УДК 62–50:519.7/8

Левин В. И.

Д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Пензенского государственного технологического университета, Пенза, Россия

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрены задачи, связанные с вычислением производных от интервально-определенных функций. Эти задачи актуальны при изучении систем с присущей им той или иной степенью неопределенности (недетерминированные системы). Именно, речь идет о простейших системах, которые описываются элементарными интервально-определенными функциями. Соответственно этому решаются задачи нахождения производных от элементарных функций указанного вида. При этом используются полученные ранее формулы и приемы вычисления производных от любых интервально-определенных функций. Приведены основные определения, связанные с производными от интервально-определенных функций, а также формулы двух типов, которые позволяют вычислять указанные интервальные производные. Формулы первого типа выражают производные в закрытой интервальной форме, которая требует использования аппарата интервальной математики. Формулы второго типа выражают производные в открытой интервальной форме, в виде двух формул, первая из которых выражает нижнюю границу интервала, представляющего искомую производную, а вторая – верхнюю границу, и вычисление производной от интервальной функции сводится к вычислению двух вещественных функций. С помощью изложенного математического аппарата были найдены производные от следующих элементарных интервальных функций: интервальной константы, интервальной степенной функции, интервальной показательной функции, интервальной экспоненциальной функции, интервальной логарифмической и натурально-логарифмической функций, интервальных тригонометрических функций (синуса, косинуса, тангенса и котангенса), интервальных обратных тригонометрических функций (арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса). Формулы всех производных даны в открытой интервальной форме. Указано отличие интервальных производных интервальных элементарных функций от классических производных соответствующих обычных элементарных функций.

Ключевые слова: интервал, интервальная функция, интервальная производная, интервально-дифференциальное исчисление, интервальные вычисления.

НОМЕНКЛАТУРА

$x_1, x_2, ..., x_n$ – вещественные независимые переменные;

$y_1, y_2, ..., y_m$ – вещественные зависимые переменные;

f, f_1, f_2 – детерминированные функции;

$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n$ – интервальные независимые переменные;

$\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, ..., \tilde{y}_m$ – интервальные зависимые переменные;

$\tilde{f} = [f_1, f_2]$ – интервальная функция;

$\tilde{f}'(\tilde{x})$ – интервальная производная;

$\tilde{f}^{(n)}(\tilde{x})$ – интервальная производная n-го порядка.

ВВЕДЕНИЕ

Проектирование и анализ свойств различных систем требует соответствующего, адекватного рассматриваемой задаче математического аппарата. Если изучаемая система полностью определенная (детерминированная), то решаемая задача и, соответственно, используемый для ее решения математический аппарат обычно достаточно просты. К сожалению, встречающиеся на практике системы обычно характеризуются той или иной степенью неопределенности (недетерминированы). Для исследования и построения таких систем применяют более сложный специализированный математический аппарат – теорию вероятностей, нечеткие множества, интервальную математику [1–3].

Так, в работах [4, 5] автором был предложен новый математический аппарат для проектирования и исследования недетерминированных систем – недетерминистское (интервальное) дифференциальное исчисление. Этот аппарат является аналогом классического дифференциального исчисления Ньютона-Лейбница [6]. Он позволяет переносить основные идеи классического дифференциального исчисления на неполностью определенные функции, задаваемые с точностью до интервалов возможных значений переменных. Однако, несмотря на сходство основных исходных идей двух исчислений, предложенное исчисление по форме совсем не похоже на классическое дифференциальное исчисление Ньютона–Лейбница, что является следствием неопределенности интервальных функций, фигурирующих в интервальной математике. Кроме того, предложенное интервальное дифференциальное исчисление, по нашему мнению, более адекватно реальным объектам и процессам, чем классическое дифференциальное исчисление [7].

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как известно из классического дифференциального исчисления [6], нахождение производной от любой функции базируется на 1) представлении этой функции в виде соответствующей суперпозиции так называемых элементарных функций; 2) переходе в представлении от функций к производным, с использованием теорем дифференциального исчисления (производная суммы функций, производная произведения функций и т.д.). 3) подстановке вместо производных элементарных функций их выражений, полученных ранее. Для осуществления процедуры составляют таблицы производных элементарных функций.

Сходная описанной процедура может быть полезна и при нахождении производных от интервальных функций, изучаемых в интервальном дифференциальном исчислении. Конечно, при этом необходимо учитывать большое отличие свойств и форм представления обыч-

DOI 10.15588/1607-3274-2016-4-3

ных и интервальных функций и производных от них. В соответствии с этим основными задачами в данной статье являются: 1) составление полного набора производных от всех интервальных элементарных функций; 2) выявление различий производных от интервальных элементарных функций и производных от детерминированных элементарных функций.

2 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Мы будем использовать в качестве вспомогательных сведений прежде всего основные математические сведения из алгебры интервальных чисел [3, 4]. В этой алгебре в качестве операндов берутся замкнутые вещественные интервалы, определяемые как множества всех вещественных чисел между нижней и верхней границами интервала, включая сами эти границы

$$\tilde{a} \equiv [a_1, a_2] \equiv \{a \mid a_1 \le a \le a_2\}.$$

Эти операнды естественно называть интервальными числами. Операции $\circ$ над интервальными числами $\tilde{a} = [a_1, a_2], \tilde{b} = [b_1, b_2]$ вводятся как прямые теоретико-множественные обобщения соответствующих операций над вещественными числами a, b, т.е.

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} = \{a \circ b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}.$$

Таким образом, основные алгебраические операции над интервальными числами определяются следующими формулами:

$$\tilde{a} + \tilde{b} = \{a + b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \tilde{a} - \tilde{b} = \{a - b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\},$$
$$k \cdot \tilde{a} = \{k \cdot a \mid a \in \tilde{a}\},$$
$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \{a \cdot b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \tilde{a} / \tilde{b} = \{a / b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}.$$

На основе определений операций над интервальными числами можно вывести следующие формулы для вычисления результатов этих операций [3]:

$$\tilde{a} + \tilde{b} \equiv [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2],$$
$$\tilde{a} - \tilde{b} \equiv [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1],$$
$$k \cdot \tilde{a} \equiv k \cdot [a_1, a_2] = \begin{cases} [ka_1, ka_2], & k > 0, \\ [ka_2, ka_1], & k < 0, \end{cases}$$
$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} \equiv [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min_{i,j}(a_i \cdot b_j), \max_{i,j}(a_i \cdot b_j)],$$
$$\tilde{a} / \tilde{b} \equiv [a_1, a_2] / [b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot [1 / b_2, 1 / b_1].$$

В качестве вспомогательного нам потребуется еще понятие интервальной функции [4, 5, 7], которая вводится как однозначное отображение множества замкнутых вещественных интервалов $\{\tilde{x}\}, \tilde{x} = [x_1, x_2]$ на множество замкнутых вещественных интервалов $\{\tilde{y}\}, \tilde{y} = [y_1, y_2]$ этого же типа. Символически интервальная функция записывается в виде

$$\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}),$$

где, аналогично числовым функциям, $\tilde{x}$ называется интервальной независимой переменной (интервальным аргументом), $\tilde{y}$ – интервальной зависимой переменной, $\tilde{f}$ – интервальной функцией.

3 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Базовое понятие интервальной функции [4, 5, 7] вводится как однозначное отображение множества $\{\tilde{x}\}$ замкнутых вещественных интервалов $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ на множество $\{\tilde{y}\}$ замкнутых вещественных интервалов $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ такого же вида. Символически интервальная функция записывается в виде

$$\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}) \text{ или } \tilde{y} = [y_1, y_2] = [f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})], \qquad (1)$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная, $\tilde{f} = [f_1, f_2]$ – интервальная функция, с ее нижней f_1 и верхней f_2 граничными функциями. Второе базовое понятие, используемое далее в настоящей статье – понятие предела интервальной функции.

Независимая интервальная переменная $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ интервальной функции (1) по определению неограниченно приближается к некоторому интервалу (пределу) $\tilde{x}^\circ = [x_1^\circ, x_2^\circ]$, если в процессе этого изменения x_1 неограниченно приближается к x_1°, а x_2 к x_2°. Это записывается:

$$\tilde{x} \to \tilde{x}^\circ \equiv (x_1 \to x_1^\circ, x_2 \to x_2^\circ). \qquad (2)$$

Аналогично определяется неограниченное приближение зависимой интервальной переменной $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ интервальной функции (1) к интервалу (пределу) $\tilde{y}^\circ = [y_1^\circ, y_2^\circ]$:

$$\tilde{y} \to \tilde{y}^\circ \equiv (y_1 \to y_1^\circ, y_2 \to y_2^\circ). \qquad (3)$$

Если независимая интервальная переменная $\tilde{x}$ своим неограниченным приближением к интервалу-пределу $\tilde{x}^\circ$ вызывает неограниченное приближение зависимой интервальной переменной $\tilde{y}$ к интервалу-пределу $\tilde{y}^\circ$, говорится, что предел интервальной функции (1) при $\tilde{x}$, стремящемся к $\tilde{x}^\circ$, равен $\tilde{y}^\circ$, или символически

$$\lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}^\circ} \tilde{y} = \tilde{y}^\circ \text{ или } \lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}^\circ} \tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{y}^\circ. \qquad (4)$$

В случае если интервальная функция $\tilde{f}$ (1) непрерывна, т.е. ее нижняя f_1 и верхняя f_2 граничные функции являются непрерывными функциями нижней x_1 и верхней x_2 границ независимой переменной $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, то предел функции $\tilde{f}$ равен ее значению в предельной точке $\tilde{x}^\circ$ аргумента $\tilde{x}$, или символически

$$\lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}^\circ} \tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x}^\circ). \qquad (5)$$

Основное для нас понятие интервальной производной вводится аналогично понятию обычной производной функции [6]. Рассмотрим произвольную интервальную функцию $\tilde{f}$ вида (1). Будем считать ее непрерывной. Зафиксируем значение независимой переменной $\tilde{x} = \tilde{x}^\circ = [x_1^\circ, x_2^\circ]$. Этому значению, в силу непрерывности функции, соответствует некоторое фиксированное значение самой функции $\tilde{y}^\circ = \tilde{f}(\tilde{x}^\circ)$. Зададим приращение независимой и зависимой переменных функции относительно этих фиксированных значений

$$\Delta\tilde{x} = \tilde{x} - \tilde{x}^\circ,$$
$$\Delta\tilde{y} = \tilde{y} - \tilde{y}^\circ = \tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}^\circ) \qquad (6)$$

и составим отношение второго приращения к первому

$$\Delta\tilde{y}/\Delta\tilde{x} = (\tilde{y} - \tilde{y}^\circ)/(\tilde{x} - \tilde{x}^\circ) = (\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}^\circ))/(\tilde{x} - \tilde{x}^\circ). \qquad (7)$$

Предел отношения (7) при неограниченном приближении независимой переменной $\tilde{x}$ к ее фиксированному предельному значению $\tilde{x}^\circ$, если он существует, называется интервальной производной функцией от исходной интервальной функции $\tilde{f}(\tilde{x})$ (1) в точке $\tilde{x}^\circ$ и обозначается как $\tilde{y}'_{\tilde{x}^\circ}$ или $\tilde{f}'_{\tilde{x}^\circ}(\tilde{x})$. Таким образом,

$$\tilde{y}'_{\tilde{x}^\circ} \equiv \tilde{f}'_{\tilde{x}^\circ}(\tilde{x}) = \lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}^\circ} \Delta\tilde{y}/\Delta\tilde{x}, \text{ где } \Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y} \text{ из (6).} \qquad (8)$$

Доказано [4, 5, 7], что для существования у непрерывной интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$ в точке $\tilde{x}^\circ$ интервальной производной необходимо и достаточно, чтобы в этой точке и некоторой ее окрестности независимая $\tilde{x}$ и зависимая $\tilde{y}$ переменные были существенно интервальными, а именно, не вырождались в точку.

Как и в случае обычной производной, понятие интервальной производной можно обобщить путем повторного выполнения операции взятия производной.

При этом из интервальной производной 1-го порядка $\tilde{y}'_{\tilde{x}}$ получается интервальная производная 2-го порядка $\tilde{y}''_{\tilde{x}}$, из последней – производная 3-го порядка $\tilde{y}'''_{\tilde{x}}$ и т.д. Согласно введенным определениям интервальной производной любого порядка, все интервальные производные, в том числе и исходная интервальная функция, при любом численном значении аргумента $\tilde{x}$ как интервала возможных значений $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ также принимают численные значения в виде некоторого интервала значений. Поэтому вычисление интервальной функции и интервальной производной от нее любого порядка заключается в вычислении нижних и верхних граничных функций соответствующих интервальных функций. Вычисление функции $\tilde{f}$ выполняется по правилу (1), задающем эту функцию в виде пары «нижняя f_1 и верхняя f_2 граничные функции». Вычисление производной n-го порядка $\tilde{y}^{(n)}_{\tilde{x}} = \tilde{f}^{(n)}_{\tilde{x}}(\tilde{x})$ от интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$ можно выполнять с помощью формулы [7]

$$\tilde{y}^{(n)}_{\tilde{x}} = \tilde{f}^{(n)}_{\tilde{x}}(\tilde{x}) = [\tilde{f}^{(n)}_{1,\tilde{x}}(\tilde{x}), \tilde{f}^{(n)}_{2.,\tilde{x}}(\tilde{x})], \qquad (9)$$

где $\tilde{f}^{(n)}_{1,\tilde{x}}$ и $\tilde{f}^{(n)}_{2,\tilde{x}}$ – соответственно нижняя и верхняя граничные функции интервальной производной $\tilde{f}^{(n)}_{\tilde{x}}$ n-го порядка от исходной интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$. Граничные функции в формуле (9) выражаются в таком виде

$$\tilde{f}^{(n)}_{1,\tilde{x}}(\tilde{x}) = -2^{n-1}(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)^n,$$
$$\tilde{f}^{(n)}_{2,\tilde{x}}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)^n, \qquad (10)$$

где x_1, x_2 – нижняя и верхняя границы интервального аргумента $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ в точке взятия производной от функции $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$, y_1, y_2 – нижняя и верхняя границы интервальной зависимой переменной $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ этой функции в той же точке. Как следует из выражений (9), (10), интервальная производная любого порядка имеет вид интервала, который симметричен относительно нуля. Это позволяет записать в более простой форме выражение интервальной производной любого n-го порядка (9), (10):

$$\tilde{y}^{(n)}_{\tilde{x}}(\tilde{x}) = \tilde{f}^{(n)}_{\tilde{x}}(\tilde{x}) = [-f^{(n)}_{\tilde{x}}(\tilde{x}), f^{(n)}_{\tilde{x}}(\tilde{x})], \qquad (11)$$

где

$$f^{(n)}_{\tilde{x}}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)^n, \qquad (12)$$

а значения x_1, x_2, y_1, y_2 раскрыты в пояснениях к формуле (10).

Формулы (11), (12) позволяют находить интервальные производные любого порядка от любых интервальных функций. В том числе, они позволяют найти производные от элементарных интервальных функций.

4 РЕЗУЛЬТАТЫ

Согласно определению любая элементарная интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$ вида (1) получается из соответствующей вещественной элементарной функции $y = f(x)$ путем раздетерминизации ее аргумента x, зависимой переменной y и собственно функции f, т.е. преобразования в соответствующие интервальный аргумент $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, интервальную зависимую переменную $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ и интервальную функцию $\tilde{f} = [f_1, f_2]$. Определение производных от элементарных интервальных функций мы начнем с простейшей функции: интервальной константы.

Функция интервальная константа выражается в виде

$$\tilde{y} \equiv \tilde{c} = [c_1, c_2], \quad c_1 = \text{const}, \quad c_2 = \text{const}, \quad c_1 < c_2. \qquad (13)$$

Сравнивая формулу (13) с общим выражением (1) любой интервальной функции, видим, что интервальная константа – это интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = c_1, \quad y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = c_2. \qquad (14)$$

Подставив (14) в общие формулы интервальных производных (11), (12), мы получим выражение производной любого n-го порядка от интервальной константы $\tilde{y} = \tilde{c}$ в виде

$$\tilde{y}^{(n)} \equiv \tilde{c}^{(n)} = [c_1, c_2] = [-c^{(n)}_{\tilde{x}}(\tilde{x}), c^{(n)}_{\tilde{x}}(\tilde{x})], \qquad (15)$$

где $c^{(n)}_{\tilde{x}}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(c_2 - c_1)/(x_2 - x_1)^n$.

Как видно из выражения (15), интервальная производная любого n-го порядка от функции – интервальной константы $\widetilde{c}$ (13) не равна 0 – нулю (точнее, нулевому интервалу $\widetilde{0}=[0,0]$), в отличие от классической производной от вещественной константы, равной 0. Более того, эта производная не является постоянной величиной, а существенно зависит от аргумента $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$. Согласно формуле (15), она существует во всех точках $\widetilde{x}$, где $x_1 \neq x_2$, и монотонно убывает при увеличении разности x_2-x_1.

Интервальная степенная функция выражается в виде

$$\widetilde{y}=[y_1,y_2]=\widetilde{x}^m \equiv [x_1,x_2]^m, \qquad (16)$$

где $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\widetilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Будем считать, исходя из физических соображений, что в пределах одной (любой!) решаемой задачи переменная величина $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$ может быть только положительной (более общо – неотрицательной) или только отрицательной (более общо – неположительной), т.е. выполняется условие

$$x_1,x_2 \geq 0 \quad \text{или} \quad x_1,x_2 \leq 0. \qquad (17)$$

Тогда интервальную степенную функцию (16) можно записать в явном интервальном виде посредством следующей формулы:

$$\widetilde{y}=[y_1,y_2]=\begin{cases}[x_1^m,x_2^m], & \text{при } x_1,x_2 \geq 0 \text{ или } x_1,x_2 \leq 0,\ m \text{ нечетно;}\\ [x_2^m,x_1^m], & \text{при } x_1,x_2 \leq 0,\ m \text{ четно.}\end{cases} \qquad (18)$$

Сравнив выражение (18) с общим выражением любой интервальной функции (1) мы видим, что интервальная степенная функция есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют такой вид:

$$y_1=f_1(\widetilde{x})=f_1(x_1,x_2)=\begin{cases}x_1^m, & \text{при } x_1,x_2 \geq 0 \text{ или } x_1,x_2 \leq 0,\ m \text{ нечетно;}\\ x_2^m, & \text{при } x_1,x_2 \leq 0,\ m \text{ четно;}\end{cases}$$

$$y_2=f_2(\widetilde{x})=f_2(x_1,x_2)=\begin{cases}x_2^m, & \text{при } x_1,x_2 \geq 0 \text{ или } x_1,x_2 \leq 0,\ m \text{ нечетно;}\\ x_1^m, & \text{при } x_1,x_2 \leq 0,\ m \text{ четно.}\end{cases} \qquad (19)$$

Подставим (19) в общие формулы интервальных производных (11), (12). В результате получим выражение производной n-го порядка от интервальной степенной функции $\widetilde{y}=\widetilde{x}^m$ (16)

$$\widetilde{y}^{(n)}=(\widetilde{x}^m)^{(n)}=([x_1,x_2]^m)^{(n)}=[-f^{(n)}(\widetilde{x}),f^{(n)}(\widetilde{x})], \qquad (20)$$

где

$$f^{(n)}(\widetilde{x})=\begin{cases}2^{n-1}(x_2^m-x_1^m)/(x_2-x_1)^n, & \text{при } x_1,x_2 \geq 0 \text{ или } x_1,x_2 \leq 0,\ m \text{ нечетно;}\\ 2^{n-1}(x_1^m-x_2^m)/(x_2-x_1)^n, & \text{при } x_1,x_2 \leq 0,\ m \text{ четно.}\end{cases}$$

Как видно из формулы (20), в интервальной производной любого n-го порядка $(\widetilde{x}^m)^{(n)}$ от интервальной степенной функции $\widetilde{x}^m$ (16) при увеличении n показатель степени m не уменьшается, приближаясь к нулю, в отличие от классической производной от вещественной степенной функции, у которой этот эффект существует. Интервальная производная $(\widetilde{x}^m)^{(n)}$, как показано в (20), существует во всех точках $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$; она монотонно убывает с увеличением разности x_2-x_1.

Интервальная показательная функция выражается в виде

$$\widetilde{y}=[y_1,y_2]=a^{\widetilde{x}} \equiv a^{[x_1,x_2]}, \quad a>0, \qquad (21)$$

где $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\widetilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная функция $a^{\widetilde{x}}$ определяется в следующем виде

$$a^{\widetilde{x}}=\{a^x \mid x \in \widetilde{x}\}, \qquad (22)$$

в котором a^x – обычная показательная функция, которая монотонно возрастает. Это позволяет задать интервальную показательную функцию (21) в явном интервальном виде формулой

$$\widetilde{y} \equiv [y_1,y_2]=[a^{x_1},a^{x_2}], \quad a>0. \qquad (23)$$

Сравнив выражение (23) с общим выражением любой интервальной функции (1), устанавливаем, что интервальная показательная функция есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой принимают следующий вид:

$$y_1=f_1(\widetilde{x})=f_1(x_1,x_2)=a^{x_1},\ y_2=f_2(\widetilde{x})=f_2(x_1,x_2)=a^{x_2},\ a>0. \qquad (24)$$

Подставив выражения (24) в общие формулы интервальных производных (11), (12), имеем выражение производной n-го порядка от интервальной показательной функции $\widetilde{y}=a^{\widetilde{x}}$ (21):

$$\widetilde{y}^{(n)}=(a^{\widetilde{x}})^{(n)}=(a^{[x_1,x_2]})^{(n)}=[-f^{(n)}(\widetilde{x}),f^{(n)}(\widetilde{x})], \qquad (25)$$

где $f^{(n)}(\widetilde{x})=2^{n-1}(a^{x_2}-a^{x_1})/(x_2-x_1)^n$.

Формула (25) показывает, что в интервальной производной любого n-го порядка $(a^{\widetilde{x}})^{(n)}$ от интервальной показательной функции $a^{\widetilde{x}}$ при увеличении n перед данной функцией не появляются дополнительные множители $\ln a$, в отличие от классической производной от вещественной показательной функции, у которой такие множители появляются. Согласно формуле (25), интервальная производная $(a^{\widetilde{x}})^{(n)}$, существует во всех точках $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$; она монотонно убывает с увеличением разности x_2-x_1.

Интервальная экспоненциальная функция выражается в виде

$$\widetilde{y}=[y_1,y_2]=e^{\widetilde{x}} \equiv e^{[x_1,x_2]}, \qquad (26)$$

где $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\widetilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Из сравнения (21) и (26) выясняется, что интервальная экспоненциальная функция (26) – частный случай интервальной показательной функции (21) при $a=e$. Таким образом, из выражения (25) производной любого n-го порядка от интервальной показательной функции, положив в нем $a=e$, получим следующее выражение производной любого n-го порядка от интервальной экспоненциальной функции

$$\tilde{y}^{(n)}=(e^{\tilde{x}})^{(n)}=(e^{[x_1,x_2]})^{(n)}=[-f^{(n)}(\tilde{x}),f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (27)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}(e^{x_2}-e^{x_1})/(x_2-x_1)^n.$$

Формула (27) показывает, что в интервальной производной $(e^{\tilde{x}})^{(n)}$ любого n-го порядка от интервальной экспоненты $e^{\tilde{x}}$ (26) при увеличении n перед экспонентой изменяется множитель

$$M=2^{n-1}/(x_2-x_1)^n , \quad (28)$$

в отличие от классической производной от вещественной экспоненты, у которой этого множителя нет. Интервальная производная $(e^{\tilde{x}})^{(n)}$, согласно (27), существует во всех точках $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$ и монотонно убывает с увеличением разности x_2-x_1.

Интервальная логарифмическая функция выражается в виде

$$\tilde{y}=[y_1,y_2]=\log_a\tilde{x}=\log_a[x_1,x_2] \quad a>0, \quad (29)$$

где $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная функция $\log_a\tilde{x}$ определяется в виде

$$\log_a\tilde{x}=\{\log_a x \mid x\in\tilde{x}\}, \quad a>0, a\neq 1, \quad (30)$$

при этом $\log_a x$ – исходная обычная логарифмическая функция, которая монотонно возрастает. Это позволяет записать интервальную логарифмическую функцию (29) в явном интервальном виде с помощью такой формулы

$$\tilde{y}\equiv[y_1,y_2]=[\log_a x_1,\log_a x_2], \quad a>0, a\neq 1. \quad (31)$$

Сравнив выражение (31) с общим выражением любой интервальной функции (1), заключаем, что интервальная логарифмическая функция – интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой выглядят как

$$y_1=f_1(\tilde{x})=f_1(x_1,x_2)=\log_a x_1,$$

$$y_2=f_2(\tilde{x})=f_2(x_1,x_2)=\log_a x_2,\ a>0,\ a\neq 1. \quad (32)$$

При подстановке (32) в общие формулы интервальных производных (11), (12), выражение для производной любого n-го порядка от интервальной логарифмической функции $\tilde{y}=\log_a\tilde{x}$ (29) запишется в виде

$$\tilde{y}^{(n)}=(\log_a\tilde{x})^{(n)}=(\log_a[x_1,x_2])^{(n)}=[-f^{(n)}(\tilde{x}),f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (33)$$

здесь $f^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}(\log_a x_2-\log_a x_1)/(x_2-x_1)^n, \quad a>0, a\neq 1$, или, после потенцирования,

$$f^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}\log_a(x_2/x_1)/(x_2-x_1)^n, \quad a>0, a\neq 1.$$

Как это видно из (33), в интервальной производной $(\log_a\tilde{x})^{(n)}$ любого n-го порядка от интервальной функции логарифм $\log_a\tilde{x}$ исходная логарифмическая функция остается логарифмической, в отличие от классической производной от вещественной логарифмической функции $\log_a x$, которая равна $1/x\ln a$, т.е. является рациональной функцией. Производная $(\log_a\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, где $x_1\neq x_2$, и монотонно убывает с увеличением x_2-x_1.

Интервальная натуральная логарифмическая функция выражается в виде

$$\tilde{y}=[y_1,y_2]=\ln\tilde{x}=\ln[x_1,x_2], \quad (34)$$

где $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Из сравнения (29) и (34) мы видим, что интервальная натуральная логарифмическая функция (34) – частный случай интервальной логарифмической функции (29) при $a=e$. Так что, из формулы (33) производной любого n-го порядка от интервальной логарифмической функции, положив в нем $a=e$, найдем выражение производной любого n-го порядка от интервальной натурально-логарифмической функции

$$\tilde{y}^{(n)}=(\ln\tilde{x})^{(n)}=(\ln[x_1,x_2])^{(n)}=[-f^{(n)}(\tilde{x}),f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (35)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}\ln(x_2/x_1)/(x_2-x_1)^n .$$

При этом из (35) видно, что в интервальной производной любого n-го порядка $(\ln\tilde{x})^{(n)}$ от натурально-логарифмической интервальной функции $\ln\tilde{x}$ исходная натурально-логарифми-ческая функция остается натурально-логарифмической, в отличие от классической производной от натурально-логарифмической функции $\ln x$, которая равна $1/x$ и является рациональной функцией. Интервальная производная $(\ln\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, в которых $x_1\neq x_2$, она монотонно убывает с увеличением разности x_2-x_1.

Интервальная тригонометрическая функция «синус» выражается в следующем виде

$$\tilde{y}=[y_1,y_2]=\sin\tilde{x}=\sin[x_1,x_2], \quad (36)$$

где $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. По определению интервальной функции [4, 5, 7], функция $\sin\tilde{x}$ задается в виде

$$\sin\tilde{x}=\{\sin x \mid x\in\tilde{x}\}, \quad (37)$$

где $\sin x$ – исходная обычная тригонометрическая функция «синус», которая монотонно возрастает на интервале $-\pi/2\leq x\leq\pi/2$, в котором она последовательно принимает все возможные значения от –1 до 1. Последнее позволяет нам записать интервальную тригонометрическую функцию синус (37) в явном интервальном виде с помощью формулы

$$\tilde{y} \equiv [y_1, y_2] = \sin\tilde{x} = \sin[x_1, x_2] = [\sin x_1, \sin x_2]. \quad (38)$$

Сравнив выражение (38) с общим выражением любой интервальной функции (1), видим, что интервальная тригонометрическая функция «синус» есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \sin x_1,$$

$$y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \sin x_2. \quad (39)$$

Подставив выражения (39) в общие формулы интервальных производных (11), (12), получаем следующее выражение производной любого n-го порядка от интервальной тригонометрической функции $\sin\tilde{x}$

$$\tilde{y}^{(n)} = (\sin\tilde{x})^{(n)} = (\sin[x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (40)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\sin x_2 - \sin x_1)/(x_2 - x_1)^n.$$

Формула (40) показывает, что в интервальной производной любого n-го порядка $(\sin\tilde{x})^{(n)}$ от интервальной тригонометрической функции $\sin\tilde{x}$ исходная тригонометрическая функция синус остается синусом, в отличие от классической производной от обычной тригонометрической функции $\sin x$, которая равна $\cos x$. Интервальная производная $(\sin\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, где $x_1 \neq x_2$, она монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

Интервальная тригонометрическая функция «косинус» выражается в следующем виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \cos\tilde{x} = \cos[x_1, x_2], \quad (41)$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная функция $\cos\tilde{x}$ определяется в следующем виде:

$$\cos\tilde{x} = \{\cos x \,|\, x \in \tilde{x}\}, \quad (42)$$

где $\cos x$ – исходная обычная тригонометрическая функция «косинус», которая монотонно убывает в интервале $0 \le x \le \pi$, принимая последовательно все возможные значения от 1 до –1. Это позволяет нам задать интервальную тригонометрическую функцию «косинус» в явном интервальном виде посредством формулы

$$\tilde{y} \equiv [y_1, y_2] = \cos\tilde{x} = \cos[x_1, x_2] = [\cos x_2, \cos x_1]. \quad (43)$$

Сравним формулу (43) с общим выражением интервальной функции (1). Видим, что интервальная тригонометрическая функция «косинус» является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \cos x_2,$$

$$y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \cos x_1. \quad (44)$$

Подставив выражения (44) в общие формулы интервальных производных (11), (12), получим следующее выражение производной любого n-го порядка от интервальной тригонометрической функции $\cos\tilde{x}$

$$\tilde{y}^{(n)} = (\cos\tilde{x})^{(n)} = (\cos[x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (45)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\cos x_1 - \cos x_2)/(x_2 - x_1)^n.$$

Формула (45) показывает, что в интервальной производной любого n-го порядка $(\cos\tilde{x})^{(n)}$ от интервальной тригонометрической функции $\cos\tilde{x}$ исходная тригонометрическая функция косинус остается косинусом, в отличие от классической производной от вещественной тригонометрической функции $\cos x$, которая равна $-\sin x$. Интервальная производная $(\cos\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, $x_1 \neq x_2$, и монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

Интервальная тригонометрическая функция «тангенс» выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \mathrm{tg}\,\tilde{x} = \mathrm{tg}[x_1, x_2], \quad (46)$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная функция $\mathrm{tg}\,\tilde{x}$ определяется следующим образом

$$\mathrm{tg}\,\tilde{x} = \{\mathrm{tg}\,x \,|\, x \in \tilde{x}\}, \quad (47)$$

причем $\mathrm{tg}\,x$ – обычная тригонометрическая функция «тангенс», которая монотонно возрастает в интервале $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, где она последовательно принимает все возможные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Это позволяет записать интервальную тригонометрическую функцию «тангенс» (47) в явном интервальном виде с помощью формулы

$$\tilde{y} \equiv [y_1, y_2] = \mathrm{tg}\,\tilde{x} = \mathrm{tg}[x_1, x_2] = [\mathrm{tg}\,x_1, \mathrm{tg}\,x_2]. \quad (48)$$

Сравнивая выражение (48) с общим выражением интервальной функции (1), заключаем, что интервальная тригонометрическая функция «тангенс» является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \mathrm{tg}\,x_1,$$

$$y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \mathrm{tg}\,x_2. \quad (49)$$

Подставив выражения (49) в общие формулы для интервальных производных (11), (12), получим следующее выражение производной любого n-го порядка от интервальной тригонометрической функции $\mathrm{tg}\,\tilde{x}$

$$\tilde{y}^{(n)} = (\mathrm{tg}\,\tilde{x})^{(n)} = (\mathrm{tg}[x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (50)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\mathrm{tg}\,x_2 - \mathrm{tg}\,x_1)/(x_2 - x_1)^n.$$

Формула (50) показывает, что в интервальной производной любого n-го порядка $(\mathrm{tg}\,\tilde{x})^{(n)}$ от интервальной тригонометрической функции $\mathrm{tg}\,\tilde{x}$ исходная функция «тангенс» остается тангенсом, в отличие от классической производной от обычной тригонометрической функции $\mathrm{tg}\,x$, равной $1/\cos^2 x$. Интервальная производная $(\mathrm{tg}\,\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$ и монотонно убывает с увеличением разности x_2-x_1.

Интервальная тригонометрическая функция «котангенс» выражается в виде

$$\tilde{y}=[y_1,y_2]=\mathrm{ctg}\tilde{x}=\mathrm{ctg}[x_1,x_2], \qquad (51)$$

в котором $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная функция $\mathrm{ctg}\tilde{x}$ определяется в виде

$$\mathrm{ctg}\tilde{x}=\{\mathrm{ctg}\,x \mid x\in\tilde{x}\}, \qquad (52)$$

здесь $\mathrm{ctg}\ x$ – исходная обычная тригонометрическая функция «котангенс», которая монотонно убывает на интервале $0\le x\le\pi$, где последовательно принимает возможные значения от $+\infty$ до $-\infty$. Это позволяет нам записать интервальную тригонометрическую функцию «котангенс» явно в интервальном виде с помощью формулы

$$\tilde{y}\equiv[y_1,y_2]=\mathrm{ctg}\tilde{x}=\mathrm{ctg}[x_1,x_2]=[\mathrm{ctg}\,x_2,\mathrm{ctg}\,x_1]. \qquad (53)$$

Сравнивая выражение (53) с общим выражением произвольной интервальной функции (1), видим, что интервальная тригонометрическая функция «котангенс» есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$y_1=f_1(\tilde{x})=f_1(x_1,x_2)=\mathrm{ctg}\,x_2,$$

$$y_2=f_2(\tilde{x})=f_2(x_1,x_2)=\mathrm{ctg}\ x_1. \qquad (54)$$

Подставив выражения (54) в общие формулы интервальных производных (11), (12), получаем следующее выражение производной любого n-го порядка от интервальной тригонометрической функции $\mathrm{ctg}\,\tilde{x}$

$$\tilde{y}^{(n)}=(\mathrm{ctg}\,\tilde{x})^{(n)}=(\mathrm{ctg}[x_1,x_2])^{(n)}=[-f^{(n)}(\tilde{x}),f^{(n)}(\tilde{x})], \qquad (55)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}(\mathrm{ctg}\,x_1-\mathrm{ctg}\,x_2)/(x_2-x_1)^n.$$

Формула (55) показывает, что в интервальной производной любого n-го порядка $(\mathrm{ctg}\,\tilde{x})^{(n)}$ от интервальной тригонометрической функции $\mathrm{ctg}\,\tilde{x}$ исходная тригонометрическая функция котангенс остается котангенсом, в отличие от классической производной от обычной тригонометрической функции $\mathrm{ctg}x$, которая равна $-1/\sin^2 x$. Интервальная производная $(\mathrm{ctg}\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, где $x_1\neq x_2$ и монотонно убывает с увеличением x_2-x_1.

Интервальная обратная тригонометрическая функция «арксинус» выражается в виде

$$\tilde{y}=[y_1,y_2]=\arcsin\tilde{x}=\arcsin[x_1,x_2], \qquad (56)$$

где $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная функция $\arcsin\tilde{x}$ определяется в виде

$$\arcsin\tilde{x}=\{\arcsin x \mid x\in\tilde{x}\}, \qquad (57)$$

в котором $\arcsin x$ есть исходная обычная обратная тригонометрическая функция «арксинус». Последняя монотонно возрастает на интервале $-1\le x\le 1$, проходя последовательно все возможные значения от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Это позволяет записать интервальную обратную тригонометрическую функцию «арксинус» (57) в явном интервальном виде

$$\tilde{y}\equiv[y_1,y_2]=\arcsin\tilde{x}=\arcsin[x_1,x_2]=[\arcsin x_1,\arcsin x_2]. \qquad (58)$$

При сравнении выражения (58) с общим выражением интервальной функции (1), устанавливаем, что интервальная обратная тригонометрическая функция «арксинус» является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$y_1=f_1(\tilde{x})=f_1(x_1,x_2)=\arcsin x_1,$$

$$y_2=f_2(\tilde{x})=f_2(x_1,x_2)=\arcsin\ x_2. \qquad (59)$$

Если подставить (59) в общие формулы интервальных производных (11), (12), мы получаем следующее выражение производной любого n-го порядка от нашей интервальной обратной тригонометрической функции $\tilde{y}=\arcsin\tilde{x}$

$$\tilde{y}^{(n)}=(\arcsin\tilde{x})^{(n)}=(\arcsin[x_1,x_2])^{(n)}=[-f^{(n)}(\tilde{x}),f^{(n)}(\tilde{x})], \qquad (60)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}(\arcsin x_2-\arcsin x_1)/(x_2-x_1)^n.$$

Как видно из формулы (60), в интервальной производной любого n-го порядка $(\arcsin\tilde{x})^{(n)}$ от интервальной обратной тригонометрической функции $\arcsin\tilde{x}$ исходная обычная обратная тригонометрическая функция арксинус так и остается арксинусом, в отличие от классической производной от обычной обратной тригонометрической функции $\arcsin x$, которая равна $1/\sqrt{1-x^2}$. Интервальная производная $(\arcsin\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, $x_1\neq x_2$, монотонно убывая с увеличением разности x_2-x_1.

Интервальная обратная тригонометрическая функция «арккосинус» определяется следующим выражением:

$$\tilde{y}=[y_1,y_2]=\arccos\tilde{x}=\arccos[x_1,x_2], \qquad (61)$$

где $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная функция $\arccos\tilde{x}$ определяется в следующем виде:

$$\arccos\tilde{x} = \{\arccos x \mid x \in \tilde{x}\}, \qquad (62)$$

при этом $\arccos x$ – исходная обычная обратная тригонометрическая функция «арккосинус», которая монотонно убывает на $-1 \le x \le 1$, проходя последовательно все свои возможные значения от π до 0. Это позволяет записать функцию «арккосинус» (62) в явном интервальном виде

$$\tilde{y} \equiv [y_1, y_2] = \arccos\tilde{x} = \arccos[x_1, x_2] = [\arccos x_2, \arccos x_1]. \quad (63)$$

Сравнив выражение (63) с общим выражением любой интервальной функции (1), устанавливаем, что интервальная обратная тригонометрическая функция «арккосинус» является интервальной функцией, у которой нижняя и верхняя граничные функции таковы:

$$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \arccos x_2,$$

$$y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \arccos\ x_1. \qquad (64)$$

Подставив выражения (64) в общие формулы интервальных производных (11), (12), получим выражение производной любого n-го порядка от интервальной функции $\tilde{y} = \arccos\tilde{x}$:

$$\tilde{y}^{(n)} = (\arccos\tilde{x})^{(n)} = (\arccos[x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (65)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\arccos x_1 - \arccos x_2)/(x_2 - x_1)^n.$$

Формула (65) отражает факт, что в интервальной производной n-го порядка $(\arccos\tilde{x})^{(n)}$ от интервальной обратной тригонометрической функции $\arccos\tilde{x}$ исходная обычная обратная тригонометрическая функция арккосинус остается арккосинусом, в отличие от классической производной от обычной обратной тригонометрической функции $\arccos x$, равной $-1/\sqrt{1-x^2}$. Интервальная производная $(\arccos\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \ne x_2$, и монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

Интервальная обратная тригонометрическая функция «арктангенс» выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \operatorname{arctg}\tilde{x} = \operatorname{arctg}[x_1, x_2], \qquad (66)$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная функция $\operatorname{arctg}\tilde{x}$ определяется как

$$\operatorname{arctg}\tilde{x} = \{\operatorname{arctg} x \mid x \in \tilde{x}\}, \qquad (67)$$

при этом $\operatorname{arctg} x$ – исходная обычная обратная тригонометрическая функция «арктангенс», которая монотонно возрастает на интервале $-\infty < x < \infty$, проходя последовательно все свои возможные значения от $-\pi/2$ до $\pi/2$, что дает возможность записать интервальную обратную тригонометрическую функцию «арктангенс» (67) в явном виде

$$\tilde{y} \equiv [y_1, y_2] = \operatorname{arctg}\tilde{x} = \operatorname{arctg}[x_1, x_2] = [\operatorname{arctg} x_1, \operatorname{arctg} x_2]. \quad (68)$$

Сравним формулу (68) с общим выражением любой интервальной функции (1). Хорошо видим, что интервальная обратная тригонометрическая функция «арктангенс» является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \operatorname{arctg} x_1,$$

$$y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \operatorname{arctg}\ x_2. \qquad (69)$$

Подставив формулы (69) в общие формулы для интервальных производных (11), (12), составим выражение интервальной производной любого n-го порядка от интервальной обратной тригонометрической функции $\tilde{y} = \operatorname{arctg}\tilde{x}$ в виде

$$\tilde{y}^{(n)} = (\operatorname{arctg}\tilde{x})^{(n)} = (\operatorname{arctg}[x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (70)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1)/(x_2 - x_1)^n.$$

Запись (70) дает понять, что в выражении интервальной производной $(\operatorname{arctg}\tilde{x})^{(n)}$ от интервальной обратной тригонометрической функции $\operatorname{arctg}\tilde{x}$ исходная обычная обратная тригонометрическая функция арктангенс остается арктангенсом, в отличие от классической производной от обычной обратной тригонометрической функции $\operatorname{arctg} x$, которая равна $1/(1+x^2)$. Интервальная производная $(\operatorname{arctg}\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \ne x_2$. Она монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

Интервальная обратная тригонометрическая функция «арккотангенс» определяется следующим интервальным выражением

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \operatorname{arcctg}\tilde{x} = \operatorname{arcctg}[x_1, x_2], \qquad (71)$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. По общему определению интервальной функции [4, 5, 7], интервальная тригонометрическая функция $\operatorname{arcctg}\tilde{x}$ определяется как

$$\operatorname{arcctg}\tilde{x} = \{\operatorname{arcctg} x \mid x \in \tilde{x}\}, \qquad (72)$$

при этом $\operatorname{arcctg} x$ – исходная обычная обратная тригонометрическая функция «арккотангенс», которая монотонно убывает на интервале $-\infty < x < \infty$ и проходит последовательно все возможные значения от π до 0. Это позволяет записать интервальную обратную тригонометрическую функцию «арккотангенс» (72) в явном виде

$$\tilde{y} \equiv [y_1, y_2] = \operatorname{arcctg}\tilde{x} = \operatorname{arcctg}[x_1, x_2] = [\operatorname{arcctg} x_2, \operatorname{arcctg} x_1]. \quad (73)$$

Если сравнивать (73) с общим выражением интервальной функции (1), можно видеть, что интервальная обратная тригонометрическая функция «арккотангенс» есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \operatorname{arcctg} x_2,$$

$$y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \operatorname{arcctg} \ x_1. \qquad (74)$$

Подставив формулы (74) в общие формулы для интервальных производных (11), (12), получим выражение производной любого n-го порядка от интервальной функции $\tilde{y} = \operatorname{arcctg} \tilde{x}$:

$$\tilde{y}^{(n)} = (\operatorname{arcctg} \tilde{x})^{(n)} = (\operatorname{arcctg} [x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \quad (75)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\operatorname{arcctg} x_1 - \operatorname{arcctg} x_2)/(x_2 - x_1)^n.$$

Формула (75) показывает, что в интервальной производной n-го порядка $(\operatorname{arcctg} \tilde{x})^{(n)}$ от интервальной обратной тригонометрической функции $\operatorname{arcctg} \tilde{x}$ исходная обычная обратная тригонометрическая функция арккотангенс остается арккотангенсом, в отличие от классической производной от вещественной обратной тригонометрической функции $\operatorname{arcctg} x$, которая равна $-1/(1+x^2)$. Интервальная производная $(\operatorname{arcctg} \tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$ и монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

5 ОБСУЖДЕНИЕ

Проблема вычисления производных от интервально-определенных функций существенно отличается от аналогичной проблемы для полностью определенных функций. Это отличие связано с известным отличием процесса вычисления полностью определенной функции от процесса вычисления интервальной функции – во втором случае приходится вычислять параллельно две независимые точно заданные функции – нижнюю и верхнюю граничные функции интервальной функции. В связи с этим отличием для вычисления полностью определенных функций имеются простые и ясные методики, основанные на методах вычислительной математики, в то время как вычисление неполностью определенной – интервальной функции оказывается более сложным [8–14]. Эта сложность вычисления распространяется и на производные от интервальных функций, поскольку они также являются интервальными функциями. Поэтому предпринятое в статье детальное изучение производных элементарных функций, сопровождаемое получением простых формул для вычисления этих производных, является важным шагом на пути уменьшения сложности вычисления интервальных функций. В процессе изучения выявлены различия между интервальными производными от интервальных элементарных функций и классическими производными от детерминированных элементарных функций. Главное различие состоит в том, что производная любого n-го $(n = 1, 2, ...)$ порядка от любой интервальной функции $\tilde{P}(\tilde{x})$, в частности, элементарной функции, всегда представляет собой функцию класса $\tilde{P}(\tilde{x}) / \tilde{x}^n$. Поэтому интервальную производную любого n-го порядка с полным правом можно интерпретировать как скорость n-го порядка изменения функции $P(\tilde{x})$ относительно ее аргумента $\tilde{x}$. Известно, что классическая производная любого порядка n от любой детерминированной функции $P(x)$ не обязательно представляет собой функцию класса $P(x) / x^n$. Поэтому такую производную в общем случае нельзя интерпретировать как скорость n-го порядка изменения функции $P(x)$ относительно ее аргумента. Это означает, в свою очередь, что классическая производная Ньютона-Лейбница, в отличие от интервальной производной, вообще говоря, не может считаться адекватной моделью динамики большинства природных объектов и процессов. Другими словами, именно учет неопределенности исходных функций в форме интервальности их возможных значений делает производные от них адекватными моделями динамики природных процессов.

6 БЛАГОДАРНОСТИ

Настоящая статья содержит некоторые итоги НИР, выполненной в рамках гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 12–06–00196 «Моделирование и оптимизация социально-экономических процессов с использованием методов интервальной математики».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автором в данной работе впервые получен полный набор производных любых порядков от всех существующих элементарных интервальных функций (формулы (15), (20), (25), (27), (33), (35), (40), (45), (50), (55), (60), (65), (70), (75)).

Научная новизна полученных результатов заключается как в самих полученных формулах, так и в том, что каждая из этих формул выражает набор интервальных производных всех возможных порядков n от данной интервальной функции. Практическая ценность выполненной работы состоит в необычайной простоте вычисления интервальных производных с помощью полученных формул: эти вычисления требуют всего лишь деления исходной интервальной функции на n-ю степень аргумента, где n – порядок вычисляемой производной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М. : Наука, 2004. – 451 с.
2. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде. – М. : Мир, 1976. – 165 с.
3. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М. : Мир, 1987. – 360 с.
4. Левин В. И. Интервальная производная и начала недетерминистского дифференциального исчисления / В. И. Левин // Онтология проектирования. – 2013. – № 4 (10). – С. 72–85.
5. Левин В. И. Интервально-дифференциальное исчисление и некоторые его применения / В. И. Левин // Информационные технологии. – 2014. – № 7. – С. 3–10.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2001. – 616 с.
7. Левин В. И. Дифференциальное исчисление для интервально-определенных функций / В. И. Левин // Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления. – 2015. – Т. 2, № 2. – С. 8–25.

8. Вощинин А. П. Оптимизация в условиях неопределенности / А. П. Вощинин, Г. Р. Сотиров. – М. : Изд-во МЭИ, 1989. – 224 с.
9. Ащепков Л. Т. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления / Л. Т. Ащепков, Д. В. Давыдов. – М. : Наука, 2006. – 285 с.
10. Moore R. E. Interval Analysis / R. E. Moore. – N. Y. : Prentice-Hall, 1966. – 230 p.
11. Libura M. Integer Programming Problems with Inexact Objective Function / M. Libura // Control and Cybernetics. – 1980. – Vol. 9, No. 4. – P. 189–202.
12. Куржанский А. Б. Задача идентификации – теория гарантированных оценок / А. Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 4. – С. 3–26.
13. Hyvonen E. Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic: the Tolerance Propagation Approach / E. Hyvonen // Artificial Intelligence. – 1992. – Vol. 58. – P. 19.
14. Левин В. И. Расчет и анализ поведения неполностью определенных функций методом детерминизации / В.И. Левин // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2016. – № 2.– С. 46–55.

Статья поступила в редакцию 21.06.2016.
После доработки 01.07.2016.

Левін В. І.
Д-р техн. наук, професор, провідний науковий співробітник Пензенського державного технологічного університету, Пенза, Росія

ПОХІДНІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ІНТЕРВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянуто задачі, пов'язані з обчисленням похідних від интервально-певних функцій. Ці задачі актуальні при вивченні систем з властивою їм тим чи іншим ступенем невизначеності (недетерміновані системи). Саме, мова йде про простих системах, які описуються елементарними интервально-певними функціями. Відповідно до цього вирішуються задачі знаходження похідних від елементарних функцій зазначеного виду. При цьому використовуються отримані раніше формули і прийоми обчислення похідних від будь-яких интервально-певних функцій. Наведено основні визначення, пов'язані з похідними від интервально-певних функцій, а також формули двох типів, які дозволяють обчислювати зазначені інтервальні похідні. Формули першого типу висловлюють похідні в закритій інтервального формі, яка вимагає використання апарату інтервального математики. Формули другого типу висловлюють похідні у відкритій інтервального формі, у вигляді двох формул, перша з яких висловлює нижню межу інтервалу, що представляє шукану похідну, а друга – верхню межу, і обчислення похідної від інтервального функції зводиться до обчислення двох дійсних функцій. За допомогою викладеного математичного апарату були знайдені похідні від наступних елементарних інтервальних функцій: інтервального константи, інтервального статечної функції, інтервального показовою функції, інтервального експоненційної функції, інтервального логарифмічною і натурально-логарифмічноїфункцій, інтервальних тригонометричних функцій (синуса, косинуса, тангенса і котангенс), інтервальних зворотних тригонометричних функцій (арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса). Формули всіх похідних дані у відкритій інтервального формі. Зазначено відміну інтервальних похідних інтервальних елементарних функцій від класичних похідних відповідних звичайних елементарних функцій.

Ключові слова: інтервал, інтервальна функція, інтервальна похідна, інтервально-диференціальне числення, інтервальні обчислення.

Levin V. I.
Dr. Sc., Professor, Leading Scientist of Mathematical Department of Penza State Technological University, Penza, Russia

DERIVATIVES OF ELEMENTARY INTERVAL FUNCTIONS

The article deals with some problems related to calculation of derivatives of interval-specified functions. These problems are relevant in the study of systems with any level of uncertainty (nondeterministic systems). Specifically we will speak about simple systems described by elementary interval-specific functions. Accordingly we solved the problem of calculating derivatives of elementary interval-specified functions. Previously obtained formulas and methods of finding of derivatives of interval-defined functions are used. Basic definitions related to the derivatives of interval functions are given. We present formulas of two types that allow you to calculate interval derivatives. The first type formulas express derivatives in the closed interval form, which requires computing using the apparatus of interval mathematics. But formulas of the second type can express derivatives in the open interval form, i.e. in the form of two formulas. Formulas above expresses the lower and the upper limits of the interval representing the derivative. Here finding of the derivative of the interval-defined function is reduced to computation of two ordinary certain functions. Using above mathematical apparatus we find derivatives of all elementary interval functions: interval constant, interval power function, interval exponential function, interval logarithmic function, interval natural-logarithmic function, interval trigonometric functions (sine, cosine, tangent, cotangent), interval inverse trigonometric functions (arcsine, arccosine, arctangent, arccotangent). Formulas of all derivatives are shown in form of an open interval. The difference between derivatives of interval elementary functions and the derivatives of exact functions (not interval) elementary functions is discussed.

Keywords: interval value, interval function, interval derivatives, interval computations, interval-differential calculus.

REFERENCES

1. Gnedenko B. V. Kurs Teorii Veroyatnostey. Moscow, Nauka, 2004, 451 p.
2. Zadeh L. A. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning, *Information Sciences*, 1975, No. 8, 9, P. 199–249, 301–357; 43–80.
3. Alefeld G., Herzberger J. Introduction to Interval Computations. N.Y, Academic Press, 1983, 360 p.
4. Levin V.I. Intervalnaya Proizvodnaya i Nachala Nedeterministskogo Differencialnogo Ischisleniya, *Ontologiya Proektirovaniya*, 2013, No. 4, pp. 72–84.
5. Levin V.I. Intervalno-Differencialnoe Ischislenie I Nekotorye Ego Primeneniya, *Informacionnye Tehnologii*, 2014, No. 7, pp. 3–10.
6. Fikhtengolz G.M. Kurs Differencialnogo i Integralnogo Ischisleniya. Vol. 1. Moscow, Fizmatlit, 2001, 616 p.
7. Levin V. I. Differencialnoe Ischislenie dlya Intervalno-Opredelennyh Funkciy, *Evristicheskie Algoritmy i Raspredelennye Vychisleniya*, 2015, Vol. 2, No. 2, pp. 8–25.
8. Voschinin A. P., Sotirov G. R. Optimizaciya v Usloviyah Neopredelennosti. Moscow, MEI Publishers, 1989, 224 p.
9. Aschepkov L. T., Davydov D. V. Universalnye Resheniya Intervalnykh Zadach Optimizacii i Upravleniya. Moscow, Nauka, 2006, 285 p.
10. Moore R.E. Interval Analysis. N.Y., Prentice-Hall, 1966, 230 p.
11. Libura M. Integer Programming Problems with Inexact Objective Function, *Control and Cybernetics*, 1980, Vol. 9, No. 4, pp. 189–202.
12. Kurzhanskiy A. B. Identification Problem – Theory of Guaranteed Estimates, *Automation and Remote Control*, 1991, Vol. 52, No. 4, pp. 447–465.
13. Hyvonen E. Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic: the Tolerance Propagation Approach, *Artificial Intelligenc*, 1992, Vol. 58, P. 19.
14. Levin V. I. Calculation and Analysis of Incompletely Defined Functions by Determination Method, *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2016, No. 2, P. 46–55.