

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING

УДК 519.213.7, 519.237.7

Шергин В. Л.

Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры искусственного интеллекта, Харьковский национальный университет радиозлектроники, Харьков, Украина

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ САМОПОДОБИЯ, УСТОЙЧИВОСТИ И ДОЛГОСРОЧНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПРИРАЩЕНИЙ ФРАКТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЛЕВИ

Рассмотрена задача поиска соотношений между параметрами самоподобия, устойчивости и долгосрочной зависимости приращений фрактального движения Леви. В качестве меры взаимосвязи приращений предложено использовать показатели, построенные с помощью модели симметричного перемешивания скрытых факторов, что позволило решить проблему неприменимости корреляционного метода оценки таких приращений, вызванную отсутствием моментов распределения. Получена зависимость показателя взаимосвязи соседних приращений от индексов устойчивости и самоподобия. Эта зависимость имеет вид алгебраического уравнения, которое хоть в общем случае и не имеет явного решения, но легко решается численно. Предложена математическая модель, позволяющая построить аналог дискретной автокорреляционной функции для фрактального движения Леви. Эта модель имеет вид системы алгебраических уравнений. В работе показано, что все аналогичные зависимости, известные для частных случаев процесса фрактального движения Леви, являются соответствующими частными случаями моделей, полученных в работе. Наличие предложенных моделей позволяет определить любой из трех показателей (самоподобия, устойчивости и долгосрочной зависимости приращений) по двум известным, что существенно упростит моделирование и исследование случайных процессов, имеющих вид фрактального движения Леви.

Ключевые слова: фрактальное движение Леви, самоподобие, долгосрочная зависимость, устойчивые распределения, показатели взаимосвязи.

НОМЕНКЛАТУРА

BM – броуновское движение (Brownian motion);
FBM – фрактальное броуновское движение (fractal Brownian motion);
FLM – фрактальное движение Леви (fractal Levý motion);
LP – процесс Леви (Levý process);
LRD – долгосрочная зависимость приращений (long-range dependency);
SaS – симметричное альфа-устойчивое (symmetric alpha-stable) распределение;
SLP – устойчивый процесс Леви (stable Levý process);
АКФП – автокорреляционная функция приращений;
НОР – независимые одинаково распределенные;
СПСФ – симметричное перемешивание скрытых факторов;
 $Corr\{x, y\}$ – коэффициент корреляции случайных величин x, y ;
 $g(x; \alpha, \gamma)$ – плотность распределения случайной величины, следующей $S\alpha S$ -закону;

H – показатель Херста;
 L_α – метрика пространства (по Минковскому);
 \mathbf{G} – диагональная матрица, задающая масштаб наблюдаемых случайных величин;
 \mathbf{P} – положительно определенная бисимметричная матрица параметров модели характеристической функции;
 r_1 – коэффициент взаимосвязи двух соседних приращений $r_1(\alpha, H)$;
 r_n – коэффициент взаимосвязи приращений, отстоящих на n шагов $r_n(\alpha, H)$;
 r_{jk} – показатель взаимосвязи j -й и k -й случайных величин;
 $\mathbf{u} \in R^n$ – скрытые факторы модели СПСФ (в двумерном случае $\mathbf{u} = (u, v)^T$);
 $\mathbf{x} \in R^n$ – наблюдаемые случайные величины;
 $X_{k\tau}$ – наблюдаемые значения (одномерного) случайного процесса;
 α – показатель (индекс) устойчивости ($0 < \alpha \leq 2$);

γ – параметр масштаба устойчивого распределения ($\gamma > 0$);

$\Delta X_{k\tau}$ – приращения случайного процесса $X_{k\tau}$ на шаге k ;

θ – углы поворота косоугольной системы координат скрытых факторов относительно прямоугольной декартовой системы;

$\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины, следующей $S\alpha S$ -закону;

$\varphi(\mathbf{t})$ – характеристическая функция совместного распределения многомерной $S\alpha S$ -величины;

$\psi(\mathbf{t}_1)$ – характеристическая функция совместного распределения скрытых факторов.

ВВЕДЕНИЕ

Самоподобие является свойством, присущим широкому кругу процессов и явлений естественнонаучного, техногенного, информационного, экономического характера. Если при этом изучаемые процессы или явления подвержены фактору случайности, то говорят о статистическом самоподобии, то есть об инвариантности статистических характеристик случайных процессов относительно аффинных преобразований шкал измерения. Исследование свойств самоподобных случайных процессов представляет интерес как в теоретическом плане, так и с точки зрения практического применения.

Стохастический процесс X_t , $t \geq 0$ называется самоподобным [1], если для любого вещественного значения $a > 0$ конечномерные распределения для X_{at} идентичны конечномерным распределениям величины $a^H X_t$:

$$\text{Law}\{X_{at}\} = \text{Law}\{a^H X_t\}. \quad (1)$$

Параметр H , называемый показателем Херста, представляет собой меру самоподобия стохастического процесса.

Другими важными свойствами, также присущими многим процессам и явлениям, являются «тяжелые хвосты» распределений и долгосрочная зависимость приращений (LRD) исследуемых процессов.

Объектом исследований настоящей работы является случайный процесс, обладающий всеми тремя перечисленными свойствами и носящий название фрактального движения Леви (FLM). Предметом исследования являются количественные соотношения между параметрами самоподобия, устойчивости и долгосрочной зависимости приращений FLM.

Свойства самоподобия, устойчивости и долгосрочной зависимости приращений взаимосвязаны между собой, в то же время вид этой зависимости в общем случае неизвестен. Что и обуславливает актуальность настоящей работы, целью которой как раз и является установление количественных соотношений между параметрами, характеризующими указанные свойства исследуемого процесса.

Для достижения поставленной цели необходимо в первую очередь описать исследуемые свойства количественно, т.е. параметризовать их. После этого следует составить математическую модель, связывающую эти параметры, и, в-третьих, построить и проанализировать

зависимость между исследуемыми параметрами, протекающую из найденной математической модели.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основная сложность в решении поставленной проблемы, на взгляд автора, состоит в том, что свойство долгосрочной зависимости приращений случайных процессов принято описывать с помощью автокорреляционной функции самого случайного процесса, или его приращений. В то же время, альфа-устойчивые случайные величины (при $\alpha \neq 2$) не обладают моментами второго порядка, а значит, такой подход в этом случае неприменим.

Таким образом, первой подзадачей, решаемой в настоящей работе, является выбор показателей, пригодных для описания явления взаимосвязи величин, следующих устойчивому распределению. Такие показатели, очевидно, должны быть инвариантны к наличию или отсутствию моментов распределения и в то же время, для частного (гауссовского) случая $\alpha = 2$ должны совпадать с соответствующими показателями взаимосвязи гауссовских случайных величин.

Второй подзадачей, решаемой в данной работе, является построение математических моделей, связывающих показатели устойчивости (α), самоподобия (H) и коэффициенты взаимосвязи двух соседних (r_1), или отстоящих на n шагов (r_n) приращений FLM. Очевидно, что зависимости $r_1(\alpha, H)$, $r_n(\alpha, H)$, следующие из предлагаемых общих моделей, должны совпадать с аналогичными зависимостями в тех частных случаях FLM, для которых они уже известны.

Получение этих зависимостей, их визуализация и анализ свойств являются третьей подзадачей настоящей работы.

2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Простейшим самоподобным случайным процессом (1) является броуновское движение (для которого $H = 1/2$), обладающее такими свойствами, как [2] нулевое начало, стационарность приращений, стохастическая непрерывность траекторий, независимость приращений, гауссовость приращений. Первые три из перечисленных свойств являются общими для всех моделей, рассматриваемых в настоящей работе.

Обобщениями броуновского движения служат устойчивый процесс Леви (SLP) и фрактальное броуновское движение (FBM). В первом случае гауссовский закон распределения приращений ($\alpha = 2$) обобщается до альфа-устойчивого ($0 < \alpha \leq 2$). Такое обобщение позволяет дополнить свойство самоподобия другим важным свойством – «тяжелыми хвостами» распределений [3]:

$$\begin{aligned} P\{X > x\} &\sim x^{-\alpha}, & x \rightarrow \infty \\ P\{X < x\} &\sim |x|^{-\alpha}, & x \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad \text{при } \alpha \neq 2. \quad (2)$$

Параметр α , $0 < \alpha \leq 2$, называется индексом устойчивости и определяет «тяжесть хвостов» распределения (2). Плотности распределений симметричных устойчивых ($S\alpha S$) законов $g(x; \alpha, \gamma)$ параметризуются в частотной области, т.е. с помощью характеристической функции:

$$\varphi(t) = M(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(x; \alpha, \gamma) dx = \exp(-|\gamma t|^\alpha). \quad (3)$$

Параметр $\gamma > 0$ задает масштаб: если случайная величина X стандартизована, т.е. $\gamma_x = 1$, и $Y = cX$, то $\gamma_y = |c|$.

Важнейшим свойством устойчивых законов является то, что сумма независимых одинаково распределенных (НОР) случайных величин X_k ($k = 1, \dots, n$), следующих (3), также следует устойчивому закону (3):

$$Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \rightarrow g(y; \alpha, n^{1/\alpha} \gamma). \quad (4)$$

Альфа-устойчивые законы (3) являются далеко не единственными, обладающими «тяжелыми хвостами». Например, используются гиперболические законы [2]. Особое место альфа-устойчивых распределений обусловлено тем, что эти и только эти законы могут быть пределом по распределению сумм независимых одинаково распределенных (НОР) случайных величин [4]. Это значит, что даже если X_k не являются устойчивыми, но при этом являются НОР (и симметричными), то предел по распределению их суммы Y_n при $n \rightarrow \infty$ либо не существует, либо имеет вид (4).

Случайный процесс с независимыми альфа-устойчивыми приращениями $\Delta X_k = X_{k\tau} - X_{(k-1)\tau}$, следующими $S\alpha S$ -закону (3) называется устойчивым процессом Леви [3] и, как следует из (1) и (4), является самоподобным с показателем Херста

$$H = 1/\alpha. \quad (5)$$

Случайный процесс $X(t)$ называется процессом, обладающим свойством LRD, если автокорреляционная функция его приращений (АКФП) $\Delta X_k = X_{k\tau} - X_{(k-1)\tau}$ асимптотически убывает не быстрее, чем степенная функция с показателем $-b$, $0 < b < 2$:

$$r_n = \text{Corr}\{\Delta X_k \Delta X_{k+n}\} \sim n^{-b}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Доказано [2, 5, 6], что самоподобный случайный процесс (1) со стационарными приращениями и конечной дисперсией имеет АКФП вида

$$r_n = \frac{1}{2} \left((n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H} \right) \Big|_{n \rightarrow \infty} = H(2H-1)n^{2H-2}, \quad (7)$$

$$0 < H < 1.$$

Таким образом, при $H \neq 1/2$ самоподобный случайный процесс характеризуется наличием долгосрочной зависимости приращений с показателем

$$b = 2 - 2H. \quad (8)$$

Процесс (1) с АКФП (7) называется фрактальным броуновским движением (ФБМ) [1].

Рассмотренные модели ВМ, ФБМ и SLP являются частными случаями процесса FLM, обладающего всеми тремя описанными свойствами: самоподобием (1), «тяжелыми хвостами» (2) и долгосрочной зависимостью (6). Числовыми мерами этих свойств являются соответственно H, α, r_n . Модели ВМ соответствуют значения $\alpha = 2, H = 1/2, r_n = 0$, модели ФБМ – $\alpha = 2, 0 < H < 1, r_n = H(2H-1)n^{2H-2}$, модели SLP – $0 < \alpha \leq 2, H = 1/\alpha, r_n = 0$. Очевидно, что параметры

H, α, r_n для FLM-процесса взаимосвязаны между собой, в то же время вид этой зависимости неизвестен. Вывод соотношения, связывающего указанные параметры, и является основной целью настоящей работы.

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Как было отмечено в постановке задачи, корреляционная модель взаимосвязи неприменима для величин, следующих устойчивым законам распределения (при $\alpha \neq 2$) в силу отсутствия вторых моментов. Как указывается в [6], для описания явления взаимосвязи величин, следующих распределению (3), необходимы иные показатели, инвариантные к наличию или отсутствию моментов. Естественно потребовать, чтобы при $\alpha = 2$ (т.е. для гауссовского закона распределения) эти показатели переходили в традиционные коэффициенты корреляции.

В [7] было показано, что взаимосвязь между двумя случайными величинами, можно описать с помощью модели симметричного перемешивания скрытых факторов (СПСФ):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ или } \mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}. \quad (9)$$

Согласно этой модели взаимосвязь наблюдаемых одинаково распределенных случайных величин (x, y) обусловлена перемешиванием независимых (и также одинаково между собой распределенных) ненаблюдаемых случайных величин (u, v) .

Очевидно, что модель (9) инвариантна к виду законов распределения рассматриваемых величин, к наличию или отсутствию моментов.

Известно [4], что линейная комбинация конечного числа независимых случайных величин X_k , следующих $S\alpha S$ -распределению (5) с одним и тем же индексом устойчивости (α), также следует этому же распределению. А именно, если $X_k \rightarrow g(x; \alpha; \gamma_k)$ ($k = 1, \dots, n$), то

$$Y_n = \sum_{k=1}^n c_k X_k \rightarrow g(y; \alpha; \gamma_0). \quad (10)$$

При этом параметры масштаба связаны соотношением

$$\gamma_0^\alpha = \sum_{k=1}^n (\gamma_k \cdot |c_k|)^\alpha. \quad (11)$$

Без нарушения общности можно принять масштабы случайных величин, входящих в (9), за единицу. Тогда из (11) следует, что

$$|a|^\alpha + |b|^\alpha = 1. \quad (12)$$

Выражение (12) представляет собой уравнение единичной окружности в метрике L_α , а параметры a и b представляют собой абсциссу и ординату точки этой окружности, соответствующей полярному углу θ :

$$a = \frac{\cos \theta}{(|\cos \theta|^\alpha + |\sin \theta|^\alpha)^{1/\alpha}},$$

$$b = \frac{\sin \theta}{\left(|\cos \theta|^\alpha + |\sin \theta|^\alpha \right)^{1/\alpha}}, \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{4}. \quad (13)$$

В силу линейности преобразования Фурье характеристическая функция $\varphi(\mathbf{t})$ ($\mathbf{t} = (s, t)'$) вектора $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{u}$ (9) связана с характеристической функцией $\psi(\mathbf{t}_1)$ вектора \mathbf{u} простым соотношением:

$$\begin{aligned} \log \varphi(\mathbf{t}) &= \log \psi(\mathbf{P}'\mathbf{t}) = \log \psi(sa + tb, sb + ta) = \\ &= -|sa + tb|^\alpha - |sb + ta|^\alpha. \end{aligned} \quad (14)$$

Многомерные $S\alpha S$ -распределения, в отличие от одномерных (3), в общем случае не могут быть описаны конечным набором параметров. Существует несколько форм параметризации таких законов, рассмотренных в работах [8, 9]. В настоящей работе используется параметризация [8], согласно которой требуемый набор параметров состоит из $1 \leq m \leq \infty$ положительно полуопределенных симметрических матриц $\Omega(j)$:

$$\log \varphi(\mathbf{t}) = -\sum_{j=1}^m (\mathbf{t}'\Omega(j)\mathbf{t})^{\alpha/2}, \quad (15)$$

Для многомерного устойчивого распределения, параметризованного в форме (15), существует показатель взаимосвязи:

$$r_{jk} = \frac{\sum_{l=1}^m \Omega_{jk}(l)}{\sqrt{\sum_{l=1}^m \Omega_{jj}(l) \cdot \sum_{l=1}^m \Omega_{kk}(l)}}, \quad j, k = 1, \dots, n \quad (16)$$

Так как форма (14) является частным случаем (15) (при $m = 2$, $\Omega(1) = (a, b)' \cdot (a, b)$, $\Omega(2) = (b, a)' \cdot (b, a)$), то показатель взаимосвязи (16) величин (x, y) имеет вид

$$r = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \sin(2\theta). \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что в частном случае $\alpha = 2$, соответствующем гауссовскому распределению, показатели (16)–(17) совпадают с обычным коэффициентом корреляции.

Модель СПСФ имеет наглядную геометрическую интерпретацию: линейное преобразование (9), описывает переход от «естественной» косоугольной системы координат скрытых факторов к прямоугольной, соответствующей наблюдаемым случайным величинам. Из-за наличия взаи-

мосвязи происходит искажение «эллипсов» рассеивания (т.е. кривых постоянной плотности): они вытягиваются (или сжимаются при $r < 0$) вдоль биссектрисы главного угла (рис. 1). При этом показатели взаимосвязи (17) равны косинусам соответствующих координатных углов системы координат скрытых факторов ($r = \cos(\eta) = \sin(2\theta)$).

Модель СПСФ (9) легко обобщается [7] на случай, когда рассматриваемые зависимые переменные имеют разный масштаб и/или их количество $n > 2$. Если обозначить $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор наблюдаемых случайных величин, $\mathbf{G} = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – диагональная матрица, задающая их масштаб, $\mathbf{u} \in R^n$ – вектор скрытых факторов, \mathbf{P} – положительно определенная бисимметричная (симметричная относительно обеих диагоналей) матрица факторного преобразования, то преобразование (9) приобретает вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{P}\mathbf{u}. \quad (18)$$

а характеристическая функция (14) – форму

$$\log \varphi(\mathbf{t}) = -\sum_{j=1}^n \left(\left| \sum_{k=1}^n p_{jk} \gamma_k t_k \right|^\alpha \right). \quad (19)$$

Масштабы скрытых факторов удобно без нарушения общности принять за единицу, тогда коэффициенты матрицы \mathbf{P} должны удовлетворять помимо условий симметрии $p_{jk} = p_{kj}$ и антисимметрии $p_{jk} = p_{n+1-k, n+1-j}$, условиям нормировки в метрике L_α , аналогичным (12):

$$\|\mathbf{P}_j\|_\alpha = \sum_{k=1}^n |p_{jk}|^\alpha = 1, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (20)$$

Коэффициенты взаимосвязи r_{jk} находятся по формуле (16) при $m = 1$ и $\Omega = \mathbf{P}'\mathbf{P}$, т.е. $r_{jk} = \Omega_{jk} / \sqrt{\Omega_{jj}\Omega_{kk}}$. Таким образом, матрица $\Omega = \mathbf{P}'\mathbf{P}$ играет роль ковариационной.

Для процесса FBM (являющегося частным случаем рассматриваемой модели FLM, соответствующего $\alpha = 2$), вид зависимости коэффициента взаимосвязи двух соседних приращений (r_1) от α и H известен. Эта зависимость является частным случаем АКФП r_n (7) (соответствующим $n = 1$) и имеет следующий вид:

$$r_1(\alpha = 2, H) = \text{Corr}\left\{ (X_{k\tau} - X_{(k-1)\tau}) (X_{(k+1)\tau} - X_{k\tau}) \right\} = 2^{2H-1} - 1. \quad (21)$$

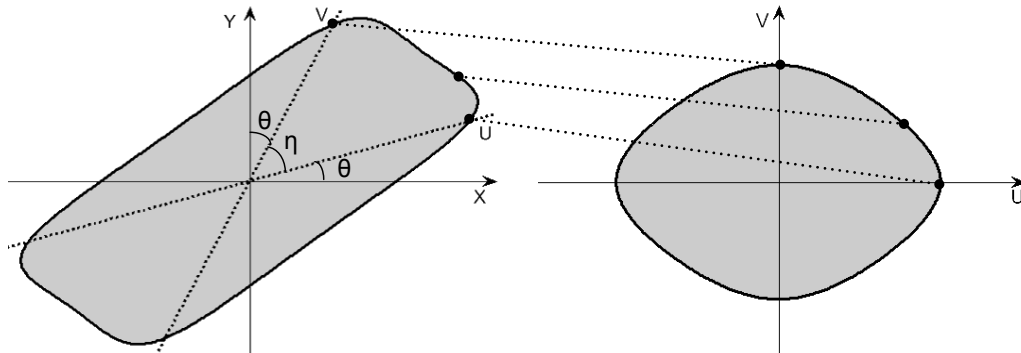


Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация взаимосвязи (корреляции) двумерного альфа-устойчивого распределения

С помощью модели СПСФ можно найти зависимость $r_1(\alpha, H)$ для общего случая, соответствующего исследуемому процессу FLM.

Характеристическая функция $\varphi(\mathbf{t})$ двумерного устойчивого распределения соседних приращений $\Delta X_{k\tau}$, $\Delta X_{(k+1)\tau}$ имеет вид (14). В силу свойства самоподобия (1) приращение исследуемого случайного процесса за два такта имеет масштаб, равный 2^H . С другой стороны, из (11) и (14) следует, что $x + y$ имеет масштаб γ_{x+y} , удовлетворяющий равенству $\gamma_{x+y}^\alpha = 2|a+b|^\alpha$. Таким образом,

$$2^{1/\alpha} |a+b| = 2^H. \quad (22)$$

Коэффициент взаимосвязи между приращениями вычисляется по формуле (17), для чего необходимо найти параметры a, b из условия нормировки (12) и соотношения (22). Подставив (13) в (22), и обозначив $z = \tan(\theta)$, получим:

$$\frac{(1+z)^\alpha}{1+|z|^\alpha} = 2^{\alpha H-1}, \quad -1 \leq z \leq 1. \quad (23)$$

При этом искомый коэффициент взаимосвязи приобретает вид:

$$r_1 = \sin(2 \cdot \arctan(z)) = \frac{2z}{1+z^2}. \quad (24)$$

Зависимость коэффициента взаимосвязи соседних приращений FLM от индексов устойчивости и самоподобия $r_1(\alpha, H)$, в общем случае не выражается через элементарные функции. Для ее построения следует численно решить уравнение (23). Интересно отметить, что при $H=0$ и $\alpha \rightarrow 0$ решение (23) стремится к $z(0,0) = \tau - 1$, где $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618\dots$ – золотое сечение!

При этом $r_1(0,0) = -\frac{2}{3}$.

Для расчета показателя взаимосвязи r_n между двумя приращениями процесса FLM, отстоящими на n тактов, следует применить обобщенную модель СПСФ (18)–(19). Обозначим $x_1 = \Delta X_{k\tau} = X_{k\tau} - X_{(k-1)\tau}$, $x_2 = X_{(k+n-1)\tau} - X_{k\tau}$, $x_3 = \Delta X_{(k+n)\tau} = X_{(k+n)\tau} - X_{(k+n-1)\tau}$. Рассматриваемые случайные величины x_1, x_2, x_3 следуют устойчивым распределениям. Величины x_1 и x_3 в силу свойства стационарности приращений имеют одинаковый масштаб, который примем за единицу. Величина x_2 согласно свойствам стационарности и самоподобия имеет масштаб $\gamma = (n-1)^H$. Характеристическая функция $\varphi(\mathbf{t})$ совместного распределения x_1, x_2, x_3 имеет вид (19), при этом 3×3 матрица \mathbf{P} в силу бисимметричности содержит четыре неизвестных коэффициента a, b, c, d :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \gamma & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Таким образом,

$$\log \varphi(\mathbf{t}) = -|a t_1 + b \gamma t_2 + c t_3|^\alpha - |b t_1 + d \gamma t_2 + b t_3|^\alpha - |c t_1 + b \gamma t_2 + a t_3|^\alpha. \quad (26)$$

Неизвестные коэффициенты (a, b, c, d) находятся из следующей системы:

$$\begin{cases} |a|^\alpha + |b|^\alpha + |c|^\alpha = 1 \\ |b|^\alpha + |d|^\alpha + |b|^\alpha = 1 \\ |a+b\gamma|^\alpha + |b+d\gamma|^\alpha + |c+b\gamma|^\alpha = n^{\alpha H} \\ |a+b\gamma+c|^\alpha + |b+d\gamma+b|^\alpha + |c+b\gamma+a|^\alpha = (n+1)^{\alpha H} \end{cases} \quad (27)$$

Первые два уравнения этой системы являются стандартными условиями нормировки (20), третье следует из того, что случайные величины $x_1 + x_2 = X_{(k+n-1)\tau} - X_{(k-1)\tau}$ и $x_2 + x_3$ имеют масштаб, равный n^H , а четвертое отражает равенство $(n+1)^H$ масштаба величины $x_1 + x_2 + x_3 = X_{(k+n)\tau} - X_{(k-1)\tau}$.

Искомый коэффициент взаимосвязи (между x_1 и x_3) определяется согласно (16) (как отмечалось выше, при $m=1$, $\Omega = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$):

$$r_n = \frac{\Omega_{13}}{\sqrt{\Omega_{11} \cdot \Omega_{33}}} = \frac{2ac + b^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (28)$$

К сожалению, система (27) имеет явное решение только при $\alpha=2$ (в этом случае r_n имеет вид (7)), а также при $\alpha=1$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \frac{1}{4} n^{-2H}$). В остальных случаях систему (27) необходимо решать численно, и при этом даже асимптотическое (при $n \rightarrow \infty$) поведение показателей взаимосвязи (28) неизвестно.

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для численного решения уравнения (23) и нахождения зависимости коэффициента взаимосвязи соседних приращений FLM от индексов устойчивости и самоподобия (24) использовался пакет SciLab-5.4.0. Значения H варьировались от 0 до 1 с шагом 0,05; значения α – 0,001 и затем от 0,05 до 2 с шагом 0,05. Решение уравнения (23) выполнялось с точностью $tol = 10^{-6}$. При решении (23) учитывалось, что функция от вспомогательной переменной z , стоящая в левой части, является немонотонной и невыпуклой при $\alpha < 1$. Поэтому при $\alpha < 1$ диапазон допустимых значений z ограничивался значениями -1 и 0 , в то время как при $\alpha \geq 1$ ограничения имели вид $-1 \leq z \leq 1$.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Получена зависимость показателя взаимосвязи соседних приращений исследуемого процесса FLM (фрактального движения Леви) $r_1(\alpha, H)$ от индексов устойчивости (α) и самоподобия (H). Она имеет вид алгебраических уравнений (23)–(24). В процессе экспериментальных исследований был получен график указанной зависимости $r_1(\alpha, H)$, представленный на рис. 2.

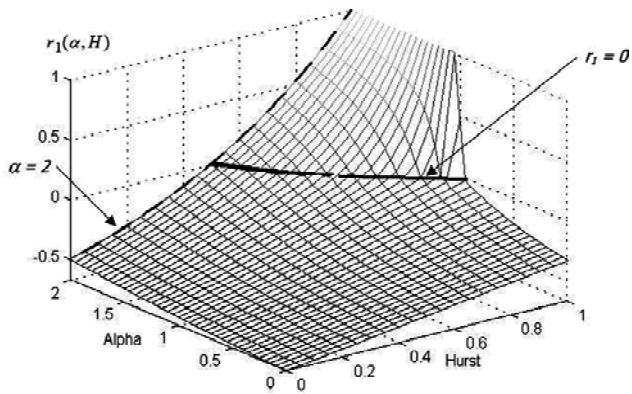


Рисунок 2 – Зависимость коэффициента взаимосвязи двух соседних приращений фрактального процесса Леви от индексов устойчивости и самоподобия

На рисунке для сравнения также показаны зависимости $r_1(\alpha, H)$, соответствующие известным частным случаям FLM: процессу SLP (сплошная линия) и процессу FBM (пунктирная линия).

Как видно из графика, экспериментальное исследование полностью подтвердило результаты теоретических исследований, а именно, полученная в работе математическая модель $r_1(\alpha, H)$ (23)–(24), описывающая взаимосвязь между параметрами процесса FLM, не противоречит аналогичным зависимостям, соответствующим известным частным случаям (SLP, FBM, BM), но при этом обобщает их.

В работе также предложена математическая модель (27)–(28) в форме системы алгебраических уравнений, теоретически позволяющая построить аналог дискретной автокорреляционной функции приращений для FLM, то есть зависимость показателя взаимосвязи элементарных приращений, отстоящих на n тактов $r_n(\alpha, H)$ от индексов устойчивости и самоподобия.

6 ОБСУЖДЕНИЕ

Свойства самоподобия, устойчивости и долгосрочной зависимости приращений фрактального движения Леви взаимосвязаны между собой, однако количественные соотношения между соответствующими параметрами были известны лишь для некоторых частных случаев (BM, FBM [5], SLP[6]).

Основным, по мнению автора, препятствием на пути построения общей модели была невозможность количественного описания свойства зависимости приращений в рамках традиционного дисперсионно-ковариационного подхода. Для решения этой проблемы было предложено использовать показатели взаимосвязи, построенные с помощью модели СПСФ.

В результате теоретических исследований была получена математическая модель в форме системы алгебраических уравнений, связывающих индексы самоподобия, устойчивости и показатель взаимосвязи соседних приращений. Показано теоретически и подтверждено экспериментально, что для частных случаев фрактального движения Леви (BM, FBM, SLP) решения полученной системы полностью соответствуют известным зависимостям, соответствующим этим частным моделям.

Таким образом, предложенная модель может рассматриваться как обобщение ранее известных [5, 6] на процесс (FLM) более общего вида.

Была также получена еще более общая модель, связывающая индексы самоподобия и устойчивости с показателем взаимосвязи приращений, отстоящих на n тактов. Для нее также было показано, что она включает в себя все известные модели процессов, являющихся частными случаями FLM [2, 5, 6], и обобщает их.

ВЫВОДЫ

В работе решена задача поиска соотношений между параметрами, отвечающими за свойства самоподобия, устойчивости и долгосрочной зависимости приращений фрактального движения Леви.

Научная новизна полученных результатов состоит в том, что:

1. Впервые предложено для оценки взаимосвязи приращений фрактального движения Леви использовать показатели, построенные с помощью модели симметричного перемешивания скрытых факторов, что позволило решить проблему неприменимости корреляционного метода их оценки.

2. Впервые получена математическая модель, описывающая зависимость показателя взаимосвязи соседних приращений фрактального движения Леви от индексов устойчивости и самоподобия. Указанная зависимость построена экспериментально в графическом виде.

3. Впервые построена математическая модель, позволяющая построить аналог дискретной автокорреляционной функции для фрактального движения Леви, то есть зависимость показателя взаимосвязи элементарных приращений, отстоящих на n тактов от индексов устойчивости и самоподобия.

Практическая значимость полученных результатов состоит в том, что наличие предложенных моделей позволяет определить один из трех показателей (самоподобия, устойчивости и долгосрочной зависимости приращений) по двум известным, что существенно упрощает моделирование и исследование случайных процессов, имеющих вид фрактального движения Леви.

Несмотря на возможность построить аналог дискретной автокорреляционной функции для фрактального движения Леви с помощью полученной модели, асимптотический вид (при $n \rightarrow \infty$) этой зависимости остался неизвестным. Очевидно, что ее нахождение и экспериментальное подтверждение является актуальным направлением для дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelbrot B. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications / B. Mandelbrot, J.W. van Ness // SIAM Review. – 1968. – Vol. 10 (4) – P. 422–437. DOI:10.1137/1010093.
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели / А. Н. Ширяев. – М. : ФАЗИС, 1998. – 512 с.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М. : «Институт компьютерных исследований», 2002. – 656 с.
4. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения / В. М. Золотарев. – М. : Наука, 1983. – 304 с.
5. Федер Е. Фракталы / Е.Федер. – М. : Мир, 1991. – 261 с.

6. Samorodnitsky G. Stable Non-Gaussian Random Processes, Chapter 7: «Self-similar processes» / G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu. – Chapman & Hall, 1994.
 7. Шергін В. Інтерпретація показателя взаємозв'язку багатовимірних устійливих випадкових величин з допомогою факторної моделі / В. Шергін // Восточно-Европейський журнал передових технологій. – 2015. – 5 (4(77)) – С. 44–49. DOI:10.15587/1729-4061.2015.50442
 8. Press S. J. Multivariate stable distributions / S. J. Press // Journal of Multivariate Analysis. – 1972. – Vol. 2, Issue 4. – P. 444–462. DOI: 10.1016/0047-259x(72)90038-3
 9. Balakrishnan N.: Continuous bivariate distributions [Text] / N. Balakrishnan, C.-D. Lai. – Springer, 2009. – 684 p. DOI: 10.1007/b101765
- Стаття поступила в редакцію 16.02.2016.
Після доработки 24.02.2016.

Шергін В. Л.

Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри штучного інтелекту, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ПАРАМЕТРАМИ САМОПОДІБНОСТІ, СТІЙКОСТІ ТА ДОВГОСТРОКОВОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ ПРИРІСТІВ ФРАКТАЛЬНОГО РУХУ ЛЕВІ

Розглядається задача пошуку співвідношень між параметрами, самоподібності, стійкості та довгострокової залежності приростів фрактального руху Леві. В якості міри взаємозв'язку приростів, запропоновано застосувати показники, побудовані за допомогою моделі симетричного перемішування прихованих факторів, що дало змогу розв'язати проблему непридатності кореляційного методу оцінки таких приростів, пов'язану з відсутністю потрібних моментів розподілу. Отримано залежність показника взаємозв'язку сусідніх приростів від індексів стійкості та самоподібності. Ця залежність має вигляд алгебраїчного рівняння, яке хоч в загальному випадку й не має явного рішення, але легко розв'язується чисельно. Запропоновано математичну модель, яка дозволяє побудувати аналог дискретної автокореляційної функції для фрактального руху Леві. Ця модель має вигляд системи алгебраїчних рівнянь. В роботі показано, що всі аналогічні залежності, які є відомими для окремих випадків процесу фрактального руху Леві, який розглядається, є відповідними окремими випадками моделей, отриманих у роботі. Наявність запропонованих моделей дає змогу визначити будь-який з трьох показників (самоподібності, стійкості та довгострокової залежності приростів) по двом відомим, що суттєво спрощує моделювання та дослідження випадкових процесів, які мають вигляд фрактального руху Леві.

Ключові слова: фрактальний рух Леві, самоподібність, довгострокова залежність, стійки розподіли, показники взаємозв'язку.

Shergin V. L.

PhD., Associate Professor, Associate Professor of Artificial intelligence department, Kharkov National University of Radioelectronics, Kharkov, Ukraine

RELATIONSHIP BETWEEN THE PARAMETERS OF SELF-SIMILARITY, STABILITY AND LONG-RANGE DEPENDENCY OF FRACTAL LEVÝ MOTION

The problem of searching relationships between the parameters of self-similarity, stability and long-range dependency of fractal Levý motion is considered. It was proposed to use indexes, constructed by means of a model of symmetric mixing of latent factors as a measure of the relationship between increments of fractal Levý motion process. This approach makes it possible to solve the problem of inability to use the correlation method for estimating such increments caused by the absence of the required distribution moments. Dependence of the relationship index of neighboring increments on the indices of stability and self-similarity is obtained. This dependence has the form of an algebraic equation which has no an explicit solution generally, but can be easily solved numerically. A mathematical model that allows to construct a discrete analogue of the autocorrelation function for the fractal Levý motion is proposed. This model has the form of the system of algebraic equations. It is shown that all of the similar dependencies known for the particular cases of the fractal Levý motion, are special cases of the models obtained in the work. Proposed models allow us to determine any of the three parameters (self-similarity, stability and long-range dependency) on two other that will essentially simplify the modeling and studying stochastic processes having the form of fractal Levý motion.

Keywords: fractal Levý motion, self-similarity, long-range dependency, stable distributions, relationship indexes.

REFERENCES

1. Mandelbrot B. B., Van Ness J. W. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications, *SIAM Review*, 1968, 10(4), pp. 422–437. DOI: 10.1137/1010093.
2. Shiryaev A. N. Essentials of Stochastic Financial Mathematics. Volume 1. Facts. Models. Moscow, Fazis, 1998, 512 p.
3. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature, *American Journal of Physics*, 1983, Vol. 51(3), P. 286. DOI: 10.1119/1.13295.
4. Zolotarev V. M. One-dimensional stable distributions. American Mathematical Society, 1986.
5. Feder, J. (1988). Fractals. Springer, 283 p. DOI: 10.1007/978-1-4899-2124-6.
6. Samorodnitsky G., Taqqu M. S. (1994), Stable Non-Gaussian Random Processes, Chapter 7: «Self-similar processes» (Chapman & Hall).
7. Shergin V. Interpretation of the measure of dependence for multivariate stable random variables using factor model, *Eastern-European Journal Of Enterprise Technologies*, 2015, Vol. 5(4(77)), pp. 44–49. DOI: 10.15587/1729-4061.2015.50442.
8. Press S. J. Multivariate stable distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, 1972, Vol. 2 (4), pp. 444–462. DOI: 10.1016/0047-259x(72)90038-3.
9. Balakrishnan N., Lai C. D. Continuous bivariate distributions. Springer Science & Business Media, 2009, P. 684. DOI: 10.1007/b101765.