УДК 62–50:519.7/8

Левин В. И.

Д-р техн. наук, профессор кафедры математики Пензенского государственного технологического университета, Пенза, Россия

ОПТИМИЗАЦИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ МЕТОДОМ ДЕТЕРМИНИЗАЦИИ

В статье рассмотрены существующие подходы к оптимизации (оптимальному проектированию) систем в условиях неопределенности. Дана точная постановка задачи условной оптимизации при интервальной неопределенности параметров целевой функции и ограничений. В связи с этим изложены математическая теория сравнения интервалов, включающая точное определение максимального и минимального интервалов, условия существования таких интервалов и алгоритмы их отыскания. Предложена идея решения задачи условной оптимизации при интервальной неопределенности ее параметров. Эта идея основана на правилах математической теории сравнения интервалов, позволяющих заменить сравнение интервалов и выделение максимального и минимального интервала сравнением их нижних и верхних границ. На базе предложенной идеи сформулирован и обоснован метод детерминизации, позволяющий решить задачу условной оптимизации при интервальной неопределенности параметров путем ее сведения к двум полностью определенным задачам оптимизации того же типа. Сформулирована и доказана теорема, определяющая решение задачи условной оптимизации в условиях интервальной неопределенности параметров через решения двух указанных полностью определенных задач оптимизации. Также сформулирована и доказана теорема, определяющая необходимое и достаточное условие существования решения задачи условной оптимизации при интервальной неопределенности. Построен четырехшаговый алгоритм решения задачи условной оптимизации при интервальной неопределенности параметров, который реализует метод детерминизации. Приведен пример работы алгоритма; в качестве решаемой задачи выбрана интервальная задача о назначениях. Проведено сравнение изложенного подхода к решению задач условной оптимизации с неполностью определенными параметрами с другими методами решения таких задач (детерминированный, вероятностный и нечеткий). Указаны достоинства и недостатки различных методов. Подчеркнуто, что предложенный подход позволяет сводить оптимизацию неполностью определенных функций к оптимизации полностью определенных функций строго математически, а не эвристически, как это делается в других известных подходах.

Ключевые слова: оптимизация, неопределенность, оптимизация при интервальной неопределенности, метод детерминизации.

НОМЕНКЛАТУРА

$x_1,...,x_n$ – вещественные независимые переменные;
y – вещественная зависимая переменная;
F, F_1, F_2 – детерминированные целевые функции;
a, a_i, b, b_i – вещественные числа;
Φ, Φ_1, Φ_2 – детерминированные функции ограничений;
$\widetilde{F} = [F_1, F_2]$ – интервальная целевая функция;
$\widetilde{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2]$ – интервальные функции ограничений;
$\widetilde{a} = [a_1, a_2], \widetilde{b} = [b_1, b_2]$ – интервальные числа;
$\widetilde{p} = [p_1, p_2], \widetilde{q} = [q_1, q_2]$ – интервальные параметры;
$\vee$ – символ дизъюнкции (взятия максимума);
$\wedge$ – символ конъюнкции (взятия минимума);
$\cap$ – символ пересечения множеств.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимизации имеют огромное прикладное значение: на их основе строятся методы оптимального проектирования разнообразных систем – технических, экономических, социальных и т.д., обеспечивающие достижение наилучшего, в определенном смысле, результата работы создаваемой системы. В связи с этим к настоящему времени уже создано огромное число методов решения задач оптимизации, как универсальных, рассчитанных на применение к задачам различных классов, так и специализированных, позволяющих эффективно решать лишь отдельные узкие классы задач [1–6] (см. также работы автора последних лет [7–12]).

Но при всем различии существующих методов, они все обладают общим свойством – применимостью только к тем задачам оптимизации, в которых оптимизируемая функция известна точно (детерминирована). Между тем, встречающиеся на практике задачи оптимизации и оптимального проектирования таковы, что их оптимизируемые функции обычно известны не точно, а с той или иной степенью неопределенности (недетерминированы). Это обычно вызывается тем, что 1) реальным процессам свойственна естественная неопределенность; 2) параметры большинства систем из-за погрешности вычислений (измерений) известны неточно; 3) параметры многих систем изменяются во времени.

В связи с этим, возникает проблема оптимизации неполностью определенных (недетерминированных) функций. Данная проблема достаточно сложна, по сравнению с традиционной оптимизацией полностью определенных (детерминированных) функций, поскольку для нее дополнительно необходимо: 1) обобщить понятие экстремума функции; 2) выяснить условия существования экстремума функции, связанные с ее недетерминированностью; 3) разработать специальные методы поиска экстремума таких функций.

Реально эта проблема еще сложнее, поскольку имеющаяся информация об оптимизируемой функции может быть не только неполностью определенной, но и неоднозначной, неточной, противоречивой и т.д. В такой ситуации некоторые авторы считают, что модели для описания сложных систем могут быть смысловыми, носящими содержательно-описательный, словесный характер. Такой взгляд представляется не вполне логичным. Действительно, математика, как известно, строится как полностью определенная, однозначная, точная и не-

DOI 10.15588/1607-3274-2015-4-15

противоречивая наука. Поэтому правильное применение математики к описанию сложных систем – неопределенных, неоднозначных, неточных противоречивых и т.д. – вполне может давать адекватные математические модели этих систем, лишенные неопределенности, неоднозначности, неточности и противоречивости. Для этого требуется всего лишь подобрать математический аппарат, который позволяет оперировать с неопределенностью и другими НЕ-свойствами исследуемой сложной системы так же точно и однозначно, как классическая математика оперирует с полностью определенными системами.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать следующую ситуацию. Пусть, существует некоторая произвольная непрерывная функция n переменных

$$y = F(x_1,...,x_n), \quad (1)$$

причем все параметры (коэффициенты) ее явного представления известны точно и пусть она определена в области, определяемой системой ограничений

$$\left.\Phi_i(x_1,...,x_n) \le b_i,\ i = \overline{1,m}\right\}. \quad (2)$$

Тогда относительно функции (1) можно сформулировать полностью определенную (детерминированную) задачу условной оптимизации

$$F(x_1,...,x_n) = \max, \text{при } \left.\Phi_i(x_1,...,x_n) \le b_i,\ i = \overline{1,m}\right\}. \quad (3)$$

Конечно, возможен и вариант задачи (3), где необходимо не максимизировать, а минимизировать функцию F. В современном математическом программировании есть множество методов эффективного решения задач (3), ориентирующихся на тип функций F и $\Phi_i,\ i = \overline{1,m}$.

Пусть теперь параметры $p_k,\ k = \overline{1,l}$ явного представления функции F известны не точно, а с точностью до интервалов возможных значений, т. е. имеют вид интервалов $\widetilde{p}_k = [p_{k1}, p_{k2}]$. Далее, пусть аналогичным образом неточно заданы параметры q_s явного представления функций Φ_i в левых частях ограничений задачи, а также и параметры b_i в правых частях ограничений, т.е. $\widetilde{q}_{si} = [q_{si1}, q_{si2}],\ s = \overline{1,t},\ \widetilde{b}_i = [b_{i1}, b_{i2}],\ i = \overline{1,m}$. Тогда функции F и $\Phi_i,\ i = \overline{1,m}$, также становятся интервальными (т. е. принимающими вид интервалов $\widetilde{F}$ и $\widetilde{\Phi}_i,\ i = \overline{1,m}$), определяемыми с точностью до интервалов возможных значений, равно как и параметры $b_i,\ i = \overline{1,m}$ (т.е. принимающие вид интервалов $\widetilde{b}_i,\ i = \overline{1,m}$). В итоге полностью определенная задача условной оптимизации (3) переходит в неполностью определенную – интервальную задачу

$$\widetilde{F}(x_1,...,x_n) = \max, \text{при } \left.\widetilde{\Phi}(x_1,...,x_n) \le \widetilde{b}_i,\ i = \overline{1,m}\right\}. \quad (4)$$

Конечно, возможен вариант задачи (4), где требуется не максимиировать, а минимизировать функцию $\widetilde{F}$. Необходимо разработать методику решения оптимизационной задачи (4).

2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Есть различные подходы к поиску оптимума неполностью определенных (недетерминированных) функций, различающиеся достоинствами и недостатками [13]. Первый из них – детерминированный – заключается в решении задачи оптимизации для определенных значений или сочетаний значений параметров оптимизируемой функции, взятых внутри заданных областей их неопределенности [13]. Можно взять наихудшее сочетание значений параметров внутри областей неопределенности (пессимистический подход) [13–16], их наилучшее сочетание (оптимистический подход) [17], центры областей неопределенности параметров (центральный подход) [18] и др. Основное достоинство подхода – простота интерпретации полученного решения, основной недостаток – слабо мотивированная ориентировка на какое-то одно значение (сочетание значений) параметров, которое на практике реализуется очень редко, что может обернуться неоправданной сложностью решения. Второй подход – вероятностный – состоит в решении задачи оптимизации для усредненных (ожидаемых, в смысле математического ожидания) значений параметров оптимизируемой функции или для таких значений параметров, которые обеспечивают достаточно высокую вероятность получения оптимума [19–22]. Этот подход предполагает задание вероятностных распределений указанных параметров внутри областей их неопределенности. Основное достоинство этого подхода – ориентировка получаемого решения хотя и на одно, но зато наиболее часто встречающееся (наиболее подходящее для получения оптимума) значение (сочетание значений) параметров функции, недостаток – необходимость знания вероятностных распределений параметров, что на практике часто невозможно. Третий подход – нечеткий – идейно близок второму, но в нем вместо вероятностных распределений параметров неполностью определенной функции, являющихся объективными характеристиками, используются нечеткие распределения параметров, получаемые экспертным путем, т.е. субъективно [12].

В наших работах [23–28] был предложен и детально описан применительно к различным оптимизационным задачам детерминизационный подход к поиску оптимума неполностью определенных функций. Этот подход принципиально отличается от трех предыдущих тем, что оптимизация неполностью определенной функции проводится с учетом всего множества возможных значений недетерминированных параметров функции.

Указанный подход позволяет для любой функции, неопределенность которой заключается в том, что ее параметры известны нам лишь с точностью до интервалов возможных значений, свести нахождение оптимума такого типа функции к нахождению одноименных оптимумов двух полностью определенных функций. Таким образом, для нахождения оптимума неполностью определенных функций становится возможным применять многочисленные хорошо известные и эффективно работающие методы точного нахождения оптимума полностью определенных (детерминированных) функций. При этом собственно алгоритм нахождения оптимума неполностью определенной (недетерминированной) функции оказывается полностью определенным, однозначным, точным и непротиворечивым. Другой причиной выбора неопределенности именно интервального типа было то, что интервальные оценки неизвестных параметров систем наиболее просты и доступны для получения. В этом заключаются основные достоинства предложенного нами подхода к оптимизации неполностью определенных функций – метода детерминизации. Разумеется, у нашего метода есть и другие достоинства, а также и недостатки. Они подробно рассмотрены в п. 6.

В настоящей работе детерминизационный подход к оптимизации неполностью определенных функций излагается и обосновывается в наиболее общем виде, не зависящем от особенностей оптимизируемых функций.

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Рассмотрим два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$. Попытаемся сравнить эти интервалы по величине, рассматривая их как интервальные числа. Первое, что приходит в голову, – сравнить интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ на основе отношений в отдельных парах вещественных чисел (a_i, b_j), где $a_i \in \tilde{a}, b_j \in \tilde{b}$. Но такой подход сразу ведет к провалу, поскольку в общем случае, при произвольных интервалах $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, одни пары чисел (a_i, b_j) будут находиться в отношении $a_i > b_j$, а другие – в противоположном отношении: $a_i < b_j$. Поэтому единственное, что остается, – реализовать сравнение интервалов на теоретико-множественном уровне, рассматривая их как целое, не подлежащее дроблению на части. Этот путь был реализован автором в 1990-е годы. Ниже приводится краткое изложение разработанных методов [23–28].

Итак, в соответствии с полученными только что выводами, операции взятия максимума $\vee$ и минимума $\wedge$ двух произвольных интервалов $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ введем в виде следующих теоретико-множественных конструкций

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} = \{a \vee b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \{a \wedge b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}. \quad (5)$$

Взятие максимума (минимума) двух интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ определяется по формулам (5) как нахождение максимума (минимума) двух точечных величин a и b, при условии, что эти величины пробегают все возможные значения соответственно из интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Теперь для того чтобы интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ можно было сравнить по величине, установив отношение $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ или $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, необходимо, во-первых, чтобы введенные операции $\vee, \wedge$ над этими интервалами существовали, во-вторых, чтобы эти операции давали в результате один из операндов – $\tilde{a}$ или $\tilde{b}$, и, в-третьих, чтобы эти две операции были согласованы, в том смысле, что если большим (меньшим) является один из интервалов, то меньшим (большим) является другой из них. Сформулированное условие сравнимости двух интервалов по величине является, очевидно, не только необходимым, но и достаточным.

К счастью, нетрудно доказать, что условие согласованности операций $\vee$ и $\wedge$ над интервалами выполняется всегда, т.е. для любой пары интервалов $(\tilde{a}, \tilde{b})$. Очевидно также, что всегда выполняется условие существования введенных операций вычисления максимума и минимума двух интервалов , причем результатом операции оказывается некоторый, вообще говоря, новый интервал, который может отличаться как от $\tilde{a}$, так и от $\tilde{b}$. Таким образом, необходимым и достаточным условием сравнимости интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ является условие, по которому операции $\tilde{a} \vee \tilde{b}$ и $\tilde{a} \wedge \tilde{b}$ должны иметь результатом один из интервалов – $\tilde{a}$ или $\tilde{b}$. Последняя формулировка условия сравнимости интервалов открывает возможность получения его в конструктивной форме, пригодной для практического применения. Основной результат здесь формулируется следующим образом.

Теорема 1. Для того чтобы два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ были сравнимы по величине (отношению $\geq$) и находились в отношении $\tilde{a} \geq \tilde{b}$, необходимо и достаточно, чтобы границы этих интервалов подчинялись условиям

$$a_1 \geq b_1, \; a_2 \geq b_2, \quad (6)$$

а для того чтобы они были сравнимы по величине (отношению $\leq$) и находились в отношении $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$a_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq b_2. \quad (7)$$

Эта теорема показывает, что интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ являются сравнимыми по отношению $\geq$ или $\leq$ (и находятся именно в этом отношении) только в том случае, когда в таком же отношении находятся их одноименные границы a_1, b_1 и a_2, b_2. Иными словами, интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ находятся в отношении $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ только тогда, когда $\tilde{a}$ сдвинут обеими границами вправо относительно $\tilde{b}$ и находятся в противоположном отношении $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ только тогда, когда интервал $\tilde{a}$ сдвинут обеими границами влево относительно $\tilde{b}$.

Значение теоремы 1 заключается в том, что она сводит сравнение двух интервалов и выбор большего (меньшего) из них к сравнению одноименных границ этих интервалов, являющихся вещественными числами. Так разрешается проблема сравнения интервалов.

Теорема 2. Для того чтобы два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ были не сравнимы по величине (по отношению $\geq$ и $\leq$), т.е. не находились в отношении $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ или $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$(a_1 < b_1, a_2 > b_2) \quad \text{или} \quad (b_1 < a_1, b_2 > a_2). \quad (8)$$

Эта теорема показывает, что интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ не сравнимы по отношениям $\geq$ и $\leq$ только в том случае, когда один из них полностью «накрывает» другой. Значение теоремы 2 заключается в том, что она показывает существование определенных случаев несравнимости интервалов по отношениям $\geq$ и $\leq$, в отличие от вещественных чисел, которые всегда сравнимы по указанным отношениям. Несравнимость некоторых интервалов есть естественный результат того, что интервальные числа, в отличие от обычных вещественных чисел, задаются не точно, а с неопределенностью (число принимает некоторое значение в заданном интервале, но не уточняется, какое именно это значение). На основании теорем 1, 2 можно доказать следующие положения.

Теорема 3. Для того чтобы в системе интервалов $\widetilde{a}(1)=[a_1(1),a_2(1)]$, $\widetilde{a}(2)=[a_1(2),a_2(2)]$,... существовал максимальный интервал (который находится со всеми остальными интервалами в отношении $\geq$), необходимо и достаточно, чтобы границы этого интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$\left.\begin{array}{l} a_1(1)\geq a_1(2),\ a_1(1)\geq a_1(3),... \\ a_2(1)\geq a_2(2), a_2(1)\geq a_2(3),... \end{array}\right\}. \quad (9)$$

Конкретные условия (9) даны для случая, когда максимальным является интервал $\widetilde{a}(1)$, что, очевидно, не ограничивает общности.

Теорема 4. Для того чтобы в системе интервалов $\widetilde{a}(1)=[a_1(1),a_2(1)]$, $\widetilde{a}(2)=[a_1(2),a_2(2)]$,... существовал минимальный интервал (который находится со всеми остальными интервалами в отношении $\leq$), необходимо и достаточно, чтобы границы этого интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$\left.\begin{array}{l} a_1(1)\leq a_1(2),\ a_1(1)\leq a_1(3),... \\ a_2(1)\leq a_2(2), a_2(1)\leq a_2(3),... \end{array}\right\}. \quad (10)$$

Аналогично теореме 3 условия (10) записаны для случая, когда минимальным является интервал $\widetilde{a}(1)$, что не ограничивает общности.

Теоремы 3 и 4 показывают, что интервал является максимальным (минимальным) в системе интервалов только в том случае, когда максимальны (минимальны) его нижняя граница – среди нижних границ всех интервалов – и верхняя граница – среди верхних границ всех интервалов.

Теперь мы можем легко описать принцип детерминизации. В интервальной задаче (4) целевая функция $\widetilde{F}(x_1,...,x_n)$, функции $\widetilde{\Phi}_i(x_1,...,x_n)$, $i=\overline{1,m}$, в левых частях ограничений и параметры $\widetilde{b}_i$, $i=\overline{1,m}$, в их правых частях являются интервальными и поэтому могут быть записаны в виде интервалов

$$\begin{array}{ll} \widetilde{F}(x_1,...,x_n)=[F_1(x_1,...,x_n),F_2(x_1,...,x_n)], & \\ \widetilde{\Phi}_i(x_1,...,x_n)=[\Phi_{i1}(x_1,...,x_n),\Phi_{i2}(x_1,...,x_n)], & i=\overline{1,m}, \\ \widetilde{b}_i=[b_{i1},b_{i2}], & i=\overline{1,m}. \end{array} \quad (11)$$

После соответствующих замен сформулированную ранее задачу (4) можно переписать в явном интервальном виде

$$\begin{array}{c} [F_1(x_1,...,x_n),F_2(x_1,...,x_n)]=\max, \\ [\Phi_{i1}(x_1,...,x_n),\Phi_{i2}(x_1,...,x_n)]\leq[b_{i1},b_{i2}],\quad i=\overline{1,m}, \end{array} \quad (12)$$

который поддается решению. Действительно, согласно теореме 3 интервальное уравнение в (12) можно записать в виде эквивалентной пары обычных (детерминированных) уравнений

$$F_1(x_1,...,x_n)=\max,\quad F_2(x_1,...,x_n)=\max. \quad (13)$$

Далее, согласно приведенному выше утверждению теоремы 1 систему интервальных неравенств в условии оптимизационной задачи (12) можно записать в виде эквивалентной системы обычных (детерминированных) неравенств

$$\Phi_{i1}(x_1,...,x_n)\leq b_{i1},\ \Phi_{i2}(x_1,...,x_n)\leq b_{i2},\quad i=\overline{1,m}\,. \quad (14)$$

Соединяя пару уравнений оптимизации (13) с системой неравенств-ограничений (14) получим 2 детерминированные (полностью определенные) задачи условной оптимизации вида (3), при этом первую из новых задач назовем нижней граничной задачей исходной интервальной задачи (4), а вторую – ее верхней граничной задачей:

$$F_1(x_1,...,x_n)=\max,\quad \left.\begin{array}{l} \Phi_{i1}(x_1,...,x_n)\leq b_{i1},\ i=\overline{1,m}, \\ \Phi_{i2}(x_1,...,x_n)\leq b_{i2},\ i=\overline{1,m}, \end{array}\right\} \quad (15)$$

$$F_2(x_1,...,x_n)=\max,\quad \left.\begin{array}{l} \Phi_{i1}(x_1,...,x_n)\leq b_{i1},\ i=\overline{1,m}, \\ \Phi_{i2}(x_1,...,x_n)\leq b_{i2},\ i=\overline{1,m}. \end{array}\right\} \quad (16)$$

Из выполненного нами построения следует, что пара детерминированных задач условной оптимизации (15), (16), рассматриваемых в совокупности, эквивалентна исходной интервальной задаче (4). Таким образом, для получения решения интервальной задачи (4) надо решить ее нижнюю (15) и верхнюю (16) граничные задачи, выделив соответствующие два множества точек решений, а затем взять какую-нибудь одну точку из пересечения этих множеств, которая и будет точкой решения интервальной задачи (4). В общем случае решения нижней (15) и верхней (16) граничных задач имеют вид $\{M_{\text{н}}(x),F_{1,\max}\}$, $\{M_{\text{в}}(x),F_{2,\max}\}$, где $M_{\text{н}}(x)$, $M_{\text{в}}(x)$ – множества точек решений $x=(x_1,...,x_n)$ нижней и верхней граничной задачи, $F_{1,\max}$, $F_{2,\max}$ – максимальные значения целевых функций этих задач. Так что решение $x^*,\widetilde{F}_{\max}$ интервальной задачи (4) составляется из решений ее нижней (15) и верхней (16) граничных задач в виде

$$\{x^*\in M_{\text{н}}(x)\cap M_{\text{в}}(x),\ \widetilde{F}_{\max}=[F_{1,\max},F_{2,\max}]\}. \quad (17)$$

В качестве точки решения x^* в выражении (17) берется любая точка из пересечения множеств точек решения нижней (15) и верхней (16) граничных задач, а в качестве максимального значения целевой функции $\widetilde{F}_{\max}$ – интервал от максимального значения целевой функции нижней граничной задачи $F_{1,\max}$ до максимального значения целевой функции верхней задачи $F_{2,\max}$. Изложенные в данном разделе результаты можно суммировать в виде теоремы.

Теорема 5. Множество точек решения $x=(x_1,...,x_n)$ интервальной задачи условной оптимизации (4) равно пересечению множеств точек решения ее нижней (15) и верхней (16) граничных задач. Максимальное значение целевой функции задачи 4 равно интервалу, нижняя граница которого равна максимальному значению целевой функции нижней граничной задачи, а верхняя граница – максимальному значению целевой функции верхней граничной задачи.

Из теоремы 5 вытекает нижеследующая

Теорема 6. Для того чтобы интервальная задача условной оптимизации (4) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы пересечение множеств точек решения ее нижней (15) и верхней (16) граничных задач было непусто.

Основное преимущество нашего подхода к решению интервальной задачи условной оптимизации заключается в возможности использования для этого традиционных, хорошо разработанных методов решения детерминированных задач условной оптимизации. Основанный на этом подходе метод решения интервальной задачи условной оптимизации естественно назвать методом детерминизации, поскольку он сводит решение недетерминированной задачи (4) к решению двух детерминированных задач (15) и (16).

4 РЕЗУЛЬТАТЫ

Из изложенного в п. 3 следует, что для решения интервальной задачи условной оптимизации (4) методом детерминизации необходимо действовать по следующему алгоритму.

Шаг 1. Используя формулы интервальной математики, выражающие результаты элементарных преобразований интервалов [18]

$$[a_1,a_2]+[b_1,b_2]=[a_1+b_1,a_2+b_2];$$
$$[a_1,a_2]-[b_1,b_2]=[a_1-b_2,a_2-b_1];$$
$$k[a_1,a_2]=\begin{cases}[ka_1,ka_2], & k>0,\\ [ka_2,ka_1], & k<0;\end{cases} \quad [a_1,a_2]\cdot[b_1,b_2]=[\min_{i,j}(a_i\cdot b_j),\max_{i,j}(a_i\cdot b_j)];$$
$$[a_1,a_2]/[b_1,b_2]=[a_1,a_2]\cdot[1/b_2,1/b_1], \tag{18}$$

представляем целевую функцию $\widetilde{F}$ и функции ограничений $\widetilde{\Phi}_i$ задачи (4) в интервальной форме. Так же представляем параметры b_i в ограничениях. Полученные выражения имеют вид (11).

Шаг 2. Используя интервальные представления целевой функции, функции ограничений и параметров, полученные на шаге 1, формируем нижнюю (15) и верхнюю (16) граничные задачи интервальной задачи условной оптимизации (4).

Шаг 3. Используя подходящие методы решения детерминированных задач условной оптимизации, получаем решения нижней $\{M_н(x),F_{1,\max}\}$ и верхней $\{M_в(x),F_{2,\max}\}$ граничных задач. Здесь $M_н(x)$ – множество точек решения $x=(x_1,...,x_n)$ нижней граничной задачи, в которых ее целевая функция F_1 достигает максимума $F_{1,\max}$, а $M_в(x)$ – множество точек решения $x=(x_1,...,x_n)$ верхней граничной задачи, в которых целевая функция F_2 достигает $F_{2,\max}$.

Шаг 4. Выбирая в качестве точки решения задачи (4) любую точку x^* из пересечения множеств $M_н(x)$ и $M_в(x)$ и беря в качестве нижней границы максимума $\widetilde{F}_{\max}$ интервальной целевой функции $\widetilde{F}$ задачи (4) максимум $F_{1,\max}$ целевой функции нижней граничной задачи, а в качестве верхней границы $\widetilde{F}_{\max}$ интервальной целевой функции $\widetilde{F}$ задачи (4) – максимум $F_{2,\max}$ целевой функции верхней граничной задачи, получаем все решение задачи (4) в виде (17).

Изложенный алгоритм, как видно из приведенного выше его описания, дает решение интервальной задачи условной оптимизации (4) во всех случаях, когда пересечение множеств точек решения ее нижней и верхней граничных задач непусто. Но из теоремы 6 следует, что указанное пересечение непусто только тогда, когда интервальная задача условной оптимизации (4) имеет решение. Таким образом, предложенный алгоритм дает решение интервальной задачи условной оптимизации (4) во всех случаях, когда это решение существует.

Пример (интервальная задача о назначениях). Есть 3 работы и 3 исполнителя – кандидата на работы. Заданы издержки $\widetilde{a}_{ij}=[a_{1,ij},a_{2,ij}]$ выполнения j-й работы i-м исполнителем $(i,j=\overline{1,3})$, представляющие собой интервальные величины и составляющие интервальную матрицу издержек $\widetilde{A}=\|\widetilde{a}_{ij}\|=\|[a_{1,ij},a_{2,ij}]\|=[A_1,A_2]$, где $A_1=\|a_{1,ij}\|$ и $A_2=\|a_{2,ij}\|$ есть нижняя и верхняя граничные матрицы издержек. Надо распределить работы так, чтобы каждый исполнитель был занят выполнением ровно одной работы, а суммарные издержки на все работы были минимальны.

Введем множество неизвестных булевых матриц назначений $X=\|x_{ij}\|, x_{ij}\in\{0,1\}$, где $x_{ij}=1$, если i-й исполнитель выполняет j-ю работу, и $x_{ij}=0$ в противном случае. Тогда имеем

$$\widetilde{F}(x_{ij})\equiv\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\widetilde{a}_{ij}x_{ij}=\min,$$

$$\text{при}\quad \Phi_1(x_{ij})\equiv\sum_{i=1}^{3}x_{ij}=1,\quad j=\overline{1,3},$$

$$\Phi_2(x_{ij})\equiv\sum_{j=1}^{3}x_{ij}=1,\quad i=\overline{1,3}.$$

Эта задача представляет собой частный случай общей интервальной задачи (4). Поэтому для ее решения мы можем применить 4-шаговый алгоритм, описанный выше.

Шаг 1. С помощью формул (18) представляем целевую функцию $\widetilde{F}$ нашей оптимизационной задачи в интервальной форме

$$\widetilde{F}(x_{ij})\equiv\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{1,ij}x_{ij},\ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{2,ij}x_{ij}\right].$$

Представлять в интервальной форме функции $\widetilde{\Phi}_1(x_{ij}), \widetilde{\Phi}_2(x_{ij})$ ограничений задачи, равно как и параметры в их правых частях не нужно, т. к. здесь нет интервальных параметров.

Шаг 2. Используя полученные на шаге 1 представления, формируем нижнюю F_1 и верхнюю F_2 граничные задачи решаемой интервальной задачи

$$F_1(x_{ij}) \equiv \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{1,ij}x_{ij} = \min,$$

$$\text{при} \quad \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,3},\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,3},$$

$$F_2(x_{ij}) \equiv \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{2,ij}x_{ij} = \min,$$

$$\text{при} \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,3},\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,3}.$$

Шаг 3. Решаем нижнюю и верхнюю граничные задачи интервальной задачи, полученные только что на шаге 2 алгоритма. Для определенности принимаем следующее конкретное значение интервальной матрицы издержек

$$\widetilde{A} = [A_1, A_2],$$

$$\text{где } A_1 = \|a_{1,ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \|a_{2,ij}\| = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Имеется всего шесть различных значений матриц неизвестных $X = \|x_{ij}\|$, удовлетворяющих ограничениям решаемой задачи. Поэтому в данном случае решение легко находится перебором на множестве этих матриц. В результате получаем решение нижней граничной задачи в виде $\{M_{\text{н}}(x), F_{1,\min}\}$, где множество решений $M_{\text{н}}$

$$M_{\text{н}}(x) = \left\{ X_{1a} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, X_{1b} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, X_{1c} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, X_{1d} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \right\},$$

а достигнутое минимальное значение целевой функции $F_{1,\min} = 5$. Далее, совершенно аналогично получаем решение верхней граничной задачи $\{M_{\text{в}}(x), F_{2,\min}\}$. Именно, множество решений

$$M_{\text{в}}(x) = \left\{ X_{2a} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad X_{2b} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \right\},$$

а соответствующее достигнутое минимальное значение целевой функции верхней граничной задачи для исходной задачи составляет $F_{2,\min} = 9$.

Шаг 4. Находим пересечение множеств решений нижней граничной $M_{\text{н}}(x)$ и верхней граничной $M_{\text{в}}(x)$ задач. Оно состоит из одной матрицы назначений

$$X^* = X_{1b} = X_{2a} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

которая и есть решение всей задачи. Достигнутый на этом решении минимум заданной интервальной целевой функции составляет $\widetilde{F}_{\min} = [F_{1,\min}, F_{2,\min}] = [5, 9]$.

Оптимальное решение поставленной задачи о назначении 3 исполнителей на 3 работы таково: 1-й исполнитель назначается на 1 работу, 2-й – на 3 работу, а 3-й – на 2 работу. При этом издержки оцениваются минимальным интервалом возможных значений, равным [5, 9].

Другие примеры решения оптимизационных задач с интервальными параметрами с использованием изложенного алгоритма даны в [7–9, 15, 19].

5 ОБСУЖДЕНИЕ

Как уже говорилось во введении, проблема оптимизации неполностью определенных функций, по сравнению с традиционной оптимизацией полностью определенных функций, требует дополнительно 1) обобщения понятия экстремума функции; 2) выяснения условий существования экстремума функций, связанных с ее неполной определенностью; 3) разработки специальных методов поиска экстремума таких функций. Именно по этой схеме разработан предлагаемый в статье детерминизационный подход к оптимизации. Конкретно, обобщение понятия экстремума функции на случай неполностью определенных (интервальных) функций дано в п. 3 (формулы (5)). Далее, условия существования (несуществования) экстремума интервальной функции даны в теоремах 1–4 того же п. 3. И, наконец, в п. 3 разработан специальный метод поиска экстремума интервальной функции. Необходимость проведения всей этой работы представляется очевидной. Действительно, оптимизация полностью определенных функций основана на сравнении точно определенных вещественных чисел, с выделением большего и меньшего из них, причем на числовой оси большее число сдвинуто вправо относительно меньшего. Однако для оптимизации неполностью определенных функций такой подход не работает, поскольку неточно определенные числа (например, интервальные), в отличие от точно определенных вещественных чисел, в общем случае не находятся в отношении «сдвинуто вправо (влево) на вещественной оси» и потому не могут сравниваться непосредственно, с выделением большего и меньшего. Вследствие этого для таких функций и приходится обобщать понятие экстремума. Далее, неполнота информации, которой характеризуются неполностью определенные числа и функции, при достижении некоторого достаточно высокого уровня может привести к несравнимости таких чисел и невозможности выделить из них большее и меньшее и, как следствие, – к отсутствию экстремума таких функций. В связи с этим и возникает необходимость нахождения условий существования экстремума неполностью определенных функций. Наконец, вследствие иного, более общего, чем для полностью определенных функций, понятия экстремума неполностью определенной функции и возможности несуществования этого экстремума, вызванной неполнотой информации, приходится разрабатывать специальные методы отыскания экстремума таких функций. Важно понимать, что невозможность в определенных случаях найти экстремум неполностью определенной функции с помощью любого адекватного, в частности, предложенного в статье, алгоритма не связана с качеством алгоритма, а является следствием объективной реальности, а именно, отсутствия в указанных случаях экстремума вследствие недостатка информации о функции.

В тех же случаях, когда информация о функции достаточна и потому ее экстремум существует, предложенный алгоритм позволяет найти этот экстремум (см. п. 4). Требовать от алгоритма большего, очевидно, нельзя.

Охарактеризуем теперь другие существующие подходы к оптимизации неполностью определенных функций. Кратко об основных достоинствах и недостатках этих подходов уже говорилось во введении. Рассмотрим вопрос подробнее. Начнем с детерминированного подхода. При этом подходе исходная задача оптимизации неполностью определенной функции фактически заменяется другой задачей – оптимизации полностью определенной функции. Причем конструирование этой новой задачи путем выбора определенных значений параметров внутри областей неопределенности параметров функции исходной задачи производится на основе чисто эвристических соображений и не опирается ни на какие математически ясные обобщения понятия экстремума на случай неполностью определенных функций. Вследствие этого новая задача оказывается, как правило, математически неэквивалентной исходной задаче, а интерпретация ее решения в терминах исходной задачи – проблематичной. Кроме того, из-за сложности некоторых критериев оптимизации, используемых в новой задаче $(\max\min, \min\max)$, трудоемкость алгоритмов поиска экстремума неполностью определенных функций при детерминированном подходе может оказаться высокой. Зато при этом подходе обычно не возникает проблемы выяснения условий существования экстремума функций, т.к. полностью определенные функции практически всегда имеют экстремум.

Теперь о вероятностном подходе. При первом варианте данного подхода исходная задача оптимизации неполностью определенной функции заменяется, как и в случае детерминированного подхода, другой задачей – оптимизации полностью определенной функции, которая теперь получается из исходной функции путем замены ее случайных параметров их математическими ожиданиями (центрами). Сразу ясно, что эта новая задача неэквивалентна исходной задаче в еще большей степени, чем при детерминированном подходе, поскольку она, не опираясь ни на какие обобщения понятия экстремума для неполностью определенных функций, не учитывает не только неопределенность возможных значений параметров указанной функции, но и случайный характер реализации конкретных значений параметров функции на практике. Во втором варианте вероятностного подхода исходная задача оптимизации неполностью определенной функции с интервальными параметрами заменяется задачей оптимизации неполностью определенной функции со случайными параметрами. Последние получаются из интервальных параметров исходной задачи принятием гипотезы о равномерном распределении значений параметров внутри своих интервалов. Принятие указанной гипотезы сразу упрощает выбор экстремального интервала. Так, для выбора большего из двух интервалов $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ достаточно лишь вычислить вероятности $P(\widetilde{a} > \widetilde{b})$ и $P(\widetilde{b} > \widetilde{a})$ и взять тот интервал, для которого вероятность превышения им второго интервала больше. Этот подход гарантирует существование решения, полученного с помощью гипотезы модельной задачи оптимизации функции со случайными параметрами. Но беда заключается в том, что модельная задача неэквивалентна исходной задаче оптимизации функции с интервальными параметрами, так как одно лишь задание неопределенности функции в форме интервалов возможных значений ее параметров не предполагает задания какой-то дополнительной информации, например, в виде вероятностных распределений внутри интервалов. Все, что ранее было сказано о вероятностном подходе, можно повторить для нечеткого подхода, с заменой термина «вероятностное распределение параметров неполностью определенной функции» термином «нечеткое распределение параметров».

На практике для решения разнообразных задач оптимизации неполностью определенных функций, в зависимости от условий, могут применяться различные подходы. В общем случае рекомендуется начинать с детерминизационного подхода, поскольку он базируется на точном определении понятия максимума и минимума неопределенного числа (интервала), что упрощает интерпретацию полученного решения и делает его более прозрачным. Если детерминизационный подход не приводит к решению, вследствие недостаточной информации об оптимизируемой функции, целесообразно эту информацию пополнить путем сужения интервалов возможных значений параметров этой функции с помощью дополнительных измерений, наблюдений, привлечения более квалифицированных экспертов, после чего снова применить данный подход. Если и это не помогло получить решение, рекомендуется перейти к использованию остальных подходов. В первую очередь, целесообразно попытаться применить вероятностный подход, который достаточно прост в реализации. При этом надо иметь в виду, что используемые в этом подходе вероятностные распределения параметров оптимизируемой неполностью определенной функции должны быть известны с достаточной точностью, так как в противном случае найденное предположительно оптимальное значение функции может оказаться далеким от настоящего оптимума. Надо еще учитывать, что при вероятностном подходе получение оптимума функции вообще строго не гарантируется, а лишь «обещается» с определенной вероятностью, притом не обязательно близкой к единице, что не всегда приемлемо. Поэтому на практике часто применяют детерминированный подход к оптимизации неполностью определенных функций. Этот подход, в отличие от детерминизационного подхода, всегда обеспечивает существование оптимума неполностью определенной функции, и, в отличие от вероятностного подхода, гарантирует получение этого оптимума. К сожалению, при этом подходе, как уже говорилось ранее, вследствие преобразования исходной неполностью определенной функции в полностью определенную (детерминированную) новая задача оптимизации оказывается неэквивалентна исходной, а интерпретация ее решения в терминах исходной задачи проблематичной. Например, выбор минимального из двух интервалов $\widetilde{a} = [4,5]$, $\widetilde{b} = [3,15]$ с помощью детерминированного подхода по критерию оптимальности «нижняя граница интервала минимальна» дает решение $\min(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = \widetilde{b} = [3,15]$. Однако это решение невозможно интерпретировать практически, поскольку оно противоречит эвристическим представлениям о проблеме. Так, любой автомобилист уверенно предпочтет как более экономную машину с расходом топлива от 4 до 5 л на 100 км машине с расходом топлива от 3 до 15 л!

6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье показано, что проблема оптимизации неполностью определенных функций достаточно просто разрешима, если указанную неопределенность задавать в интервальной форме и использовать при этом конструктивную теорию сравнения величин интервалов, сводящую это сравнение к сравнению одноименных границ интервалов. Тем самым задача нахождения оптимума неполностью определенной функции сводится к более простой задаче отыскания одноименного оптимума двух полностью определенных (детерминированных) функций. Наш подход (его естественно назвать детерминизацией) примечателен тем, что позволяет вполне строго свести оптимизацию неполностью определенных функций к хорошо известным и эффективным методам оптимизации полностью определенных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдин Д. Б. Задачи и методы линейного программирования / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольдштейн. – М. : Советское радио, 1964. – 735 с.
2. Вентцель Е. С. Введение в исследование операций / Е. С. Вентцель. – М. : Советское радио, 1964. – 390 с.
3. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума / Д. Дж. Уайлд. – М. : Наука, 1967. – 268 с.
4. Корбут А. А. Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. – М. : Наука, 1969. – 280 с.
5. Моисеев Н. Н. Методы оптимизации / Н. Н. Моисеев, Ю. П. Иванилов, Е. М. Столярова. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
6. Левин В. И. Структурно-логические методы исследования сложных систем с применением ЭВМ / В. И. Левин. – М. : Наука, 1987. – 304 с.
7. Левин В. И. Моделирование задач оптимизации в условиях интервальной неопределенности / В. И. Левин // Известия Пензенского гос. пед. ун-та. Серия «Физико-математические и технические науки». – 2011. – № 26. – С. 589–595.
8. Левин В. И. Оптимизация в условиях интервальной неопределенности. Метод детерминизации / В. И. Левин // Автоматика и вычислительная техника. – 2012. – № 4. – С. 157–163.
9. Левин В.И. Методы оптимизации систем в условиях интервальной неопределенности параметров / В. И. Левин // Информационные технологии. – 2012. – № 4. – С. 52–59.
10. Левин В. И. Оптимальное проектирование в условиях неопределенности. Метод детерминизации / В. И. Левин // Онтология проектирования. – 2013. – № 3 (9). – С. 41–52.
11. Левин В. И. Методология оптимизации в условиях неопределенности методом детерминизации / В. И. Левин // Информационные технологии. – 2014. – № 5. – С. 14–21.
12. Левин В. И. Оптимизация в условиях неопределенности / В. И. Левин // Вестник Тамбовского ун-та. Серия «Естественные и технические науки». – 2014. – Т. 19. Вып. 3. – С. 844–851.
13. Первозванский А. А. Математические модели в управлении производством / А. А. Первозванский. – М. : Наука, 1975. – 616 с.
14. Libura M. Integer Programming Problems with Inexact Objective Function / M. Libura // Control and Cybernetics. – 1980. – Vol. 9, № 4. – P. 189–202.
15. Тимохин С. Г. О задачах линейного программирования в условиях неточных данных / С. Г. Тимохин, А. В. Шапкин, // Экономика и математические методы. – 1981. – Т. 17, № 5. – С. 955–963.
16. Рощин В.А. Вопросы решения и исследования одного класса задач неточного целочисленного программирования / В. А. Рощин, Н. В. Семенова, И. В. Сергиенко // Кибернетика. – 1989. – № 2. – С. 42–46.
17. Семенова Н. В. Решение одной задачи обобщенного целочисленного программирования / Н. В. Семенова // Кибернетика. – 1984. – № 5. – С. 25–31.
18. Вощинин А.П. Оптимизация в условиях неопределенности / А. П. Вощинин, Г. Р. Сотиров. – М. : Изд-во МЭИ, 1989. – 224 с.
19. Ащепков Л.Т. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления / Л. Т. Ащепков, Д. В. Давыдов. – М. : Наука, 2006. – 285 с.
20. Давыдов Д. В. Интервальные методы и модели принятия решений в экономике. Диссерт. докт. экон. наук / Д. В. Давыдов. Дальневосточный гос. ун-т. – Владивосток, 2009. – 343 с.
21. Островский Г. М. Технические системы в условиях неопределенности. Анализ гибкости и оптимизация / Г. М. Островский, Ю. М. Волин. – М. Бином, 2008. – 325 с.
22. Островский Г. М. Оптимизация технических систем / Г. М. Островский, Н. Н. Зиятдинов, Т. В. Лаптева. – М. : Кнорус. 2012. – 252 с.
23. Левин В. И. Дискретная оптимизация в условиях интервальной неопределенности / В. И. Левин // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 7. – С. 97–106.
24. Левин В. И. Булево линейное программирование с интервальными коэффициентами / // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 7. – С. 111–122.
25. Левин В. И. Интервальное дискретное программирование / В. И. Левин // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 6. – С. 92–103.
26. Левин В.И. Оптимизация расписаний в системах с неопределенными временами обработки. I, II / В. И. Левин // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 2. – С. 99–110; № 3. – С. 106–116.
27. Левин В. И. Задача трех станков с неопределенными временами обработки // Автоматика и телемеханика / В. И. Левин. – 1996. – № 1. – С. 109–120.
28. Левин В. И. Интервальная модель общей задачи линейного программирования. Однородный случай / В. И. Левин // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. – 1998. – Т. 3. – № 4. – С. 401–407.

Статья поступила в редакцию 23.09.2015.
После доработки 16.07.2015

Левін В. І.
Д-р техн. наук, професор кафедри математики Пензенського державного технологічного університету, Пенза, Росія

ОПТИМІЗАЦІЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ МЕТОДОМ ДЕТЕРМІНІЗАЦІЇ

У статті розглянуті існуючі підходи до оптимізації (оптимального проектування) систем в умовах невизначеності. Дана точна завдання умовної оптимізації при інтервальної невизначеності параметрів цільової функції і обмежень. У зв’язку з цим викладені математична теорія порівняння інтервалів, що включає точне визначення максимального і мінімального інтервалів, умови існування таких інтервалів і алгоритми їх відшукання. Запропонована ідея рішення задачі умовної оптимізації при інтервальної невизначеності її параметрів. Ця ідея заснована на правилах математичної теорії порівняння інтервалів, що дозволяють замінити порівняння інтервалів і виділення максимального і мінімального інтервалу порівнянням їх нижніх і верхніх меж. На базі запропонованої ідеї сформульований і обгрунтований метод детермінізації, що дозволяє вирішити задачу умовної оптимізації при інтервальної невизначеності параметрів шляхом її зведення до двом повністю певним завданням оптимізації того ж типу. Сформульована і доведена теорема, визначальна рішення задачі умовної оптимізації в умовах інтервальної невизначеності параметрів через рішення двох зазначених повністю певних завдань оптимізації. Також сформульована і доведена теорема, визначальна необхідна і достатня умова існування розв’язку задачі умовної оптимізації при інтервальної невизначеності. Побудований четирехшаговий алгоритм вирішення задачі умовної оптимізації при інтервальної невизначеності параметрів, який реалізує метод детермінізації. Наведено приклад роботи алгоритму; в якості розв'язуваної задачі обрана інтервальна задача про призначення. Проведено порівняння викладеного підходу до вирішення задач умовної оптимізації з неповністю визначеними параметрами з іншими методами вирішення таких завдань (детермінований, імовірнісний і нечіткий). Вказані достоїнства і недоліки різних методів. Підкреслено, що запропонований підхід дозволяє зводити оптимізацію неповністю певних функцій до оптимізації повністю певних функцій строго математично, а не евристично, як це робиться в інших відомих підходах.

Ключові слова: оптимізація, невизначеність, оптимізація при інтервальної невизначеності, метод детермінізації.

Levin V. I.
Dr Sc., Professor of Mathematical Department of Penza State Technological University, Penza, Russia

THE OPTIMIZATION IN CONDITION OF UNCERTAINTY BY DETERMINATION METHOD

The existing approaches to the optimization (optimal design) of systems under uncertainty are considered. An exact formulation of problem of constrained optimization under interval uncertainty of the parameters of the objective function and constraints is given. In this connection the mathematical theory of comparison of intervals is set out, including a precise definition of the maximal and minimal intervals, conditions for existence of such intervals and algorithms for finding them. Idea of solving constrained optimization problems under interval uncertainty of its parameters is proposed. This idea is based on the rules of the mathematical theory of comparison of intervals which allows replace the comparison of intervals and determination of maximal and minimal interval by comparing their lower and upper bounds. On basis of the proposed idea the determination method which allows solve the problem of constrained optimization under interval uncertainty parameters by reducing it to two entirely certain optimization problems of the same type is formulated and proved. We formulate and prove a theorem that defines the solution of the problem of constrained optimization under interval uncertainty of parameters through solutions of two fully certain optimization problems. Also the theorem that defines the necessary and sufficient condition for existence of a solution of constraint optimization under interval uncertainty is formulated and proved. The algorithm of solving constrained optimization under interval uncertainty parameters that implements a method of determination is constructed and consists of 4 steps. The example of the algorithm is given. The interval assignment task is selected as a problem to be solved is selected. A comparison of our approach to solving constrained optimization problems with incompletely defined parameters with other methods for solving such problems (deterministic, probabilistic and fuzzy) is done. Advantages and disadvantages of different methods are listed. It is emphasized that the proposed in the article approach allows us to reduce the optimization of incompletely specified functions to fully optimize certain functions strictly mathematically rather than heuristically, as is done in well-known approaches.

Keywords: optimization, uncertainty, optimization with interval uncertainty, determination.

REFERENCES

1. Judin D. B., Goldshtein E.G. Zadachi i metody lineinogo programmirovaniya. Moscow, Sovetskoe radio, 1964, 735 p.
2. Ventcel' E. S. Vvedenie v issledovanie operaciy. Moscow, Sovetskoe radio, 1964, 390 p.
3. Wilde D.J. Metody poiska extremuma. Moscow, Nauka, 1967, 268 p.
4. Korbut A. A., Finkelshtein Yu. Yu. Diskretnoe programmirovanie. Moscow, Nauka, 1969, 280 p.
5. Moiseev N. N., Ivanilov Yu. P., Stolyarova E. M. Metody optimizacii. Moscow, Nauka, 1978, 352 p.
6. Levin V. I. Strukturno-logicheskie metody issledovaniya slozhnyh sistem s primeneniem EVM. Moscow, Nauka, 1987, 304 p.
7. Levin V. I. Modelirovanie zadach optimizacii v usloviyah intervalnoy neopredelennosti, *Izvestiya Penzenskogo gos. ped. un-ta. Seriya «Fiziko-matematicheskie i tehnicheskie nauki»*, 2011, No. 26, pp. 589–595.
8. Levin V. I. Optimizaciya v usloviyah intervalnoy neopredelennsti. Metod determinizacii // *Avtomatika i vyhchislitelnaya tehnika*, 2012, No. 4, pp. 157–163.
9. Levin V. I. Metody optimizacii sistem v usloviyah intervalnoy neopredelennosti parametrov, *Informacionnye tehnologii*, 2012, No. 4, pp. 52–59.
10. Levin V. I. Optimalnoe proektirovanie v usloviyah neopredelennosti. Metod determinizacii, *Ontologiya proektirovaniya*, 2013, No. 3 (9), pp. 41–52.
11. Levin V.I. Metodologiya optimizacii v usloviyah neopredelennosti metodom determinizacii, Informacionnye tehnologii, 2014, No. 5, pp. 14–21.
12. Levin V. I. Optimizaciya v usloviyah neopredelennosti, *Vestnik Tambovskogo Universiteta. Estestvennye i tehnicheskie nauki*, 2014, Vol. 19, No. 3, pp. 844–851.
13. Pervozvanskiy A. A. Matematicheskie modeli v upravlenii proizvodstvom. Moscow, Nauka, 1975, 616 p.
14. Libura M. Integer Programming Problems with Inexact Objective Function, *Control and Cybernetics*, 1980, Vol. 9, No. 4, pp. 189–202.
15. Timohin S. G., Shapkin A. V. O zadachah lineinogo programmirovaniya v usloviyah netochnyh dannyh, Ekonomika i matematicheskie metody, 1981, No. 5, Vol. 17, pp. 955–963.
16. Roschin V. A., Semenova N. V., Sergienko I. V. Voprosy resheniya i issledovaniya odnogo klassa zadach netochnogo celochislennogo programmirovaniya, *Kibernetika,* 1989, No. 2, pp. 42–46.
17. Semenova N. V. Reshenie odnoj zadachi obobshhennogo celochislennogo programmirova-niya, *Kibernetika*, 1984, No. 5, pp. 25–31.
18. Voshhinin A. P., Sotirov G. R. Optimizaciya v usloviyah neopredelennosti. Moscow, Izd-vo MEI, 1989, 224 p.
19. Ashhepkov L. T., Davydov D. V. Universalnye reshenija intervalnyh zadach optimizacii i upravleniya. Moscow, Nauka, 2006, 285 p.
20. Davydov D. V. Intervalnye metody i modeli prinjatiya resheniy v ekonomike. Dissert. dokt. ekon. nauk. Vladivostok, Dalnevostochniy gos. un-t., 2009, 343 p.
21. Ostrovskiy G. M., Volin Yu. M. Tehnicheskie sistemy v usloviyah neopredelennosti. Analiz gibkosti i optimizaciya. Moscow, Binom, 2008, 325 p.
22. Ostrovskiy G. M., Ziyatdinov N. N., Lapteva T. V. Optimizaciya tehnicheskih sistem. Moscow, Knorus, 2012, 252 p.
23. Levin V. I. Diskretnaya optimizaciya v uslovijah intervalnoy neopredelennosti, *Avtomatika i telemehanika*, 1992, No. 7, pp. 97–106.
24. Levin V. I. Bulevo lineinoe programmirovanie s intervalnymi koefficientami, *Avtomatika i telemehanika*, 1994, No. 7, pp. 111–122.
25. Levin V. I. Intervalnoe diskretnoe programmirovanie, *Kibernetika i sistemnyj analiz*, 1994, No. 6, pp. 92–103.
26. Levin V. I. Optimizaciya raspisaniy v sistemah s neopredelennymi vremenami obrabotki. I, II, *Avtomatika i telemehanika*, 1995, No. 2, pp. 99–110; No. 3, pp. 106–116.
27. Levin V. I. Zadacha treh stankov s neopredelennymi vremenami obrabotki, *Avtomatika i telemehanika*, 1996, No. 1, pp. 109–120.
28. Levin V. I. Intervalnaya model obschey zadachi lineinogo programmirovaniya. Odnorodniy sluchai, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Estestvennye i tehnicheskie nauki*, 1998. Vol. 3, No. 4, pp. 401–407.