \mathrm{R}^m : 0 \le u \le u^{\max}\right\}. \qquad (2)$$

Будем предполагать, что внешние возмущения удовлетворяют ограничениям:

$$d(k) \in D = \left\{d \in \mathrm{R}^q : 0 \le d^{\min} \le d \le d^{\max}\right\}.$$

Выполним преобразование модели (1) к стандартному виду без запаздывания на основе расширения вектора состояний [2] путем включения в него векторов, определяющих размеры ранее заказанных ресурсов, находящихся в процессе транспортировки и переработки: $\xi(k) = \left[x^{\mathrm{T}}(k), u^{\mathrm{T}}(k-1), u^{\mathrm{T}}(k-2), ..., u^{\mathrm{T}}(k-\Lambda)\right]^{\mathrm{T}}$. Тогда уравнения расширенной модели примут вид:

$$\xi(k+1) = A\xi(k) + Bu(k) + Gd(k), \quad x(k) = C\xi(k), \qquad (3)$$

где матрицы $A \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $B \in \mathrm{R}^{N\times m}$, $G \in \mathrm{R}^{N\times q}$, $C \in \mathrm{R}^{n\times N}$, $N = n + m\Lambda$ имеют соответствующую блочную структуру [3].

Рассмотрим построение матрицы динамики A расширенной модели в том случае, когда величины запаздывания управляемых потоков $\Lambda_i, i = \overline{1,n}$ отличаются от своих номинальных значений. В этом случае матрица становится нестационарной и в каждый момент времени $k \ge 0$ может принимать какое-либо значение из множества

$$A(\theta) = \left\{A \in \mathrm{R}^{N\times N} : A = A_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{L} \theta_i(k) A^{(i)},\ \theta(k) \in \Theta\right\}, \qquad (4)$$

где $L = 2^r$; $\theta_i(k)$, $i = \overline{1,L}$ – набор параметров, которые описывают структурную неопределенность модели и удовлетворяют следующим требованиям:

$$\Theta = \left\{\theta \in \mathrm{R}^L :\ \theta_i(k) \ge 0,\ \textstyle\sum_{i=1}^{L} \theta_i(k) = 1\right\}. \qquad (5)$$

Таким образом, модель сети в условиях неопределенности значений запаздывания управляемых потоков может рассматриваться как выпуклый многогранник, который задается списком вершин $\left\{\left(A^{(1)}, B, G, C\right), \left(A^{(2)}, B, G, C\right), ..., \left(A^{(L)}, B, G, C\right)\right\}$, и может быть представлена в виде модели с параметрической структурной неопределенностью следующего вида:

$$\xi(k+1) = A(\theta)\xi(k) + Bu(k) + Gd(k),$$
$$x(k) = C\xi(k), \quad A(\theta) \in \Omega = \mathrm{Co}\left\{A^{(1)}, ..., A^{(L)}\right\}, \qquad (6)$$

где $\mathrm{Co}\{\cdot\}$ – выпуклая оболочка; $A^{(i)}, i = \overline{1,L}$ – i-я вершина выпуклого множества Ω.

Запишем критерий качества в случае бесконечного временного горизонта в виде:

$$J_\infty(k) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}} W_\xi \left(\xi(k) - \xi^*\right) + u^{\mathrm{T}}(k) W_u u(k)\right), \qquad (7)$$

где $0 \prec W_\xi \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $0 \prec W_u \in \mathrm{R}^{m\times m}$; $\xi^* = \underbrace{[x^{*\mathrm{T}}, ..., x^{*\mathrm{T}}]}_{\Lambda+1}{}^{\mathrm{T}}$ – составной вектор, у которого компоненты вектора x^* определяют размеры страховых запасов ресурсов в узлах сети и вычисляются на основании верхних граничных значений внешнего спроса с учетом запаздываний и продуктивной модели Леонтьева:

$$x^* = \left(I_n - \Pi\right)^{-1}\hat{d}, \quad \hat{d}_i = \begin{cases}\Lambda_i d_i^{\max}, & i = \overline{1,q},\\ 0, & i = \overline{q+1,n},\end{cases} \qquad (8)$$

где $\Pi \in \mathrm{R}^{n\times n}$ – продуктивная матрица, значение элемента Π_{ij} которой равно количеству единиц ресурса i, необходимому для производства единицы ресурса j.

Первое слагаемое в выражении (7) определяет размеры штрафов за отклонение текущих уровней запаса ресурсов от страховых, второе – стоимость производства и транспортировки ресурсов.

Для системы (6) с параметрической неопределенностью (4), (5) рассматривается задача синтеза робастной стратегии управления запасами, которая для любого допустимого спроса $d(k) \in D \ \ \forall k \ge 0$ обеспечивает:

1) полное и своевременное удовлетворение спроса, то есть выполнение первого из ограничений (2) на значения состояний;

2) робастную устойчивость замкнутой системы при ограничениях (2) на значения управлений;

3) гарантированную стоимость управления, которая означает, что значение критерия качества (7) не превысит некоторого граничного значения.

В качестве дополнительного условия выдвигается требование снижения степени влияния изменений неопределенного вектора параметров $\theta(k)$ на результат синтеза управления.

2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Анализ различных подходов к управлению запасами можно найти в работе [4] и обширной библиографии к ней. Среди многообразия моделей управления запасами выделяют два основных типа: модель критических уровней и модель периодической проверки. В первом случае предполагается непрерывный контроль за состоянием запасов и размещение заказов фиксированного размера при снижении текущих запасов до некоторых критических уровней. Второй тип модели предполагает проверку уровня запасов через равные промежутки времени и размещение заказа, размер которого определяется в соответствии с выбранной стратегией.

В данной работе рассматривается модель периодической проверки, а задача управления запасами сформулирована как задача подавления влияния неслучайных ограниченных внешних возмущений, методы решения которой рассмотрены в работе [5].

Одним из подходов к данной проблематике в теории робастного управления является концепция инвариантных множеств [6]. Среди различных форм инвариантных множеств особо выделяются эллипсоиды вследствие их простой структуры и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова. При этом для синтеза оптимального регулятора требуется решить эквивалентную задачу поиска наименьшего по некоторому критерию инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы. В работе [5] на основе техники ЛМН устанавливается достаточное условие устойчивости замкнутой системы – это существование квадратичной функции Ляпунова, построенной на решениях системы.

После того, как были развиты вычислительные методы, основанные на идеях выпуклой оптимизации, и для их реализации были разработаны соответствующие алгоритмы и программное обеспечение [7], техника ЛМН используется в качестве общего метода анализа и синтеза динамических систем как в непрерывном, так и в дискретном времени. Однако, применение указанного подхода приводит к консервативным результатам. Это означает, что максимально допустимая величина неопределенности, при которой сохраняется робастность системы, определяется наихудшим элементом семейства. Иными словами, подход рассчитан на наихудшую возможную неопределенность, реализация которой на практике может быть крайне маловероятной.

Для преодоления указанного недостатка предлагается использовать так называемую ПФЛ (см., например, [8]). Исследования показали, что условия устойчивости, полученные на основе ПФЛ являются менее консервативными, чем те, при получении которых использовалась функции Ляпунова, не зависящая от параметра. Необходимо отметить, что большинство работ, авторы которых используют ПФЛ, посвящены анализу и синтезу динамических систем в непрерывном времени. Среди работ, в которых предлагается применять ПФЛ для систем в дискретном времени, следует отметить [9].

В настоящее время подход на основе использования ПФЛ стал мощным инструментом для анализа и синтеза линейных систем с неопределенностью различного рода. В работе [10] предложено расширение указанного подхода на основе дескрипторного описания системы, которое первоначально было предложено для исследования устойчивости и синтеза управления в системах с запаздыванием. Дескрипторный подход обладает двумя основными преимуществами: во-первых, введение дополнительных ослабляющих переменных позволяет значительно уменьшить консерватизм результатов; во-вторых, подход может быть применен не только для анализа устойчивости систем с неопределенностью, заданной в виде многогранника, но и для решения задачи синтеза оптимального регулятора.

Однако, полученные результаты напрямую неприменимы к задаче управления запасами в сетях поставок, поскольку рассматриваемая модель системы не содержит внешних возмущений, авторы не учитывают ограничения на значения состояний и управлений, а также не вводят критерий качества, позволяющий оценить стоимость полученного управления.

В результате возникает необходимость расширения метода инвариантных эллипсоидов для задач управления запасами на основе дескрипторного подхода с использованием параметризованной функции Ляпунова.

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Выполним аппроксимацию множества D значений внешнего спроса эллипсоидом наименьшего объема, который задается уравнением

$$E(d^*, Q_d) = \left\{ d \in \mathrm{R}^q : \left(d(k) - d^*\right)^{\mathrm{T}} Q_d^{-1} \left(d(k) - d^*\right) \le 1 \right\} \quad (9)$$

Матрица $Q_d \in \mathrm{R}^{q \times q}$ и вектор $d^* \in \mathrm{R}^q$ координат центра эллипсоида определяются в результате решения задачи полуопределенного программирования аналогично тому, как это сделано в работе [11].

Будем строить закон управления в виде линейной динамической обратной связи по сигналу рассогласования между наличными и страховыми уровнями запаса ресурсов

$$u(k) = K(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right). \quad (10)$$

Тогда расширенную модель замкнутой системы для управления (10) можно представить в виде

$$\begin{gathered} \xi(k+1) = A_f(k,\theta)\left(\xi(k) - \xi^*\right) + A(\theta)\xi^* + Gd(k), \\ x(k) = C\xi(k), \quad A_f(k,\theta) = A(\theta) + BK(k), \quad A(\theta) \in \Omega. \quad (11) \end{gathered}$$

Задача синтеза управления эквивалентна решению минимаксной задачи

$$u(k) = \arg \min_{u(k) \in U} \left(\max_{d(k) \in E(d^*, Q_d), A(\theta) \in \Omega} J_\infty(k) \right). \quad (12)$$

Выполним преобразование системы (6) с помощью дескрипторной системы следующего вида

$$\begin{bmatrix} I_N & 0_{N\times N} \\ 0_{N\times N} & 0_{N\times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{N\times N} & I_N \\ A(\theta) & -I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0_{N\times N} \\ B \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0_{N\times N} \\ G \end{bmatrix} d(k). \quad (13)$$

Пусть

$$P(k,\theta) = \begin{bmatrix} P_1(k,\theta) & 0_{N\times N} \\ P_2(k) & P_3(k) \end{bmatrix},$$

где $P_i \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $i = 1,2,3$, $P_1(k,\theta)$ – аффинная функция от вектора параметров θ такая, что $P_1(k,\theta) = P_1^{\mathrm{T}}(k,\theta) = \sum_{i=1}^{L} \theta_i P_{1i}(k)$, $P_{1i}(k) \succ 0,\ i = \overline{1,L}$, $P_3(k) = P_3^{\mathrm{T}}(k)$.

Определим модифицированную параметризованную функцию Ляпунова, которая построена на решениях системы (11), в следующем виде

$$V\left(\xi(k) - \xi^*, \theta\right) = \left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}} P_1(k,\theta)\left(\xi(k) - \xi^*\right). \quad (14)$$

Динамическая система (11) с параметрической неопределенностью (4), (5) является робастно устойчивой, если $V\left(\xi(k) - \xi^*, \theta\right) > 0$ и $\Delta V\left(\xi(k) - \xi^*, \theta\right) = V\left(\xi(k+1) - \xi^*, \theta\right) - V\left(\xi(k) - \xi^*, \theta\right) < 0$ $\forall \theta \in \Theta$ при $\left(\xi(k) - \xi^*\right) \ne 0$.

Введем обозначения $E=\begin{bmatrix} I_N & 0_{N\times N} \\ 0_{N\times N} & 0_{N\times N}\end{bmatrix}$,

$\overline{A}(\theta)=\begin{bmatrix} 0_{N\times N} & I_N \\ A(\theta) & -I_N\end{bmatrix}$, $\widetilde{A}(\theta)=\begin{bmatrix} 0_{N\times N} \\ A(\theta)-I_N\end{bmatrix}$, $\overline{B}=\begin{bmatrix} 0_{N\times N} \\ B\end{bmatrix}$,

$\overline{G}=\begin{bmatrix} 0_{N\times N} \\ G\end{bmatrix}$, $\overline{\xi}(k)=\begin{bmatrix} \xi(k) \\ y(k)\end{bmatrix}$, $\overline{\xi}^*=\begin{bmatrix} \xi^* \\ \xi^*\end{bmatrix}$.

Вычислим первую по k разность ПФЛ (14) в силу системы (11) с учетом преобразования (13):

$$\Delta V\left(\xi(k)-\xi^*,\theta\right)=\left(\xi(k+1)-\xi^*\right)^{\mathrm T}P_1(k,\theta)\left(\xi(k+1)-\xi^*\right)-$$
$$-\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)^{\mathrm T}EP(k,\theta)\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)=$$
$$=\begin{bmatrix}\xi(k+1)-\xi^* \\ 0_{N\times 1}\end{bmatrix}^{\mathrm T}P(k,\theta)\begin{bmatrix}\xi(k+1)-\xi^* \\ 0_{N\times 1}\end{bmatrix}-\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)^{\mathrm T}EP(k,\theta)\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)=$$
$$=\begin{bmatrix}y(k)-\xi^* \\ A(\theta)\xi(k)+Bu(k)+Gd(k)-y(k)\end{bmatrix}^{\mathrm T}P(k,\theta)\times$$
$$\times\begin{bmatrix}y(k)-\xi^* \\ A(\theta)\xi(k)+Bu(k)+Gd(k)-y(k)\end{bmatrix}-$$
$$-\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)^{\mathrm T}EP(k,\theta)\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)=$$
$$=\begin{bmatrix}y(k)-\xi^* \\ A(\theta)\left(\xi(k)-\xi^*\right)+Bu(k)+Gd(k)-y(k)+\xi^*+\left(A(\theta)-I_N\right)\xi^*\end{bmatrix}^{\mathrm T}P(k,\theta)\times$$
$$\times\begin{bmatrix}y(k)-\xi^* \\ A(\theta)\left(\xi(k)-\xi^*\right)+Bu(k)+Gd(k)-y(k)+\xi^*+\left(A(\theta)-I_N\right)\xi^*\end{bmatrix}-$$
$$-\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)^{\mathrm T}EP(k,\theta)\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\left(\overline{A}(\theta)\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)+\overline{B}u(k)+\overline{G}d(k)+\widetilde{A}(\theta)\xi^*\right)^{\mathrm T}\left(P(k,\theta)+P^{\mathrm T}(k,\theta)\right)\times$$
$$\times\left(\overline{A}(\theta)\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)+\overline{B}u(k)+\overline{G}d(k)+\widetilde{A}(\theta)\xi^*\right)-$$
$$-\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)^{\mathrm T}EP(k,\theta)\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)-\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)^{\mathrm T}P^{\mathrm T}(k,\theta)E^{\mathrm T}\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)\Big].$$

Потребуем, чтобы значение ПФЛ (14) с течением времени убывало с некоторой гарантированной скоростью, которая определяется значением показателя качества (7):

$$\frac{1}{2}\Big[\left(\overline{A}(\theta)\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)+\overline{B}u(k)+\overline{G}d(k)+\widetilde{A}(\theta)\xi^*\right)^{\mathrm T}\left(P(k,\theta)+P^{\mathrm T}(k,\theta)\right)\times$$
$$\times\left(\overline{A}(\theta)\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)+\overline{B}u(k)+\overline{G}d(k)+\widetilde{A}(\theta)\xi^*\right)-$$
$$-\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)^{\mathrm T}EP(k,\theta)\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)-\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)^{\mathrm T}P^{\mathrm T}(k,\theta)E^{\mathrm T}\left(\overline{\xi}(k)-\overline{\xi}^*\right)\Big]\le$$
$$\le-\left(\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm T}W_\xi\left(\xi(k)-\xi^*\right)+u^{\mathrm T}(k)W_u u(k)\right).$$

Если последнее неравенство выполняется, то можно показать, что ПФЛ (14) $\forall k\ge 0$ определяет верхнее граничное значение критерия качества (7):

$$\max_{d(k)\in E(d^*,Q_d),A(\theta)\in\Omega} J_\infty(k)\le V\left(\xi(k)-\xi^*,\theta\right).$$

Тогда задача (12) эквивалентна задаче минимизации ПФЛ (14) $u(k)=\arg\min\limits_{u(k)\in U} V\left(\xi(k)-\xi^*,\theta\right)$, для решения которой применим метод инвариантных эллипсоидов [4]. Кратко изложим идеи метода.

Эллипсоид, описываемый уравнением

$$E(\xi^*,Q(k,\theta))=\left\{\xi\in\mathrm R^N:\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm T}Q^{-1}(k,\theta)\left(\xi(k)-\xi^*\right)\le 1\right\},\quad(15)$$

называется инвариантным по состоянию для системы (11), если из условия $\xi(0)\in E(\xi^*,Q(0,\theta))$ следует, что $\xi(k)\in E(\xi^*,Q(k,\theta))$ $\forall k\ge 0$. Другими словами, любая траектория системы, начавшись в инвариантном эллипсоиде, остается в нем для любого момента времени $k\ge 0$.

Эллипсоид (15) может рассматриваться в качестве аппроксимации множества достижимости замкнутой системы (11), то есть позволяет характеризовать влияние внешних возмущений и неопределенности параметров модели на траекторию замкнутой системы. Тогда минимизация в некотором смысле инвариантного эллипсоида (15) соответствует робастному управлению системой (11).

Сравнение выражений (14) и (15) позволяет сделать вывод, что если выполняется тождество $P_1(k,\theta)=Q^{-1}(k,\theta)$, то эллипсоид (15) представляет собой множество, находящееся внутри поверхности уровня ПФЛ (14).

Тогда задача робастной стабилизации заключается в вычислении в каждый момент времени $k\ge 0$ матрицы $K(k)$ такой, чтобы регулятор (10) обеспечивал минимизацию по некоторому критерию эллипсоида (15) при ограничениях (2). Выберем в качестве критерия сумму квадратов полуосей эллипсоида, то есть след матрицы $Q(k,\theta)$. Тогда целевая функция оптимизационной задачи будет иметь вид

$$\sum\nolimits_{i=1}^{L}\operatorname{trace}\left(P_{1i}^{-1}(k)\right)\to\min,\quad(16)$$

то есть является нелинейной. Однако, задача (16) эквивалентна следующей задаче:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{L}\operatorname{trace}\left(H_i(k)\right)\to\min\quad(17)$$

при ограничениях $\begin{bmatrix}H_i(k) & I_N \\ I_N & P_{1i}(k)\end{bmatrix}\succeq 0$, $H_i(k)\succ 0$, $H_i(k)\in\mathrm R^{N\times N}$, $i=\overline{1,L}$.

Указанная эквивалентность доказывается с помощью неравенств $H_i(k)\succeq P_{1i}(k)$, $i=\overline{1,L}$ и леммы Шура [8].

Тогда результат решения задачи синтеза ограниченного робастного гарантирующего управления запасами в сетях поставок на основе параметризованной функции Ляпунова с помощью дескрипторного подхода может быть представлен в виде следующей теоремы.

Теорема. Рассмотрим систему (11) с параметрической неопределенностью (4), (5) и ограничениями (2), и пусть матрицы $\hat S(k)$ и $\hat Y(k)$ получены в результате решения оптимизационной задачи (17) при ограничениях на матричные переменные $P_{1i}(k) = P_{1i}^{\mathrm{T}}(k) \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $H_i(k) \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $i=\overline{1,L}$, $P_2(k)\in \mathrm{R}^{N\times N}$, $S(k)\in \mathrm{R}^{m\times m}$; $Y(k)\in \mathrm{R}^{m\times N}$; $Z^{(ii)} \in \mathrm{R}^{(7N+3q+m)\times(7N+3q+m)}$, $i=\overline{1,L}$; $Z^{(ij)} = Z^{(ji)\mathrm{T}}$, $i=\overline{1,L-1}$, $j=\overline{i+1,L}$ и скалярный параметр $\alpha(k)$

$$\begin{bmatrix} Z^{(11)} & Z^{(12)} & \cdots & Z^{(1L)} \\ Z^{(21)} & Z^{(22)} & \cdots & Z^{(2L)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z^{(L1)} & Z^{(L2)} & \cdots & Z^{(LL)} \end{bmatrix} \preceq 0,$$

$$\alpha(k) > 0, \quad \begin{bmatrix} P_2(k)BB^{\mathrm{T}} & BS(k) \\ S^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}} & S(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{18}$$

$$P_{1i}(k) \succ 0, \quad H_i(k) \succ 0, \quad \begin{bmatrix} H_i(k) & I_N \\ I_N & P_{1i}(k) \end{bmatrix} \succeq 0,$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & C \\ C^{\mathrm{T}} & P_{1i}(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i=\overline{1,L}, \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix} Y^{\mathrm{T}}(k)\varepsilon e_m \left(\xi(k)-\xi^*\right)^{+} & Y^{\mathrm{T}}(k) \\ Y(k) & S(k) \end{bmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{bmatrix} Y^{\mathrm{T}}(k)u^{\max}\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{+} & Y^{\mathrm{T}}(k) \\ Y(k) & S(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{20}$$

где $Q_x \in \mathrm{R}^{n\times n}$ – матрица эллипсоида наименьшего объема, который аппроксимирует множество X; $e_m = [1,1,...,1]^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{m\times 1}$;

Если задача минимизации линейной функции (17) при ограничениях (18)–(20), которая является задачей полуопределенного программирования, имеет решение, то: 1) для любого начального состояния $x(0) \geq x^{\max}$, $u(k) = 0_{m\times 1}$ $\forall k \leq 0$ и $\forall A(\theta) \in \Omega$, а также внешнего возмущения $d(k) \in E(d^*, Q_d)$ система (11) с параметрической неопределенностью (4), (5) является робастно устойчивой при ограничениях (2); 2) среди всех линейных управлений вида (10) регулятор с матрицей

$$K(k) = \hat{S}^{-1}(k)\hat{Y}(k) \tag{21}$$

доставляет минимум по критерию следа матрицы инвариантному эллипсоиду (15) для замкнутой системы (11) в момент времени k.

Из-за ограниченности объема статьи доказательство теоремы опускаем.

Первое из ЛМН (18) гарантирует стабилизацию замкнутой системы (11) при $\forall d(k) \in E(d^*, Q_d)$ и $\forall A(\theta) \in \Omega$. Последнее из ЛМН (19), а также ЛМН (20) обеспечивают выполнение заданных ограничений (2). Отметим, что именно наличие ЛМН (20) приводит к необходимости использования нестационарной обратной связи, поскольку матрицы неравенств зависят от текущего значения вектора состояний $\xi(k)$.

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В качестве примера рассмотрим сеть поставок, которая изучалась в работе [2]. Модель сети описывается графом $G = (\{1,2,3\}, \{(2,1),(2,3),(3,1)\})$. Заданы значения времени выполнения заказа в узлах сети: $T_1 = T_2 = 2$, $T_3 = 1$; и времени транспортировки ресурсов между узлами сети: $T_{2,1} = T_{3,1} = T_{2,3} = 1$.

Представим управляемые потоки u_1 и u_3, описывающие сборочные процессы, в виде гипердуг, а также добавим поток u_2, который описывает поставки сырья извне (см. рис. 1). Дуги d_1 и d_2, изображенные пунктирными линиями, представляют внешний спрос. Значение времени транспортировки и количество единиц продук-

$$Z^{(ij)} = \begin{bmatrix}
-P_{1i}(k) & A^{(i)\mathrm{T}}P_2(k)+Y^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}} & 0_{N\times N} & 0_{N\times q} & 0_{N\times q} & A^{(i)\mathrm{T}}P_2(k)+Y^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}} & 0_{N\times q} & W_\xi & Y^{\mathrm{T}}(k)W_u \\
P_2^{\mathrm{T}}(k)A^{(i)}+BY(k) & 4P_{1i}(k)-2\left(P_2(k)+P_2^{\mathrm{T}}(k)\right) & P_2^{\mathrm{T}}(k)\left(A^{(j)}-I_N\right) & P_2^{\mathrm{T}}(k)G & P_2^{\mathrm{T}}(k)G & -2P_2(k) & 0_{N\times q} & 0_{N\times N} & 0_{N\times N} \\
0_{N\times N} & \left(A^{(i)}-I_N\right)^{\mathrm{T}}P_2(k) & 0_{N\times N} & 0_{N\times q} & 0_{N\times q} & \left(A^{(i)}-I_N\right)^{\mathrm{T}}P_2(k) & 0_{N\times q} & 0_{N\times N} & 0_{N\times N} \\
0_{q\times N} & G^{\mathrm{T}}P_2(k) & 0_{q\times N} & 0_{q\times q} & 0_{q\times q} & G^{\mathrm{T}}P_2(k) & 0_{q\times q} & 0_{q\times N} & 0_{q\times N} \\
0_{q\times N} & G^{\mathrm{T}}P_2(k) & 0_{q\times N} & 0_{q\times q} & 0_{q\times q} & G^{\mathrm{T}}P_2(k) & 0_{q\times q} & 0_{q\times N} & 0_{q\times N} \\
P_2^{\mathrm{T}}(k)A^{(i)}+BY(k) & -2P_2^{\mathrm{T}}(k) & P_2^{\mathrm{T}}(k)\left(A^{(j)}-I_N\right) & P_2^{\mathrm{T}}(k)G & P_2^{\mathrm{T}}(k)G & P_2^{\mathrm{T}}(k) & P_2^{\mathrm{T}}(k)GQ_d^{1/2} & 0_{N\times N} & 0_{N\times N} \\
0_{q\times N} & 0_{q\times N} & 0_{q\times N} & 0_{q\times q} & 0_{q\times q} & Q_d^{1/2}G^{\mathrm{T}}P_2(k) & \alpha(k)I_q & 0_{q\times q} & 0_{q\times N} \\
W_\xi & 0_{N\times N} & 0_{N\times N} & 0_{N\times q} & 0_{N\times q} & 0_{N\times N} & 0_{N\times q} & -W_\xi & 0_{N\times N} \\
W_uY(k) & 0_{N\times N} & 0_{N\times N} & 0_{N\times q} & 0_{N\times q} & 0_{N\times N} & 0_{N\times q} & 0_{N\times N} & -W_u
\end{bmatrix}.$$

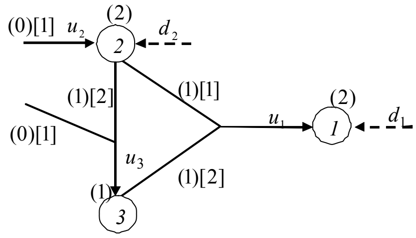


Рисунок 1 – Графическое представление модели сети поставок

ции Π_{ij}, которое требуется в соответствии с технологическим процессом, указаны для каждого управляемого потока в круглых и квадратных скобках, соответственно. Возле каждого узла в круглых скобках указаны значения времени выполнения заказа T_i. Специфика рассматриваемой системы в том, что на узел 1 действует только внешний спрос; на узел 2 действует как внешний, так и внутренний спрос со стороны узлов 1 и 3; на узел 3 – только внутренний спрос со стороны узла 1.

По формуле $\Lambda_i = \max\left\{T_{j,i} + T_i,\ \ i, j = \overline{1,3},\ j \neq i\right\}$ определим величины запаздывания управляемых потоков для всех узлов сети, в результате получим $\Lambda = 3$. Тогда размерность расширенной модели сети равна $N = 12$.

Заданы максимальные вместительности хранилищ узлов сети и объемы транспортировок $x^{\max} = [120, 672, 240]^{\mathrm{T}}$, $u^{\max} = [25, 130, 55]^{\mathrm{T}}$, а также граничные значения внешнего спроса $d^{\min} = [7, 6]^{\mathrm{T}}$, $d^{\max} = [20, 18]^{\mathrm{T}}$.

Пусть время транспортировки ресурсов между узлами 2 и 3 в процессе функционирования сети может увеличиваться на один период, т.е. $T_{2,3} \in \{1, 2\}$. Тогда величина запаздывания управляемых потоков узла 3 принимает значение из множества $\Lambda_3 \in \{2, 3\}$. В результате получим $A(\theta) \in \Omega = \mathrm{Co}\left\{A^{(1)}, A^{(2)}\right\}$, где

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} I_3 & B_1 & B_2^{(1)} & B_3^{(1)} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & I_3 & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & I_3 & 0_{3\times3} \end{bmatrix},\quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} I_3 & B_1 & B_2^{(2)} & B_3^{(2)} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & I_3 & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & I_3 & 0_{3\times3} \end{bmatrix},$$

$$B_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix},\ B_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{0} \end{bmatrix},\ B_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{0} \end{bmatrix},\ B_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix}$$

(варьируемые элементы матриц подчеркнуты).

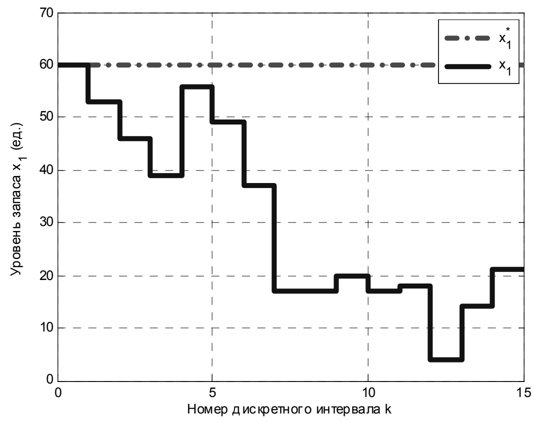
В соответствии с (8) уровни страховых запасов равны $x^* = [60, 336, 120]^{\mathrm{T}}$. Следуя [12], вычислим параметры эллипсоида, аппроксимирующего множество значений внешнего спроса: $Q_d = \mathrm{diag}(84{,}5,\ 72{,}0)$, $d^* = [13{,}5, 12{,}0]^{\mathrm{T}}$; а также матрицу эллипсоида Q_x, аппроксимирующего множество X допустимых значений состояний. В качестве начального состояния выбраны значения страховых запасов $x(0) = x^*$, а значения диагональных весовых матриц равны $\left[W_\xi\right]_{ii} = 2{,}0,\ i = \overline{1{,}12}$, $\left[W_u\right]_{jj} = 0{,}1,\ j = \overline{1{,}3}$.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

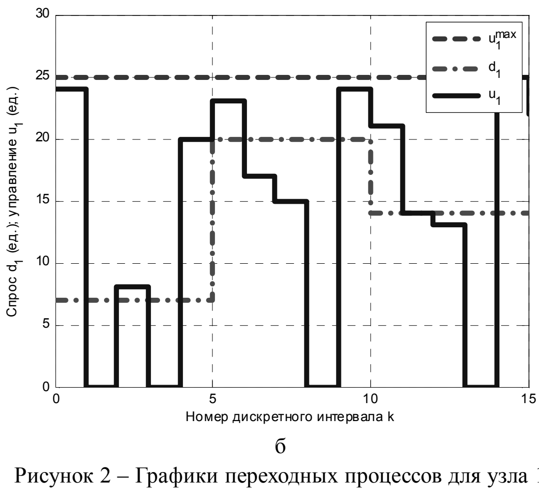
Моделирование осуществлялось в течение 15 периодов. Результаты моделирования получены путем численного решения последовательности задач (17) при ограничениях (18)–(20) в условиях скачкообразно изменяющегося внешнего спроса с помощью свободно распространяемого пакета CVX [12]. Результаты представлены на рис. 2 – рис. 4, где *а* – значения наличного и страхового уровней запаса; *б* – значения внешнего спроса и объемов заказа.

6 ОБСУЖДЕНИЕ

Вначале наблюдается переходный процесс, обусловленный тем, что в момент начала моделирования каналы транспортировки ресурсов не были загружены. В 4, 9 и 14 периодах значение матрицы динамики выбиралось равным $A^{(2)}$, в остальных периодах – $A^{(1)}$, следствием чего являются скачкообразные изменения объемов заказов в указанных периодах, особенно заметные для 1 и 3 узлов. В процессе моделирования фазовая траектория замкнутой системы не выходит за пределы инвариантных эллипсоидов, размеры которых зависят от выбранных значений весовых матриц W_ξ и W_u, определяющих критерий качества системы.

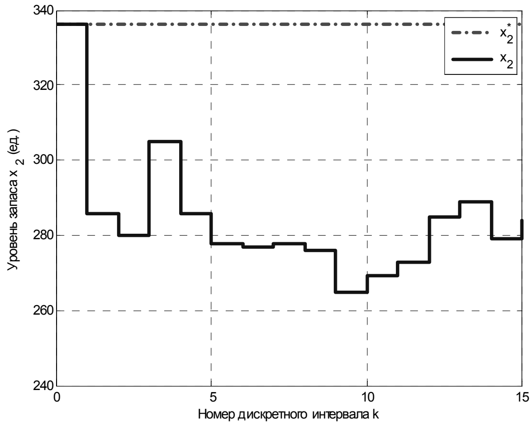


а

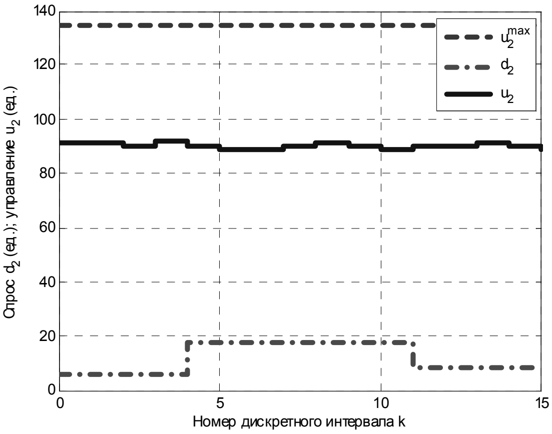


б

Рисунок 2 – Графики переходных процессов для узла 1

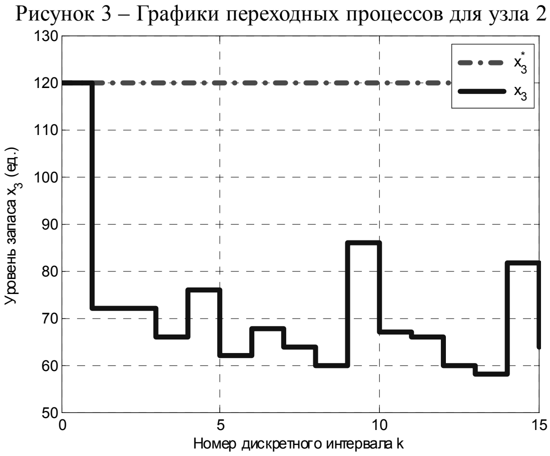


а

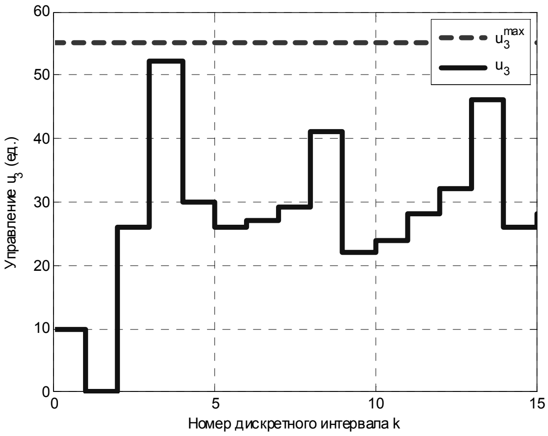


б

Рисунок 3 – Графики переходных процессов для узла 2



а



б

Рисунок 4 – Графики переходных процессов для узла 3

Результаты моделирования показали, что полученная стратегия управления запасами обеспечивает отсутствие дефицита ресурсов в сети, гарантированную стоимость управления, а также робастную устойчивость замкнутой системы при заданных ограничениях на состояния и управления.

ВЫВОДЫ

В статье предложен подход к решению задачи синтеза ограниченного робастного гарантирующего управления запасами для сетей поставок с параметрической структурной неопределенностью в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и наличия несимметричных ограничений на значения состояний и управлений. Закон управления строится в виде линейной динамической обратной связи по сигналу невязки между наличными и страховыми уровнями запаса ресурсов. Подход основан на использовании метода инвариантных эллипсоидов и параметризованной функции Ляпунова. Использование математического аппарата ЛМН позволило сформулировать задачу синтеза управления в виде последовательности задач полуопределенного программирования, для решения которых применяются свободно распространяемые специализированные программные пакеты. С помощью дескрипторного описания системы удалось добиться уменьшения консерватизма полученных результатов, поскольку матрицы неравенств не содержат произведения нестационарной матрицы динамики системы и матрицы Ляпунова, а при вычислении матрицы коэффициентов обратной связи используются матрицы, не зависящие явно от неопределенных параметров модели.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках госбюджетной научно-исследовательской темы Национального технического университета «Харьковский политехнический институт» «Развитие теории и методов синтеза децентрализованного робастного управления распределенными сетями поставок в условиях неопределенности» (номер государственной регистрации 0111U002285).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щербаков П. С. Приближенные методы в параметрической робастности линей-ных систем управления : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 05.13.01 / Щербаков Павел Сергеевич. – М. : , 2004. – 215 с.
2. Blanchini F. Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays / F. Blanchini, R. Pesenti, F. Rinaldi, W. Ukovich // IEEE Transactions on Robotics and Automation. – 2000. – Vol. 16, No. 3. – P. 313–317.
3. Дорофеев Ю. И. Построение математических моделей управляемых сетей поставок с учетом запаздываний потоков / Ю. И. Дорофеев, А. А. Никульченко // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 1. – С. 16–27.
4. Лотоцкий В. А. Модели и методы управления запасами / В. А. Лотоцкий, А. С. Мандель. – М. : Наука, 1991. – 188 с.
5. Поляк Б. Т. Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств / Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, П. С. Щербаков. – М. : ЛЕНАНД, 2014. – 560 с.
6. Blanchini R. Set-theoretic methods in control / R. Blanchini, S. Miani. – Boston: Birkhäuser, 2008. – 494 p.
7. Чурилов А. Н. Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам / А. Н. Чурилов, А. В. Гессен. – СПб: С.-Петерб. гос. ун-т, 2004. – 148 с.

8. Feron E. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions / E. Feron, P. Apkarian, P. Gahinet // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1996. – Vol. 41. – P. 1041–1046.
9. Oliveira M. C. A new discrete-time robust stability condition / M. C. Oliveira, J. Bernussou, J. C. Geromel // System & Control Letters. – 1999. – Vol. 37. – P. 261–265.
10. Zhang W. Robust stability test for uncertain discrete-time systems: a descriptor system approach / W. Zhang, H. Su, Y. Liang, Z. Han // Latin American Applied Research. – 2011. – Vol. 41, No. 4. – P. 359–364.
11. Дорофеев Ю. И. Синтез системы оптимального управления запасами с дискрет-ным ПИД-регулятором с использованием ЛМН / Ю. И. Дорофеев // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х. : ХУПС, 2014. – Вип. 4(41). – С. 34–41.
12. Grant M. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.0 beta / M. Grant, Boyd S // [Electronic resource]. – Access mode: http://cvxr.com/cvx.

Статья поступила в редакцию 15.10.2015.
После доработки 19.10.2015.

Дорофєєв Ю. І.
Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри системного аналізу і управління Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна

ДЕСКРИПТОРНИЙ ПІДХІД ДО СИНТЕЗУ ОБМЕЖЕНОГО РОБАСТНОГО ГАРАНТУЮЧОГО КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ПАРАМЕТРИЗОВАНОЇ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА

Вирішено задачу синтезу робастного гарантуючого керування запасами для мереж поставок з параметричною структурною невизначеністю в умовах дії невідомого, але обмеженого зовнішнього попиту та наявності несиметричних обмежень на значення станів і керуючих дій. Закон керування будується у вигляді лінійного динамічного зворотного зв'язку за сигналом нев'язки між готівковими і страховими рівнями запасу ресурсів. Для подавлення впливу зовнішніх збурень, що моделюють зміни попиту, одночасно із забезпеченням робастної стійкості замкнутої системи застосований метод інваріантних еліпсоїдів, який був удосконалений за допомогою використання дескрипторного опису системи та побудови параметризованої функції Ляпунова, що дозволяє зменшити ступінь впливу невизначеності значень транспортних запізнювань на результат синтезу керування. За допомогою математичного апарату лінійних матричних нерівностей задача синтезу управління представлена у вигляді послідовності задач напіввизначеного програмування, для вирішення яких застосовуються вільно поширювані спеціалізовані програмні пакети. В рамках запропонованої методики можливий вибір оптимальних значень страхових запасів ресурсів, оскільки розглянуте рішення задає, фактично, алгоритмічну залежність між рівнем страхових запасів і оптимальним значенням критерію якості. Розглянуто чисельний приклад.

Ключові слова: керування запасами, робастне керування, метод інваріантних еліпсоїдів, дескрипторний підхід, параметрезована функція Ляпунова, лінійна матрична нерівність.

Dorofieiev Yu. I.
PhD, Associate professor, Associate professor of department of system analysis and control, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine

DESCRIPTOR APPROACH TO THE SYNTHESIS OF CONSTRAINED ROBUST GUARANTEED INVENTORY CONTROL USING PARAMETER-DEPENDENT LYAPUNOV FUNCTION

The problem of robust guaranteed inventory control synthesis for supply networks with parametric uncertainty under action of unknown, but bounded external demand and availability of non-symmetrical constraints on the values of states and controls is solved. The control law is constructed in the form of a linear dynamic feedback with respect to deviation between cash and safety stock levels of resources. In order to suppress the influence of external perturbations, modeling changes in demand, while ensuring robust stability of the closed system the method of invariant ellipsoids is used, which has been improved through the use descriptor system approach and building parameter-dependent Lyapunov function, which reduces the impact degree of uncertainty of the transport time-delays on the result of the synthesis control. With the help of the linear matrix inequalities technique the control synthesis problem is presented as a series of semidefinite programming, for solving which is used open source software. In the framework of the proposed method is possible to choose the optimal values of safety stock levels of resources, as the resulting solution determines, in fact, an algorithmic relationship between the levels of safety stocks and the optimal value of the quality criterion. The numerical example is considered.

Keywords: inventory control, robust control, invariant ellipsoids method, descriptor approach, parameter dependent Lyapunov function, linear matrix inequality.

REFERENCES

1. Shherbakov P. S. Priblizhennye metody v parametricheskoj robastnosti linejnyh sistem upravlenija : dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk : 05.13.01 / Shherbakov Pavel Sergeevich. Moscow, 2004, 215 p.
2. Blanchini F., Pesenti R., Rinaldi F., Ukovich W. Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays, *IEEE Transactions on Robotics and Automation,* 2000, Vol. 16, No. 3, pp. 313–317.
3. Dorofieiev Yu. I., Nikulchenko A. A. Postroenie matematicheskih modelej upravljaemyh setej postavok s uchetom zapazdyvanij potokov, *Sistemni doslidzhennja ta informacijni tehnologiї*, 2013, No. 1, pp. 16–27.
4. Lotockij V. A., Mandel' A. S. Modeli i metody upravlenija zapasami. Moscow, Nauka, 1991, 188 p.
5. Poljak B. T., Hlebnikov M. V., Shherbakov P. S. Upravlenie linejnymi sistemami pri vneshnih vozmushhenijah: tehnika linejnyh matrichnyh neravenstv. Moscow, LENAND, 2014, 560 p.
6. Blanchini R., Miani S. Set-theoretic methods in control. Boston, Birkhäuser, 2008, 494 p.
7. Churilov A. N., Gessen A. B. Issledovanie linejnyh matrichnyh neravenstv. Putevoditel' po programmnym paketam. Sankt-Peterburg, SPbGU, 2004, 148 p.
8. Feron E., Apkarian P., Gahinet P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, Vol. 41, pp. 1041–1046.
9. Oliveira M. C., Bernussou J., Geromel J. C. A new discrete-time robust stability condition, System & Control Letters, 1999, Vol. 37, pp. 261–265.
10. Zhang W., Su H., Liang Y., Han Z. Robust stability test for uncertain discrete-time systems: a descriptor system approach, *Latin American Applied Research*, 2011, Vol. 41, No. 4, pp. 359–364.
11. Dorofieiev Yu. I. Sintez sistemy optimal'nogo upravlenija zapasami s diskretnym PID-reguljatorom s ispol'zovaniem LMN, *Zbirnik naukovih prac' Kharkivs'kogo universitetu Povitrjanih Sil*. Kharkiv, KhUPS, 2014, Vip. 4(41), pp. 34–41.
12. Grant M., Boyd S. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.0 beta [Electronic resource]. Access mode: http://cvxr.com/cvx.