УДК 519.852.6

Мамедов К. Ш.[1], Мамедова А. Г.[2]

[1]Д-р физ.-мат. наук, профессор Бакинского Государственного Университета и зав. отделом Института Систем Управления НАН Азербайджана, Азербайджан, Баку
[2]Докторант, научный сотрудник Института Систем Управления НАН Азербайджана, Азербайджан, Баку

ПОНЯТИЯ СУБОПТИМИСТИЧЕСКОГО И СУБПЕССИМИСТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ В ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ БУЛЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В работе рассмотрена интервальная задача булевого программирования. Даны некоторые экономические интерпретации этой задачи, в результате которых построена экономико-математическая модель. Введены понятия допустимого, оптимистического, пессимистического, субоптимистического и субпессимистического решений задачи булевого программирования с целочисленными интервальными данными. Разработаны два алгоритма построения субоптимистического и субпессимистического решений этой задачи. Естественно, что эти решения могут отличатся от оптимистического и пессимистического решений. Поэтому необходимо оценить относительные погрешности найденных субоптимистических и субпессимистических решений от оптимистического и пессимистического, соответственно. С этой целью построена мажорирующая функция типа Лагранжа. Доказано, что минимальное значение этой функции является верхней границей оптимистического и пессимистического значений целевой функции, соответственно. Минимизацией этой функции находится верхняя граница субоптимистического и субпессимистического значений целевой функции. Проведены вычислительные эксперименты по решению задач различной размерности.

Ключевые слова: задача булевого программирования с целочисленными интервальными данными, оптимистическое решение, пессимистическое решение, субоптимистическое решение, субпессимистическое решение, максимальное приращение функционала, нелинейный штраф, функция Лагранжа, вычислительные эксперименты.

НОМЕНКЛАТУРА

$\underline{c}_j, \overline{c}_j, \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}, \underline{b}_i, \overline{b}_i$ – заданные целые неотрицательные числа;

j_* – фиксированный номер;

x_j – j-й неизвестный;

X – n-мерный вектор;

X^o – оптимистическое решение;

f^o – оптимистическое значение;

X^p – пессимистическое решение;

f^p – пессимистическое значение;

X^{so} – субоптимистическое решение;

f^{so} – субоптимистическое значение;

X^{SP} – субпессимистическое решение;

f^{sp} – субпессимистическое значение;

$\overline{q}_i, \underline{q}_i$ – штраф (цена) за использование i-го ресурса для оптимистического и пессимистического решений, соответственно;

ω^o, ω^p – множества некоторых индексов при построении функции Лагранжа для оптимистической и пессимистической стратегий, соответственно;

ω^{so}, ω^{sp} – множества индексов переменных, принимающих единичные значения при построении оптимистического и пессимистического решений, соответственно;

$\overline{r}_i, \underline{r}_i$ – использованные i-е ресурсы для оптимистического и пессимистического решений, соответственно;

$\overline{Q}_j, \underline{Q}_j$ – общий штраф за использование оставшихся ресурсов для неизвестных x_j оптимистического и пессимистического решений, соответственно;

$\overline{f}_j, \underline{f}_j$ – приращение значения целевой функции для j-го объекта каждой единицы общего штрафа для оптимистической и пессимистической стратегий, соответственно;

$f_M^{so}, f_M^{sp}, f_C^{so}, f_C^{sp}$ – субоптимистическое и субпессимистическое значения функции (1), найденные методами максимального приращения и нелинейного штрафа, соответственно;

$\overline{f}^{so}, \overline{f}^{sp}$ – верхние границы субоптимистического и субпессимистического значений, соответственно;

$\delta_M^{so}, \delta_M^{sp}, \delta_C^{so}, \delta_C^{sp}$ – относительные погрешности субоптимистического и субпессимистического значения, найденные методом максимального приращения и нелинейного штрафа от своей верхней границы, соответственно;

$b_M^{so}, b_M^{sp}, b_C^{so}, b_C^{sp}$ – средние единицы уменьшения заданных правых частей системы ограничений, соответствующие субоптимистическому и субпессимистическому решениям, полученным методами максимального приращения и нелинейного штрафа;

$N_M^{so}, N_M^{sp}, N_C^{so}, N_C^{sp}$ – число наилучших найденных субоптимистических и субпессимистических решений среди задач одинаковой размерности;

N – число различных задач одинаковой размерности.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую задачу:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\underline{c}_j, \overline{c}_j\right] x_j \to \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right] x_j \le \left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right] \ (i=\overline{1,m}), \tag{2}$$

DOI 10.15588/1607-3274-2016-3-13

$$x_j = 0 \vee 1 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{3}$$

Здесь предполагается, что $\underline{c}_j, \overline{c}_j, \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}, \underline{b}_i, \overline{b}_i$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ заданные целые неотрицательные числа. Задача (1)–(3) называется задачей булевого программирования с целочисленными интервальными данными или интервальная задача булевого программирования.

Целью данной работы является создание методов построения субоптимистического и субпессимистического решения задачи (1)–(3) (понятия оптимистического, пессимистического, субоптимистического и субпессимистического решения вводится ниже).

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеются n объектов, каждый из которых можно или нельзя использовать. Если объект с определенным номером $j_* (j_* \in \{1,2,...,n\})$ выбирается для использования, то возможное полученное значение прибыли принадлежит заданному целочисленному интервалу $\left[\underline{c}_{j_*}, \overline{c}_{j_*}\right]$ $(j_* \in \{1,2,...,n\})$. При этом, необходимо затратить ресурсы из заданных целочисленных интервалов $\left[\underline{a}_{ij_*}, \overline{a}_{ij_*}\right]$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$. Допустим, что для использования заданных объектов выделен m тип общих ресурсов из заданных целочисленных интервалов $\left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right]$ $(i = \overline{1,m})$. Естественно, что необходимо выбирать для использования такие объекты, чтобы общие расходы не превышали бы заранее выделенные ресурсы $\left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right]$ $(i = \overline{1,m})$. При этом общая прибыль должна быть максимеальной. Очевидно, что введя переменные для каждого объекта $j\ (j = \overline{1,n})$,

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-й объект выбирается;} \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

получим математическую модель этой задачи в виде (1)–(3). Отметим, что поскольку задача (1)–(3) является обобщенной формой известной задачи булевого программирования, то она также входит в класс NP-полных, т.е. является «трудно решаемой». Поэтому для задачи (1)–(3) необходимо ввести различные понятия решений (допустимого, оптимистического, пессимистического, субоптимистического и субпессимистического решения) и разрабатывать соответствующие методы решений.

Естественно, что для каждого $i\ (i = \overline{1,m})$ должны выполняться условия

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij} > \overline{b}_i \quad (i = \overline{1,m}).$$

В противном случае, если для всех $i\ (i = \overline{1,m})$ эти условия не выполняются, то вектор $X = (1,1,...,1)$ удовлетворяет системе неравенств (2) и будет оптимальным решением. С другой стороны, если для некоторого i_* выполняется соотношение $\sum_{j=1}^{n} \overline{\underline{a}}_{i_* j} > \underline{b}_{i_*}$, то неравенство с этим номером i_* необходимо отбросить из системы (2), поскольку оно не является ограничением.

2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Задача (1)–(3) интенсивно исследовалась авторами работ [1–12], начиная с 80-х годов XX века. В этих работах рассмотрены задачи с одним или со многими ограничениями булевого [1, 4, 5 ,8, 9–16] и целочисленного [3, 5–7] программирования с коэффициентами из различных классов.

Отметим, что в рассмотренных работах [1–12] коэффициенты задач выбираются либо как неточные числа, либо из определенного класса. В этих работах выбором различных стратегий разработаны алгоритмы решения соответствующих задач. Эти стратегии в основном следующие:

I) В задаче только коэффициенты функции (1) выбираются из определенного класса и фиксируются. Очевидно, что в этом случае имеются достаточно большое число вариантов задач.

II) Функция (1) заменяется многочисленными функциями рассмотренного класса. Естественно, что в этом случае необходимо решить достаточно большое количество задач.

III) Коэффициенты функции (1) и ограничений (2) выбираются из определенного класса и в процессе решения фиксируются конкретные числа из этого класса.

IV) В задаче принимаются оптимистические и пессимистические стратегии и на их основе разрабатываются методы решения.

Однако, если коэффициенты целевой функции и ограничений являются не постаянными числами а интервалами, то прикладные задачи будут более реально моделированными.

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Сначала введем следующие понятия для задачи (1)–(3).

Определение 1. Двоичный n-мерный вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ будем называть допустимым решением задачи (1)–(3), если для $\forall a_{ij} \in \left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right]$ и $\forall b_i \in \left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right], (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ выполняются соотношения $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$.

Из этого определения видно, что в отличие от задачи булевого программирования, в задаче (1)–(3) понятия оптимального решения, оптимального значения целевой функции и т. д. должны иметь другой смысл. Ибо для удовлетворения системы (2) должно соблюдаться условие непревышения суммы некоторых целочисленных интервалов от заданного целочисленного интервала и при этом сумма некоторых других целочисленных интервалов должна быть максимальной или как можно большей. С этой целью введем следующие определения.

Определение 2. Допустимое решение $X^o = \left(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o\right)$ задачи (1)–(3) назовем оптимистическим решением, если значение $f^o = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j^o$ будет максимальным (наибольшим). Число f^o назовем оптимистическим значением целевой функции.

Определение 3. Допустимое решение $X^p = \left(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p\right)$ задачи (1)–(3) назовем пессимистическим решением, если значение $f^p = \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j^p$ будет максимальным (наибольшим). Число f^p называем пессимистическим значением целевой функции.

Определение 4. Допустимое решение $X^{so} = \left(x_1^{so}, x_2^{so}, \ldots, x_n^{so}\right)$ задачи (1)–(3) называем субоптимистическим, если значение $f^{so} = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j^{so}$ будет максимальным по некоторому критерию. Число f^{so} назовем субоптимистическим значением целевой функции.

Определение 3. Допустимое решение $X^p = \left(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p\right)$ задачи (1)–(3) назовем пессимистическим решением, если значение $f^p = \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j^p$ будет максимальным (наибольшим). Число f^p называем пессимистическим значением целевой функции.

Определение 4. Допустимое решение $X^{so} = \left(x_1^{so}, x_2^{so}, \ldots, x_n^{so}\right)$ задачи (1)–(3) называем субоптимистическим, если значение $f^{so} = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j^{so}$ будет максимальным по некоторому критерию. Число f^{so} назовем субоптимистическим значением целевой функции.

Определение 5. Допустимое решение $X^{sp} = \left(x_1^{sp}, x_2^{sp}, \ldots, x_n^{sp}\right)$ задачи (1)–(3) назовем субпессимистическим, если значение $f^{sp} = \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j^{sp}$ будет максимальным по некоторому критерию. Число f^{sp} назовем субоптимистическим значением целевой функции.

Отметим, что критерии , упоминающиеся в определениях 4 и 5, приводятся ниже.

Учитывая вышеприведенную интерпретацию задачи (1)–(3), для построения субоптимистического и субоптимистического решение в работе [19] выведены следующие критерии:

$$j_* = \arg\max_j \frac{\bar{c}_j}{\max_i \underline{a}_{ij}}, \tag{4}$$

$$j_* = \arg\max_j \frac{\underline{c}_j}{\max_i \bar{a}_{ij}}. \tag{5}$$

При оптимистической и пессимистической стратегии номер неизвестного j_*, для которого можно принять $x_{j_*}^{so} = 1$, определяется по критериям (4) и (5), соответственно. Решения $X^{so} = \left(x_1^{so}, x_2^{so}, \ldots, x_n^{so}\right)$ и $X^{sp} = \left(x_1^{sp}, x_2^{sp}, \ldots, x_n^{sp}\right)$ построенные по критериям (4) и (5) назовем, соответственно, субоптимистическим и субпессимистическим. Как видно из критериев (4) и (5), в процессе построения решения каждый раз выбирается такой номер неизвестного j_*, для которого приращение функционала будет максимальным. Поэтому в работе [19] этот метод называется методом **максимального приращения функционала.** Тогда субоптимистическое или субпессимистическое значения функции (1) будут соответственно равны

$$f^{so} = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j^{so} \text{ и } f^{sp} = \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j^{sp}.$$

Однако, нам нужно найти субоптимистические решение $X^o = \left(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o\right)$ или субпессимистические решение $X^p = \left(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p\right)$, для которых соответствующее значение функции (1) было не меньше, чем f^{so} или f^{sp} соответственно и одновременно соотвествующие этим решениям правые части $b_i (i = \overline{1,m})$ были не больше, чем исходные значения $b_i (i = \overline{1,m})$. С этой целью используем принцип дихотомии. Вначале приняв $b_i := \left[\left(\underline{b}_i + \bar{b}_i\right)/2\right]$, $(i = \overline{1,m})$, где $[z]$ означает целую часть числа z и решая полученную задачу (1)–(3) находим субоптимистическое $X^o = \left(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o\right)$ или субпессимистическое решения $X^p = \left(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p\right)$ и соответствующие значения

$$f^o = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j^o \text{ и } f^p = \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j^p$$

функции (1). Если $f^o < f^{so}$ $(f^p < f^{sp})$, то принимаем $\underline{b}_i := b_i (i = \overline{1,m})$, иначе, т.е. если $f^p \ge f^{sp} \left(f^p \ge f^{sp}\right)$,то запоминаем $x_j^{so} := x_j^o (x_j^{sp} := x_j^p) (j = \overline{1,n})$, $f^{so} = f^o (f^{sp} = f^p)$ и принимая $\bar{b}_i := b_i (i = \overline{1,m})$ заново определяем $b_i := \left[\left(b_i + \bar{b}_i\right)/2\right]$ $(i = \overline{1,m})$. Далее решается очередная задача (1)–(3). Этот процесс вычисления продолжается до тех пор, пока при очередном делении пополам не получится $\underline{\underline{b}}_i := b_i (i = \overline{1,m})$. Тогда последний запомненный $X^{so}=\left(x_1^{so},x_2^{so},...,x_n^{so}\right)$ $\left(X^{sp}=\left(x_1^{sp},x_2^{sp},...,x_n^{sp}\right)\right)$ будет субоптимистическим (субпессимистическим) решением и f^{so} (f^{sp}) субоптимистическим (субпессимистическим) значением целевой функции рассмотренной задаче. Отметим, что вначале процесса деления пополам, запомнили заданные в правых частях системы (2) $\bar{b}_i (i=\overline{1,m})$ как $\bar{b}_i^o (i=\overline{1,m})$, а потом поменяли $\bar{b}_i\ (i=\overline{1,m})$. Поэтому для выяснения качества разработанного метода, необходимо проанализировать величину $\Delta_i=\bar{b}_i^o-b_i (i=\overline{1,m})$ при проведении экспериментов с задачами различной размерности.

Теперь изложим другой метод для построения субоптимистического и субпессимистического решения задачи (1)–(3). Сначала запишем эту задачу в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\underline{c}_j,\bar{c}_j\right]x_j \to \max, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\underline{a}_{ij},\bar{a}_{ij}\right]x_j \le b_i,\ (i=\overline{1,m}), \tag{7}$$

$$x_j=0\vee 1\ \ (j=\overline{1,n}). \tag{8}$$

Здесь, $\underline{\alpha}_{ij}=\underline{a}_{ij}\big/b_i$, $\bar{\alpha}_{ij}=\bar{a}_{ij}\big/b_i$ $(i=\overline{1,m}\ \ j=\overline{1,n})$, $0\le\underline{\alpha}_{ij}\le 1,\ 0\le\bar{\alpha}_{ij}\le 1,\ (i=\overline{1,m}),\ (j=\overline{1,n})$. Примем следующие обозначения:

$$\underline{P}_j=\left(\underline{\alpha}_{1j},\underline{\alpha}_{2j},\dots\underline{\alpha}_{mj}\right)^T,\ \bar{P}_j=\left(\bar{\alpha}_{1j},\bar{\alpha}_{2j},\dots,\bar{\alpha}_{mj}\right)^T,$$

$$(j=\overline{1,n}),\ \ P_o=(1,1,...,1)^T.$$

Процесс построения субоптимистического и субпессимистического решения начинается с начального решения $X=(0,0,...,0)$. Допустим необходимо построить субоптимистическое решение $X^{so}=\left(x_1^{so},x_2^{so},...,x_n^{so}\right)$ задачи (9)–(11). (Процесс построения субпессимистического решения аналогичен и указан ниже). Если для некоторого j_* принято $x_{j_*}^{so}=1$, то в правых частях системы (10) остаются ресурсы $P_o=\left(1-\underline{\alpha}_{1j_*},1-\underline{\alpha}_{2j_*},...,1-\underline{\alpha}_{mj_*}\right)$ для принятия очередного $x_j^{so}=1\ (j=\overline{1,n})$. Введем штраф (цена) за использование единицы остаточных ресурсов P_o для принятия очередного $x_{j_*}^{so}=1,\ (j=\overline{1,n})$. Для этого необходимо учесть что, чем меньше оставшаяся часть ресурсов $\left(1-\underline{\alpha}_{ij_*}\right)$, тем больше должен быть штраф (цена) за его дальнейшее использование. При этом с уменьшением оставшейся части ресурса i штраф (цена) должен расти быстрее. Такой принцип построения решения, вообще говоря, создает возможность использования оставшихся ресурсов P_o равномерно и построить наиболее лучшее решение. В качестве такого штрафа мы принимаем

$$\underline{q}_i=\frac{1}{1-\underline{\underline{\alpha}}_{ij_*}},\ (i=\overline{1,m}). \tag{12}$$

Отметим, что при каждом очередном принятии $x_{j_*}=1$, знаменатель штрафа (12) уменьшается. Следовательно, штраф (цена) дефицитных ресурсов растет быстрее по нелинейному закону.

Для вывода более общей формулы, примем следующие обозначения:

$$\omega^{so}=\{j\,|\,x_j^{so}=1\},\ \Omega=\{1,2,...,n\} \tag{13}$$

$$\underline{r}_i=\sum_{j\in\omega^{so}}\underline{\alpha}_{ij},\ (i=\overline{1,m}) \tag{14}$$

Тогда в качестве штрафа (цена) за использование оставшихся ресурсов $P_o=\left(1-\underline{r}_1,1-\underline{r}_2,...,1-\underline{r}_m\right)$ (т. е. правых частей системы (10)) вместо формулы (12) примем

$$\underline{q}_i=\frac{1}{1-\underline{\underline{r}}_i},\ \ (i=\overline{1,m}). \tag{15}$$

Отсюда видно, что с уменьшением оставшихся ресурсов $1-\underline{r}_i$ $(i=\overline{1,m})$ штраф (цена) $\underline{q}_i$ $(i=\overline{1,m})$ за их использование возрастает быстрее нелинейным образом. Поэтому этот метод назван нами **методом нелинейного штрафа**. Очевидно, что в этих случаях использование дефицитных ресурсов ограничиваются. Тогда общий штраф за использование оставшихся ресурсов для неизвестных x_j составляет:

$$\underline{Q}_j=\sum_{i=1}^{m}\underline{\alpha}_{ij}\underline{q}_i\ \ (j\in\Omega). \tag{16}$$

При этом приращение значения функции (9) для каждой единицы общего штрафа для оптимистической стратегии будет

$$\bar{f}_j=\bar{c}_j\Big/\underline{Q}_j,\ \ (j\in\Omega). \tag{17}$$

Естественно, что для принятия $x_{j_*}^{so}=1$ нужно выбирать j_* по критерию

$$j_*=\arg\max_{j\in\Omega}\left\{\bar{f}_j\right\}\ \text{или}\ \max_{j\in\Omega}\left\{\bar{f}_j\right\}=\bar{f}_{j_*}. \tag{18}$$

Таким образом, используя критерии (18), можно построить субоптимистическое решение задачи (6)–(8) (или (9)–(11)) следующим образом. Вначале принимаем $X^{so}=(0,0,...,0)$. Далее, каждый раз в соответствии с критерием (18), определяется очередной номер неизвестных j_* и проверяется возможность принятия $x_{j_*}=1$.

p-ISSN 1607-3274. Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2016. № 3
e-ISSN 2313-688X. Radio Electronics, Computer Science, Control. 2016. № 3

Этот процесс завершается после рассмотрения всех номеров $j\ (j=1,2,...,n)$. Опишем этот процесс вычисления в более подробной форме.

Вначале, зафиксировав $b_i := \overline{b}_i$, $(i=\overline{1,m})$ строится задача (9)–(11).Далее принимаем начальное решение $X^{so}=(0,0,...,0)$. Тогда по формуле (13), (14) и (15) получается $\omega^{so}=\varnothing$, $\underline{r}_i=0$, $\underline{q}_i=1$ $(i=\overline{1,m})$. После этого, используя формулу (16), (17) и (18), последовательно находится номер j_* и принимается $\Omega:=\Omega\setminus\{j_*\}$. Если $\underline{P}_{j_*}\le P_0$, то принимаем $P_o:=P_o-\underline{P}_{j_*}$, $x^{so}_{j_*}=1$ и $\omega^{so}:=\omega^{so}\cup\{j_*\}$. Очевидно, что величины r_i, q_i, $(i=\overline{1,m})$, $\underline{Q}_j, \overline{f}_j$ $(j=\overline{1,n})$ и номер j_* будут принимать новые значения. Иначе т.е. если соотношение $\underline{P}_{j_*}\le P_o$ не выполняется хотя бы для одной координаты, то принимая $x^{so}_{j_*}:=0$, $\Omega:=\Omega\setminus\{j_*\}$ и по формуле (18) определяем очередной номер j_*.

Процесс построения решения завершается, когда $\Omega=\varnothing$. В результате получается субоптимистическое решение $X^{so}=(x_1^{so},x_2^{so},...,x_n^{so})$ и соответствующее субоптимистическое значение $f^{so}=\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j x_j^{so}$ функции (6).

Отметим, что вышеуказанным образом аналогично можно построить субпессимистическое решение задачи (9)–(11). Только в этом случае формулы (12)–(18) будут иметь следующий вид:

$$\overline{q}_i=\frac{1}{1-\overline{\alpha}_{ij_*}},\ (i=\overline{1,m}),\ \ \omega^{sp}=\{j\mid x_j^{sp}=1\},$$

$$\Omega=\{1,2,...,n\}$$

$$\overline{r}_i=\sum_{j\in\omega^{sp}}\overline{\alpha}_{ij},\ (i=\overline{1,m}),\ \ \overline{q}_i=\frac{1}{1-\overline{r}_i},\ (i=\overline{1,m}),$$

$$\overline{Q}_j=\sum_{i=1}^{m}\overline{\alpha}_{ij}\overline{q}_i\ \ (j\in\Omega).$$

$$\underline{f}_j=\underline{c}_j\Big/\overline{Q}_j,\ (j\in\Omega),\ \ j_*=\underset{j\in\Omega}{\operatorname{argmax}}\left\{\underline{f}_j\right\}.$$

Используя эти величины субпессимистическое решение $X^{sp}=(x_1^{sp},x_2^{sp},...,x_n^{sp})$ задачи (6)–(8) (или (9)–(11)) строится аналогично построению субоптимистического решения $X^{so}=(x_1^{so},x_2^{so},...,x_n^{so})$. В результате получаем субпессимистическое значение f^{sp} функции (6), т.е. $f^{sp}=\sum_{j=1}^{n}\underline{c}_j x_j^{sp}$.

Отметим, что использованное нами в данной работе понятие нелинейного штрафа (цена) впервые было введено в работе [17] для задач булевого программирования. Необходимо отметить, что при построении субоптимистического или субпессимистического решений задачи (6)–(8) в правых частях системы (7) использовали фиксированные целые числа b_i $(b_i\in[\underline{b}_i,\overline{b}_i])$ $(i=\overline{1,m})$. С другой стороны, наилучшие субоптимистические и субпессимистические решения получаются после рассмотрения всех целых чисел в интервале $[\underline{b}_i,\overline{b}_i]$ $(i=\overline{1,m})$.Очевидно, что, если длина интервала $[\underline{b}_i,\overline{b}_i]$ $(i=\overline{1,m})$. достаточно большая, то придется решать огромное число задач. Поэтому с целью уменьшения числа решаемых задач, будем применять принцип дихотомии для интервалов $[\underline{b}_i,\overline{b}_i]$ $(i=\overline{1,m})$. Этот принцип изложен в пункте 3 настоящей работы.

Отметим, что для оценки погрешностей найденных субоптимистических и субпессимистических решений от оптимистического и пессимистического значения нами построена соответствующая мажорирующая функция типа Лагранжа в следующей форме

$$L^o(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=\sum_{j\in\omega^o}\overline{c}_j+\sum_{i=1}^{m}(b_i-\sum_{j\in\omega^o}\underline{a}_{ij})\lambda_i,$$

$$L^p(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=\sum_{j\in\omega^p}\underline{c}_j+\sum_{i=1}^{m}(b_i-\sum_{j\in\omega^p}\overline{a}_{ij})\lambda_i.$$

Здесь $\omega^o=\left\{j\mid \overline{c}_j-\sum_{i=1}^{m}\underline{a}_{ij}\lambda_i>0\right\}$, $\omega^p=\left\{j\mid \underline{c}_j-\sum_{i=1}^{m}\overline{a}_{ij}\lambda_i>0\right\}$,

$b_i\,(i=\overline{1,m})$ – фиксированные числа в интервале $[\underline{b}_i,\overline{b}_i]$ $(i=\overline{1,m})$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для оптимистического – f^o и пессимистического – f^p значений задачи (1)–(3) справедливы следующие соотношения.

$$f^o\le\min_{\lambda_i\ge o}L^o(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m),\ \ f^p\le\min_{\lambda_i\ge o}L^p(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m).$$

Очевидно, что $f^{so}\le f^o$, $f^{sp}\le f^p$. Из теоремы видно, что минимизируя функции $L^o(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ или $L^p(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$, можно найти верхние границы $\overline{f}^{so}$ и $\overline{f}^{sp}$ для f^o и f^p соответственно. Следовательно, относительные погрешности δ^{so} и δ^{sp} для субоптимистического и субпессимистического значений оцениваются соответственно следующим образом:

$$\delta^{so}\le\left(\overline{f}^{so}-f^{so}\right)\Big/\overline{f}^{so},\ \ \delta^{sp}\le\left(\overline{f}^{sp}-f^{sp}\right)\Big/\overline{f}^{sp}.$$

4 ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для оценки качества разработанных методов, они были запрограммированы на языке Delphi 7. Разработанные программы использовались при проведении ряда вычислительных экспериментов по решению задач различной размерности. Коэффициенты решенных задач являются случайными целыми числами, удовлетворяющими следующим условиям:

$$0 \le \underline{a}_{ij} \le 999,\ 0 < \overline{a}_{ij} \le 999,\ 0 < \underline{c}_j \le 999,\ 0 < \overline{c}_j \le 999,$$

$$i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.$$

Если оказывалось, что $\overline{a}_{ij} < \underline{a}_{ij}$ или $\overline{c}_j < \underline{c}_j$, то принимаем $\overline{a}_{ij} := \underline{a}_{ij} + 10$ и $\overline{c}_j := \underline{c}_j + 10$ соответственно.

Кроме того, правые части ограничений $\underline{b}_i$ и $\overline{b}_i$ $(i = \overline{1, m})$ определяются как

$$\underline{b}_i := \left[\frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij} \right],\ \overline{b}_i := \left[\frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} \right]\ (i = \overline{1, m}).$$

5 РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты проведенных экспериментов представлены в таблицах 1–6, где

$$\delta_M^{so} = \left(\overline{f}^{so} - f_M^{so} \right) \Big/ \overline{f}^{so},\ \delta_C^{so} = \left(\overline{f}^{so} - f_C^{so} \right) \Big/ \overline{f}^{so},$$

$$\delta_M^{sp} = \left(\overline{f}^{sp} - f_M^{sp} \right) \Big/ \overline{f}^{sp},\ \delta_C^{sp} = \left(\overline{f}^{sp} - f_C^{sp} \right) \Big/ \overline{f}^{sp},$$

$$b_M^{so} = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\underline{b}_i - b_i^{so}(M) \right) \right),\ b_C^{so} = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\underline{b}_i - b_i^{so}(C) \right) \right),$$

$$b_M^{sp} = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\overline{b}_i - b_i^{sp}(M) \right) \right),\ b_C^{sp} = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\overline{b}_i - b_i^{sp}(C) \right) \right),$$

$$b_i^{so}(M) = \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij} x_j^{so}(M),\ b_i^{so}(C) = \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij} x_j^{so}(C),$$

$$b_i^{sp}(M) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j^{sp}(M),\ b_i^{sp}(C) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j^{sp}(C).$$

Здесь

$$X^{so}(M) = \left(x_1^{so}(M), x_2^{so}(M), \ldots, x_n^{so}(M) \right),$$

$$X^{so}(C) = \left(x_1^{so}(C), x_2^{so}(C), \ldots, x_n^{so}(C) \right),$$

$$X^{sp}(M) = \left(x_1^{sp}(M), x_2^{sp}(M), \ldots, x_n^{sp}(M) \right),$$

$$X^{sp}(C) = \left(x_1^{sp}(C), x_2^{sp}(C), \ldots, x_n^{sp}(C) \right).$$

являются субоптимистическим и субпессимистическим решениями, построенными методами максимального приращения и нелинейного штрафа, соответственно.

Таблица 1 – Значения функции (1) и их погрешности $(m \times n = 20 \times 500)$

N	1	2	3	4	5
f_M^{so}	4072,00	4046,00	4059,00	3952,00	4038,00
f_C^{so}	4099,00	4065,00	4082,00	3971,00	4048,00
$\overline{f}^{so}$	4113,00	4087,00	4111,00	3998,00	4067,00
f_M^{sp}	804,00	789,00	800,00	778,00	782,00
f_C^{sp}	811,00	798,00	813,00	793,00	793,00
$\overline{f}^{sp}$	826,00	815,00	827,00	807,00	811,00
δ_M^{so}	0,0100	0,0100	0,0126	0,0115	0,0071
δ_C^{so}	0,0053	0,0054	0,0083	0,0068	0,0059
δ_M^{sp}	0,0266	0,0319	0,0326	0,0359	0,0358
δ_C^{sp}	0,0182	0,0209	0,0169	0,0173	0,0222
b_M^{so}	11,45	16,90	16,35	20,95	11,60
b_C^{so}	10,10	18,85	20,35	23,40	16,75
b_M^{sp}	35,50	35,60	32,30	36,95	47,90
b_C^{sp}	34,95	36,70	36,30	33,80	47,20

Таблица 2 – Значения функции (1) и их погрешности $(m \times n = 20 \times 1000)$

N	1	2	3	4	5
f_M^{so}	8200,00	8182,00	8104,00	8081,00	8137,00
f_C^{so}	8251,00	8248,00	8171,00	8127,00	8192,00
$\overline{f}^{so}$	8276,00	8268,00	8195,00	8154,00	8218,00
f_M^{sp}	1632,00	1617,00	1616,00	1576,00	1606,00
f_C^{sp}	1655,00	1643,00	1635,00	1602,00	1623,00
$\overline{f}^{sp}$	1670,00	1660,00	1656,00	1617,00	1645,00
δ_M^{so}	0,0092	0,0104	0,0111	0,0090	0,0099
δ_C^{so}	0,0039	0,0036	0,0033	0,0038	0,0032
δ_M^{sp}	0,0228	0,0259	0,0242	0,0254	0,0237
δ_C^{sp}	0,0090	0,0033	0,0127	0,0093	0,0134
b_M^{so}	17,40	34,55	33,75	35,75	22,80
b_C^{so}	18,00	23,60	20,80	32,75	1685,00
b_M^{sp}	41,80	29,10	40,05	40,00	34,70
b_C^{sp}	36,75	38,10	47,20	39,20	32,05

Таблица 3 – Значения функции (1) и их погрешности $(m \times n = 50 \times 500)$

N	1	2	3	4	5
f_M^{so}	3943,00	3968,00	4031,00	4084,00	4007,00
f_C^{so}	3961,00	3986,00	4037,00	4103,00	4011,00
$\overline{f}^{so}$	3988,00	4025,00	4075,00	4137,00	4046,00
f_M^{sp}	776,00	775,00	765,00	796,00	782,00
f_C^{sp}	783,00	782,00	761,00	798,00	776,00
$\overline{f}^{sp}$	798,00	801,00	788,00	823,00	804,00
δ_M^{so}	0,0113	0,0142	0,0108	0,0128	0,0096
δ_C^{so}	0,0070	0,0107	0,0101	0,0104	0,0087
δ_M^{sp}	0,0276	0,0325	0,0292	0,0328	0,0274
δ_C^{sp}	0,0188	0,0237	0,0343	0,0304	0,0348
b_M^{so}	31,8400	38,3800	30,9400	34,9400	31,4800
b_C^{so}	31,66	41,12	35,52	33,24	35,54
b_M^{sp}	51,4200	61,7600	64,2400	49,9800	50,0600
b_C^{sp}	45,66	52,94	86,84	60,82	74,08

Таблица 4 – Значения функции (1) и их погрешности $(m \times n = 50 \times 1000)$

N	1	2	3	4	5
f_M^{so}	8148,00	7984,00	8244,00	7970,00	8099,00
f_C^{so}	8195,00	8015,00	8258,00	8010,00	8106,00
$\overline{f}^{so}$	8243,00	8063,00	8309,00	8056,00	8169,00
f_M^{sp}	1593,00	1575,00	1620,00	1560,00	1581,00
f_C^{sp}	1609,00	1583,00	1615,00	1566,00	1597,00
$\overline{f}^{sp}$	1633,00	1614,00	1654,00	1592,00	1623,00
δ_M^{so}	0,0115	0,0098	0,0078	0,0107	0,0086
δ_C^{so}	0,0070	0,0068	0,0064	0,0057	0,0081
δ_M^{sp}	0,0245	0,0242	0,0206	0,0201	0,0259
δ_C^{sp}	0,0147	0,0192	0,0236	0,0163	0,0160
b_M^{so}	42,6200	55,4800	34,8400	52,2400	44,1600
b_C^{so}	43,06	52,96	43,98	51,60	50,86
b_M^{sp}	71,3400	74,8600	69,9800	78,1600	72,9800
b_C^{sp}	65,86	85,08	101,02	82,86	74,92

Таблица 5 – Показатели эффективности методов

$m \times n$	20×100	20×200	20×500	20×1000
N_C^{so}	2	5	5	5
N_M^{so}	1	0	0	0
N_C^{sp}	3	1	5	5
N_M^{sp}	2	2	0	0

Таблица 6 – Показатели эффективности методов

$m \times n$	50×100	50×200	50×500	50×1000
N_C^{so}	5	4	5	5
N_M^{so}	0	0	0	0
N_C^{sp}	2	3	3	4
N_M^{sp}	3	2	2	1

6 ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты проведенных экспериментов, представленые в таблицах 1–6, еще раз подтверждают высокую эффективность разработанных методов.

Из выше приведенных таблиц видно, что для 40 случайно выбранных задач значения функции (1), найденные методом нелинейного штрафа, в большинстве случаев лучше, чем значения, определенные методом максимального приращения (эти методы изложены в разделе 3). Однако, в нескольких случаях субпессимистические значения найденные методом максимального приращения, были лучшими. Для задач размерностей 20×100, 20×200, 50×200 оба метода дали одинаковые значения. Поэтому в таблицах 5 и 6 число соответствующих задач меньше пяти. С другой стороны, относительные погрешности субоптимистических значений в методе максимального приращения и нелинейного штрафа меняются в интервалах [0,0071, 0,0428] и [0,0032, 0,0398], соответственно. А для субпессимистических значений, соответственно, находятся в интервалах [0,0201, 0,1195] и [0,0033, 0,1081].

ВЫВОДЫ

Исходя из таблицы и обсуждений можно сделать следующие выводы. В работе решена задача булевого программирования с интервальными коэффициентами. Введены понятия субоптимистического и субпессимистического решений этой задачи. Для построения этих решений нами предложены два метода, названные «Метод максимального приращения функционала» и «Метод нелинейного штрафа». При вычислительных экспериментах метод нелинейного штрафа в большинстве случаев дает меньшие относительные погрешности. Поэтому можно считать метод нелинейного штрафа более эффективным. Кроме того, заданные в правых частях системы (2) числа $\overline{b_i}$ $(i = \overline{1,m})$ уменьшены в среднем на 11–55 единиц для субоптимистических решений и на 16–78 единиц для субпессимистических решений. Это дает возможность использовать меньше выделенных ресурсов для реальных экономических задач.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках госбюджетной научно-исследовательской темы Института систем управления НАН Азербайджана «Разработка методов решения, алгоритмов и программных средств для решения различных классов задач целочисленного программирования» (номер гос. регистрации № 0101 Аз 00736). Отметим, что часть этой работы рассмотрена авторами в работах [18, 19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Libura M. Integer programming problems with inexact objective function / M. Libura // Contr. And Cybern. – 1980. – Vol. 9, № 4. – P. 189–202.
2. Ватолин А. А. О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами / А. А. Ватолин // ЖВМ и МФ. – 1984. – Т. 24, № 11. – С. 1629–1637.
3. Семенова Н. В. Решение одной задачи обобщенного целочисленного программирования / Н. В. Семенова // Кибернетика. – 1984. – № 5. – С. 25–31.
4. Леонтьев В. К. Устойчивость решений в задачах линейного булева программирования. / В. К. Леонтьев, К. Х. Мамутов // ЖВМ и МФ. – 1988. – Т. 28, № 10.– С. 1475–1481.
5. Рощин В. А. Вопросы решения и исследования одного класса задач неточного целочисленного программирования / В. А. Рощин, Н. В. Семенова, И. В. Сергиенко // Кибернетика. – 1989. – № 2. – С. 42–47.
6. Рощин В. А. Декомпозиционный подход к решению некоторых задач целочисленного программирования с неточными данными / В. А. Рощин, Н. В. Семенова, И. В. Сергиенко // ЖВМ и МФ. – 1990. – Т. 30, №5. – С. 786–791.
7. Сергиенко Т. И. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач / Т. И.Сергиенко, Л. Н. Козерацкая, Т. Т. Лебедева. – К. : Наукова думка, 1995. – 170 с.
8. Emelichev V. A. On the radius of stability of a vector problem of linear Boolean programming / V. A. Emelichev, V. N. Krichko, D. P. Podkopaev // Discrete Math. Appl. – 2000. – Vol. 10. – P. 103–108.
9. Devyaterikova M. V. *L*-class enumeration algorithms for knapsack problem with interval data / M. V. Devyaterikova, A. A Kolokolov // International Conference on Operations Research: Book of Abstracts. – Duisburg, 2001.
10. Девятерикова М. В. Алгоритмы перебора *L*-классов для задачи о рюкзаке с интервальными данными / М. В. Девятерикова, А. А. Колоколов. – Омск : Ом ГУ, 2001. –20 с.
11. Devyaterikova M. V. *L*-class enumeration algorithms for one discrete production planning problem with interval input data / M. V. Devyaterikova, A. A. Kolokolov, A. P. Kolosov // Computers and Operations Research. – 2009. – Vol. 36, Issue 2. – P. 316–324.
12. Девятерикова М. В. Алгоритмы перебора *L*-классов для булевой задачи о рюкзаке с интервальными данными / М. В. Девятерикова, А. А. Колоколов, А. П. Колосов // Материалы III Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономическое приложение». – Омск : Изд-во Ом ГТУ, 2006. – С. 87.
13. Девятерикова М. В. Решение задачи о рюкзаке с интервальными данными на основе перебора *L*-классов / М. В. Девятерикова, А. А. Колоколов, А. П. Колосов // Материалы III международной конференции «Танаевские чтения». – Минск, 2007. – С.51–55.
14. Emelichev V. A. Stability criteria in vector combinatorial bottleneck problems in terms of binary realitions / V. A. Emelichev, K.G.Kuzmin // Cybernetics and Systems Analysis. – 2008. – Vol. 44, № 3. – P. 397–404.
15. Emelichev V.A. Quantitative stability analysis for vector problems of 0–1 programming / V. A. Emelichev, D. P. Podkopaev // Discrete Optimitation. – 2010. – №7. – P. 48–63.
16. Мамедов К. Ш. Один метод решения нечеткой задачи о ранце / К.Ш.Мамедов, С.Я. Гусейнов // Современные проблемы информатизации Кибернетики и Информационные проблемы : респ. конф.: материалы. – Баку, 2003. – Т. 3. – С. 10–13. (на азерб. языке)
17. Бабаев Дж. А. Методы построения субоптимальных решений многомерной задачи о ранце / Дж. А. Бабаев, К. Ш. Мамедов, М. Г. Мехтиев // ЖВМ и МФ. – 1978. – Т. 28, № 6. – С. 1443–1453.
18. Мамедов К. Ш. Понятия субоптимических и субпессимистических решений и методы построения их в задаче о ранце с интервальными данными / К. Ш. Мамедов, А. Г. Мамедова, С. Я. Гусейнов // Изв. НАН Азербайджана. – 2013. – № 6. – С. 164–173. (на азерб. языке)
19. Мамедов К. Ш. Методы построения субоптимических и субпессимистических решений в задаче Булевого программирование с интервальными данными / К. Ш. Мамедов, А. Г. Мамедова // Изв. НАН Азербайджана. 2014. – № 3. – С. 125–131.

Статья поступила в редакцию 10.02.2016.
После доработки 27.02.2016.

Мамедов. К. Ш.[1], Мамедова. А. Г.[2]

[1]Д-р фіз.-мат. наук, професор Бакинського Державного Університету і зав. відділом Інституту Систем Керування НАН Азербайджану, Азербайджан, Баку

[2]Докторант, науковий співробітник Інституту Систем Керування НАН Азербайджану, Азербайджан, Баку

ПОНЯТТЯ СУБОПТИМІСТИЧНОГО І СУБПЕСИМІСТИЧНОГО РІШЕНЬ ТА ПОБУДОВА ЇХ В ІНТЕРВАЛЬНІЙ ЗАДАЧІ БУЛЕВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У роботі розглянута інтервальна задача булевого програмування. Дано деякі економічні інтерпретації цієї задачі, у результаті яких побудована економіко-математична модель. Уведено поняття припустимого, оптимістичного, песимістичного, субоптимістичного і субпесимістичного рішень задачі булевого програмування з цілочисленими інтервальними даними. Розроблено два алгоритми побудови субоптимістичного і субпесимістичного рішень цієї задачі. Природно, що ці рішення можуть відрізнятися від оптимістичного і песимістичного рішень. Тому необхідно оцінити відносні погрішності знайдених субоптимістичних і субпесимістичних рішень від оптимістичного і песимістичного, відповідно. З цією метою побудована мажорувальна функція типу Лагранжа. Доведено, що мінімальне значення цієї функції є верхньою межею оптимістичного і песимістичного значень цільової функції, відповідно. Мінімізацією цієї функції знаходиться верхня межа субоптимістичного і субпесимістичного значень цільової функції. Проведено обчислювальні експерименти з вирішення задача різної розмірності.

Ключові слова: задача булевого програмування з целочисленими інтервальними даними, оптимістичне рішення, песимістичне рішення, субоптимістичне рішення, субпесимістичне рішення, максимальне збільшення функціонала, нелінійний штраф, функція Лагранжа, обчислювальні експерименти.

Mamedov K. Sh.[1], Mamedova A. H.[2]
[1]Dr.Sc., Professor, Head of department of Institute of Control Systems, Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan
[2]Scientific Worker of Institute of Control Systems, Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan

DEFINITIONS OF SUBOPTIMISTIC AND SUBPESSIMISTIC SOLUTIONS AND THEIR CONSTRUCTION IN THE INTERVAL BOOLEAN PROGRAMMING PROBLEM

The work considers an interval examples of Bulian programming.Given some economic interpretation to this problem which result in the constructed economic-mathematical model.Introduced the definitions of optimistic, pessimistic, and suboptimistic, subpessimistic solutions for the Boolean programming problem with integer interval data are introduced. On the basis of the economic interpretation of the problem two algorithms are developed for the constructing of the suboptimistic and subpessimistic solutions of this task. Of course, when solutions may different from suboptimistic and subpessimistic solutions.It is therefore necessary to estimate the relative error of the found to estimate the error of the suboptimistic and subpessimistic solutions from optimistic and pessimistic solutions appropriately. For this purpose Lagrange type majoring function is constructed. It is proved, that the minimum value of this function is the upper bound of the optimistic and pessimistic values of the objective function appropriately. Minimization of this function is in the upper border of the suboptimistic and subpessimistic values †of the performance function. Numerous computational experiments on the examples with different dimensions are provided.

Keywords: Boolean programming problem, integer interval data, optimistic solution, pessimistic solution, suboptimistic solution, subpessimistic solution, non-linear penalty function, Lagrange function, computational experiments.

REFERENCES

1. Libura M. Integer programming problems with inexact objective function, *Contr. And Cybern.,* 1980, Vol. 9, No. 4, pp. 189–202.
2. Vatolin A. A. O zadachah linejnogo programmirovanija s interval'nymi kojefficientami, *ZhVM i MF*, 1984, Vol. 24, No. 11, pp. 1629–1637.
3. Semenova N. V. Reshenie odnoj zadachi obobshhennogo celochislennogo programmirovanija, *Kibernetika*, 1984, No. 5, pp. 25–31.
4. Leont'ev V. K., Mamutov K. H. Ustojchivost' reshenij v zadachah linejnogo buleva programmirovanija, *ZhVM i MF*, 1988, Vol. 28, No. 10, pp. 1475–1481.
5. Roshhin V. A., Semenova N. V., Sergienko I. V. Voprosy reshenija i issledovanija odnogo klassa zadach netochnogo celochislennogo programmirovanija, *Kibernetika*, 1989, No. 2, pp. 42–47.
6. Roshhin V. A., Semenova N. V., Sergienko I. V. Dekompozicionnyj podhod k resheniju nekotoryh zadach celochislennogo programmirovanija s netochnymi dannymi, *ZhVM i MF*, 1990, Vol. 30, No. 5, pp. 786–791.
7. Sergienko T. I., Kozerackaja L. N., Lebedeva T. T. Issledovanie ustojchivosti i parametricheskij analiz diskretnyh optimizacionnyh zadach. Kiev, Naukova dumka, 1995, 170 p.
8. Emelichev V. A., Krichko V. N., Podkopaev D. P. On the radius of stability of a vector problem of linear Boolean programming, *Discrete Math. Appl*, 2000, Vol. 10, pp. 103–108.
9. Devyaterikova M. V., Kolokolov A. A. L-class enumeration algorithms for knapsack problem with interval data, *International Conference on Operations Research: Book of Abstracts*. Duisburg, 2001.
10. Devjaterikova M. V., Kolokolov A. A. Algoritmy perebora L-klassov dlja zadachi o rjukzake s interval'nymi dannymi. Omsk, Om GU, 2001, 20 p.
11. Devyaterikova M. V., Kolokolov A. A., Kolosov A. P. L-class enumeration algorithms for one discrete production planning problem with interval input data, *Computers and Operations Research*, 2009, Vol. 36, Issue 2, pp. 316–324.
12. Devjaterikova M. V., Kolokolov A. A., Kolosov A. P. Algoritmy perebora L-klassov dlja bulevoj zadachi o rjukzake s interval'nymi dannymi, *Materialy III Vserossijskoj konferencii «Problemy optimizacii i jekonomicheskoe prilozhenie»*. Omsk, Izd-vo Om GTU, 2006, P. 87.
13. Devjaterikova M. V., Kolokolov A. A, Kolosov A. P. Reshenie zadachi o rjukzake s interval'nymi dannymi na osnove perebora L-klassov, *Materialy III mezhdunarodnoj konferencii «Tanaevskie chtenija»*. Minsk, 2007, pp. 51–55.
14. Emelichev V. A., Kuzmin K. G. Stability criteria in vector combinatorial bottleneck problems in terms of binary realitions, *Cybernetics and Systems Analysis*, 2008, Vol. 44, No. 3, pp. 397–404.
15. Emelichev V. A., Podkopaev D. P. Quantitative stability analysis for vector problems of 0–1 programming, *Discrete Optimitation*, 2010, No. 7, pp. 48–63.
16. Mamedov K. Sh., Gusejnov S. Ja. Odin metod reshenija nechetkoj zadachi o rance / K.Sh.Mamedov, *Sovremennye problemy informatizacii Kibernetiki i Informacionnye problemy : resp. konf.: materialy*. Baku, 2003, Vol. 3, pp. 10–13. (na azerb. jazyke)
17. Babaev Dzh. A., Mamedov K. Sh., Mehtiev M. G. Metody postroenija suboptimal'nyh reshenij mnogomernoj zadachi o rance, *ZhVM i MF*, 1978, Vol. 28, No. 6, pp. 1443–1453.
18. Mamedov K. Sh., Mamedova A. G., Gusejnov S. Ja. Ponjatija suboptimicheskih i subpessimisticheskih reshenij i metody postroenija ih v zadache o rance s interval'nymi dannymi, *Izv. NAN Azerbajdzhana*, 2013, No. 6, pp. 164–173. (na azerb. jazyke)
19. Mamedov K. Sh., Mamedova A. G. Metody postroenija suboptimicheskih i subpessimisticheskih reshenij v zadache Bulevogo programmirovanie s interval'nymi dannymi, *Izv. NAN Azerbajdzhana*, 2014, No. 3, pp. 125–131.